

|                     |   |
|---------------------|---|
| <b>Zeitschrift:</b> | L'Enseignement Mathématique   |
| <b>Herausgeber:</b> | Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique                              |
| <b>Band:</b>        | 31 (1985)   |
| <b>Heft:</b>        | 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE  |
| <b>Artikel:</b>     | UNE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE DUALITÉ DE VERDIER                                   |
| <b>Autor:</b>       | Grivel, Pierre-Paul   |
| <b>Kapitel:</b>     | 4. Le théorème de dualité   |
| <b>DOI:</b>         | <a href="https://doi.org/10.5169/seals-54567">https://doi.org/10.5169/seals-54567</a> |

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 21.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## 4. LE THÉORÈME DE DUALITÉ

4.1. Soit  $f: X \rightarrow Y$  une application continue entre espaces localement compacts telle que le foncteur  $f_!$  soit de dimension cohomologique finie.

Supposons pour toute la suite de ce paragraphe que l'anneau  $R$  est noethérien. D'après le théorème 1.5 on peut trouver une  $f_!$ -résolution  $0 \rightarrow R_X \rightarrow \mathcal{K}^\bullet$  du faisceau  $R_X$  par des faisceaux plats.

4.2. Si  $\mathcal{A}^\bullet \in \text{Ob } K(X)$  on définit un complexe double  $f_!^{\mathcal{K}^\bullet}(\mathcal{A}^\bullet)$  en posant  $[f_!^{\mathcal{K}^\bullet}(\mathcal{A}^\bullet)]^{p,q} = f_!^{\mathcal{K}^p}(\mathcal{A}^q)$ , les différentielles étant induites par celles de  $\mathcal{K}^\bullet$  et de  $\mathcal{A}^\bullet$  respectivement. En prenant le complexe simple associé on en déduit un foncteur, encore noté  $f_!^{\mathcal{K}}$ , de  $K(X)$  dans  $K(Y)$ .

Si  $\mathcal{B}^\bullet \in \text{Ob } K(Y)$  on peut encore définir un complexe triple

$$\mathcal{H}om(f_!^{\mathcal{K}^\bullet}(\mathcal{A}^\bullet); \mathcal{B}^\bullet)$$

en posant

$$[\mathcal{H}om(f_!^{\mathcal{K}^\bullet}(\mathcal{A}^\bullet); \mathcal{B}^\bullet)]^{p,q,r} = \mathcal{H}om(f_!^{\mathcal{K}^{-p}}(\mathcal{A}^{-q}); \mathcal{B}^r),$$

les différentielles étant induites par celle de  $\mathcal{K}^\bullet$ , de  $\mathcal{A}^\bullet$  et de  $\mathcal{B}^\bullet$  respectivement. Le complexe simple associé à ce complexe triple est canoniquement isomorphe au complexe simple associé au complexe double des homomorphismes du complexe simple associé au complexe double  $f_!^{\mathcal{K}^\bullet}(\mathcal{A}^\bullet)$  dans le complexe  $\mathcal{B}^\bullet$ .

4.3. D'une façon analogue on définit un complexe double  $f_{\mathcal{K}^\bullet}^!(\mathcal{B}^\bullet)$  en posant  $[f_{\mathcal{K}^\bullet}^!(\mathcal{B}^\bullet)]^{p,q} = f_{\mathcal{K}^{-p}}^!(\mathcal{B}^q)$ . En prenant le complexe simple associé on en déduit un foncteur, encore noté  $f_{\mathcal{K}^\bullet}^!$ , de  $K(Y)$  dans  $K(X)$ .

On peut aussi définir le complexe triple  $\mathcal{H}om(\mathcal{A}^\bullet; f_{\mathcal{K}^\bullet}^!(\mathcal{B}^\bullet))$  en posant

$$[\mathcal{H}om(\mathcal{A}^\bullet; f_{\mathcal{K}^\bullet}^!(\mathcal{B}^\bullet))]^{p,q,r} = \mathcal{H}om(\mathcal{A}^{-q}; f_{\mathcal{K}^{-p}}^!(\mathcal{B}^r)).$$

Le complexe simple associé à ce complexe triple est canoniquement isomorphe au complexe simple associé au complexe double des homomorphismes du complexe  $\mathcal{A}^\bullet$  dans le complexe simple associé au complexe double  $f_{\mathcal{K}^\bullet}^!(\mathcal{B}^\bullet)$ .

