Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 31 (1985)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE DUALITÉ DE VERDIER

Autor: Grivel, Pierre-Paul

Kapitel: 2. Les foncteurs E et F

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-54567

2. Les foncteurs E et F

2.1. Soit $f: X \to Y$ une application continue entre espaces localement compacts telle que le foncteur $f_!$ soit de dimension cohomologique finie. Soit $\mathscr{K}$ un faisceau sur X, $f_!$-mou et plat.

2.2. La composition des foncteurs

$$Sh(X) \times Sh(Y) \xrightarrow{f_!^{\mathscr{K}} \times 1_{Sh(Y)}} Sh(Y) \times Sh(Y) \xrightarrow{\mathscr{H}om} Sh(Y)$$

définit un bifoncteur

$$E(- ; -): Sh(X)^0 \times Sh(Y) \to Sh(Y)$$

2.3. Soit $\mathscr{A}$ un faisceau sur X et $\mathscr{B}$ un faisceau sur Y. Le foncteur $E(\mathscr{A} ; -): Sh(Y) \to Sh(Y)$ est exact gauche et commute aux produits directs. Le foncteur $E(- ; \mathscr{B}): Sh(X)^0 \to Sh(Y)$ est exact gauche et transforme les sommes directes en produits directs.

En effet cela résulte des propriétés analogues du foncteur $\mathscr{H}om$, de la proposition 1.7 et de ([Gr], th. 2.15).

2.4. La composition des foncteurs

$$Sh(X) \times Sh(Y) \xrightarrow{1_{Sh(X)} \times f^!_{\mathscr{K}}} Sh(X) \times Sh(X) \xrightarrow{\mathscr{H}om} Sh(X) \xrightarrow{f_*} Sh(Y)$$

définit un bifoncteur

$$F(- ; -): Sh(X)^0 \times Sh(Y) \to Sh(Y)$$

2.5. Soit $\mathscr{A}$ un faisceau sur X et $\mathscr{B}$ un faisceau sur Y. Le foncteur $F(\mathscr{A} ; -): Sh(Y) \to Sh(Y)$ est exact gauche et commute aux produits directs.

Le foncteur $F(- ; \mathscr{B}): Sh(X)^0 \to Sh(Y)$ est exact gauche et transforme les sommes directes en produits directs. En effet cela résulte des propriétés analogues des foncteurs $\mathscr{H}om$ et f_* et du N° 1.8.

2.6. Théorème. *Il existe un isomorphisme de bifoncteurs*

$$\lambda: E(- ; -) \to F(- ; -).$$

2.7. La construction du morphisme λ et la démonstration du théorème fera l'objet du paragraphe 3.

2.8. COROLLAIRE. *Le foncteur* $f^!_{\mathscr{K}} : Sh(Y) \to Sh(X)$ *est adjoint à droite au foncteur* $f^{\mathscr{K}}_! : Sh(X) \to Sh(Y)$.

Démonstration. En effet prenons les sections globales dans l'isomorphisme du théorème 2.6. On obtient ainsi un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{Sh(Y)}(f^{\mathscr{K}}_!(\mathscr{A});\mathscr{B}) = \mathrm{Hom}_{Sh(X)}(\mathscr{A};f^!_{\mathscr{K}}(\mathscr{B}))$$

2.9. COROLLAIRE. *Le foncteur* $f^!_{\mathscr{K}} : Sh(Y) \to Sh(X)$ *se restreint à un foncteur* $f^!_{\mathscr{K}} : \mathrm{Inj}(Y) \to \mathrm{Inj}(X)$.

Démonstration. Soit $0 \to \mathscr{A}' \to \mathscr{A} \to \mathscr{A}'' \to 0$ une suite exacte de faisceaux sur X et soit $\mathscr{J}$ un faisceau injectif sur Y. En appliquant successivement à cette suite les foncteurs exacts $f^{\mathscr{K}}_!$ et $\mathrm{Hom}_{Sh(Y)}(-;\mathscr{J})$, puis en utilisant l'isomorphisme du corollaire 2.8, on obtient une suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Hom}_{Sh(X)}(\mathscr{A}'';f^!_{\mathscr{K}}(\mathscr{J})) &\to \mathrm{Hom}_{Sh(X)}(\mathscr{A};f^!_{\mathscr{K}}(\mathscr{J})) \\ &\to \mathrm{Hom}_{Sh(X)}(\mathscr{A}';f^!_{\mathscr{K}}(\mathscr{J})) \to 0\,. \end{aligned}$$

Il en résulte que le faisceau $f^!_{\mathscr{K}}(\mathscr{J})$ est injectif.

3. L'ISOMORPHISME λ

3.1. On reprend les hypothèses du N° 2.1. Le résultat suivant permet de simplifier la construction de λ en passant d'une situation locale à une situation globale.

LEMME. *Soit* $W \in \mathrm{Ouv}(Y)$: *posons* $W' = f^{-1}(W)$ *et considérons le diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} W' & \xrightarrow{j'} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ W & \xrightarrow[j]{} & Y \end{array}$$