4.4. PROPOSITION. *Il existe un isomorphisme de complexes de faisceaux sur  $Y$*

$$\lambda^\bullet: \mathcal{H}om(f_!^{\mathcal{K}^\bullet}(\mathcal{A}^\bullet); \mathcal{B}^\bullet) \rightarrow f_* \mathcal{H}om(\mathcal{A}^\bullet; f_{\mathcal{K}^\bullet}^!(\mathcal{B}^\bullet)).$$

*Démonstration.* Le corollaire 3.11 fournit, pour tout  $(p, q, r) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ , un isomorphisme

$$\lambda^{p, q, r} : [\mathcal{H}om(f_!^{\mathcal{K}}(\mathcal{A}^\bullet); \mathcal{B}^\bullet)]^{p, q, r} \rightarrow [f_*\mathcal{H}om(\mathcal{A}^\bullet; f_!^{\mathcal{K}}(\mathcal{B}^\bullet))]^{p, q, r},$$

compatibles avec les différentielles. On en déduit un isomorphisme de complexes triples. En passant aux complexes simples associés on obtient l'isomorphisme  $\lambda^\bullet$ .

4.5. Rappelons ([Gr], corollaire 3.10) qu'on définit le foncteur  $f^!$  comme étant le foncteur dérivé du foncteur  $f_!^{\mathcal{K}}$ .

4.6. THÉORÈME. Soit  $\mathcal{A}^\bullet$  un objet de la catégorie dérivée  $D^-(X)$  et  $\mathcal{B}^\bullet$  un objet de la catégorie dérivée  $D^b(Y)$ . Dans la catégorie  $D^+(Y)$  on a un isomorphisme canonique

$$\mathbf{R}\mathcal{H}om^\bullet(\mathbf{R}f_!(\mathcal{A}^\bullet); \mathcal{B}^\bullet) = \mathbf{R}f_*\mathbf{R}\mathcal{H}om^\bullet(\mathcal{A}^\bullet; f^!(\mathcal{B}^\bullet)).$$

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{A}^\bullet \in \text{Ob } D^-(X)$  et soit  $0 \rightarrow R_X \rightarrow \mathcal{K}^\bullet$  une  $f_!$ -résolution du faisceau constant  $R_X$  par des faisceaux plats (théorème 1.5). On a  $\mathcal{A}^\bullet \otimes R_X = \mathcal{A}^\bullet$  donc  $0 \rightarrow \mathcal{A}^\bullet \rightarrow \mathcal{A}^\bullet \otimes \mathcal{K}^\bullet$  est une résolution de  $\mathcal{A}^\bullet$  par des faisceaux  $f_!$ -mous (proposition 1.4) donc  $f_!$ -acycliques ([Gr] lemme 2.10).

Comme par hypothèse  $f_!$  est de dimension cohomologique finie le foncteur  $\mathbf{R}f_! : D(X) \rightarrow D(Y)$  existe et est donné par  $\mathbf{R}f_!(\mathcal{A}^\bullet) = f_!^{\mathcal{K}}(\mathcal{A}^\bullet)$ ; il induit un foncteur  $\mathbf{R}f_! : D^-(X) \rightarrow D^-(Y)$  ([H] chap. I, corollaire 5.3).

Maintenant soit  $\mathcal{B}^\bullet \in \text{Ob } D^b(Y)$  et soit  $0 \rightarrow \mathcal{B}^\bullet \rightarrow \mathcal{J}^\bullet$  une résolution injective de  $\mathcal{B}^\bullet$ . On a évidemment

$$\mathbf{R}(\mathcal{H}om^\bullet \circ (f_! \times 1_{K^b(Y)})) = \mathbf{R}\mathcal{H}om^\bullet \circ (\mathbf{R}f_! \times 1_{D^b(Y)})$$

donc ([H] chap. I, § 6).

$$(4.6.1) \quad \mathbf{R}\mathcal{H}om^\bullet(\mathbf{R}f_!\mathcal{A}^\bullet; \mathcal{B}^\bullet) = \mathcal{H}om^\bullet(f_!^{\mathcal{K}}(\mathcal{A}^\bullet); \mathcal{J}^\bullet).$$

D'un autre côté les faisceaux  $f_!^{\mathcal{K}}(\mathcal{J}^\bullet)$  sont injectifs (corollaire 2.9), donc les faisceaux  $\mathcal{H}om^\bullet(\mathcal{A}^\bullet; f_!^{\mathcal{K}}(\mathcal{J}^\bullet))$  et  $f_*\mathcal{H}om^\bullet(\mathcal{A}^\bullet; f_!^{\mathcal{K}}(\mathcal{J}^\bullet))$  sont flasques ([Go] chap. II, lemme 7.3.2 et théorème 3.1.1). On a ainsi ([H], chap. I, prop. 5.4)

$$\mathbf{R}(f_* \circ \mathcal{H}om^\bullet \circ (1_{K(X)} \times f_!^{\mathcal{K}} \cdot)) = \mathbf{R}f_* \circ \mathbf{R}\mathcal{H}om^\bullet \circ (1_{D(X)} \times \mathbf{R}f_!^{\mathcal{K}} \cdot).$$

Donc

$$(4.6.2) \quad \mathbf{R}f_*\mathbf{R}\mathcal{H}om^\bullet(\mathcal{A}^\bullet; f^!(\mathcal{B}^\bullet)) = f_*\mathcal{H}om^\bullet(\mathcal{A}^\bullet; f_!^{\mathcal{K}}(\mathcal{J}^\bullet)).$$

Le théorème résulte alors du fait que les membres de droite des égalités (4.6.1) et (4.6.2) sont isomorphes en vertu de la proposition 4.4.

4.7. Appliquons le théorème 4.6 au cas où  $\mathcal{A}^\bullet = f^!(\mathcal{B}^\bullet)$ . Comme les foncteurs  $f_*$  et  $\mathcal{H}om$  sont exacts gauche, en appliquant le foncteur cohomologique  $H^0$ , puis en prenant les sections globales, on obtient un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{D^b(Y)}(\mathbf{R}f_!(f^!(\mathcal{B}^\bullet)); \mathcal{B}^\bullet) = \mathrm{Hom}_{D^b(X)}(f^!(\mathcal{B}^\bullet); f^!(\mathcal{B}^\bullet)).$$

L'image de  $1_{f^!(\mathcal{B})}$  par cet isomorphisme permet donc de définir une flèche d'adjonction

$$\mathbf{R}f_! \circ f^! \rightarrow 1_{D^b(Y)}.$$

## APPENDICE A:

### LES MODULES PLATS SUR UN ANNEAU NOETHÉRIEN

A.1. Soit  $R$  un anneau commutatif unitaire et soit  $E$  un  $R$ -module. On sait que le foncteur  $-\otimes E$  est toujours exact à droite. On dit alors que  $E$  est un module plat si ce foncteur est aussi exact à gauche. Cette condition est équivalente au fait que pour tout  $R$ -module  $M$  et  $M'$  et pour tout homomorphisme injectif  $u: M' \rightarrow M$ , l'homomorphisme  $u \otimes 1_E: M' \otimes E \rightarrow M \otimes E$  est encore injectif ([Bo2], chap. I, § 2, prop. 1).

A.2. Soit  $\mathfrak{a}$  un idéal de  $R$ . L'inclusion  $j: \mathfrak{a} \rightarrow R$  induit un homomorphisme  $\tilde{j}: \mathfrak{a} \otimes E \rightarrow E$  obtenu en composant l'homomorphisme  $j \otimes 1_E$  avec l'isomorphisme canonique  $R \otimes E = E$ . On a alors le résultat suivant ([Bo2], chap. I, § 2, N° 3, remarque 1).

**LEMME.** *Pour que  $E$  soit un  $R$ -module plat il faut et il suffit que, pour tout idéal  $\mathfrak{a}$  de  $R$  de type fini, l'homomorphisme  $\tilde{j}: \mathfrak{a} \otimes E \rightarrow E$  soit injectif.*

A.3. **LEMME.** *Soit  $E$  un  $R$ -module de présentation finie et soit  $\{F_i\}_{i \in I}$  une famille de  $R$ -modules. Alors l'homomorphisme canonique*

$$\sigma: E \otimes (\prod_{i \in I} F_i) \rightarrow \prod_{i \in I} (E \otimes F_i)$$

*est un isomorphisme.*