

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 31 (1985)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE DUALITÉ DE VERDIER
Autor: Grivel, Pierre-Paul
Kapitel: 1. Les foncteurs $f_!^K$ et $f_K^!$
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-54567>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 24.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

1. LES FONCTEURS $f_!^{\mathcal{K}}$ ET $f_!^{\mathcal{K}}$

1.1. Un faisceau $\mathcal{P} \in \text{ObSh}(X)$ est R -plat si le foncteur $- \otimes_R \mathcal{P}$ est exact. (S'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'anneau de base R on dira simplement que \mathcal{P} est plat et on écrira $- \otimes \mathcal{P}$).

Un faisceau \mathcal{P} est plat si et seulement si, pour tout $x \in X$, la fibre \mathcal{P}_x est un R -module plat. De plus \mathcal{P} est plat si et seulement si \mathcal{P}_U est plat pour tout $U \in \text{Ouv}(X)$.

1.2. PROPOSITION. *La catégorie $\text{Sh}(X)$ admet suffisamment d'objets plats.*

Démonstration. Il faut montrer que pour tout $\mathcal{F} \in \text{ObSh}(X)$ il existe un épimorphisme $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$ où \mathcal{P} est un faisceau plat.

Notons W l'ensemble des couples $(U; s)$ où $U \in \text{Ouv}(X)$ et $s \in \mathcal{F}(U)$. Un tel couple détermine un morphisme $\tilde{s}: R_U \rightarrow \mathcal{F}$ de faisceaux sur X ([Go], chap. II, remarque 2.9.1). Ces morphismes induisent un morphisme $\bigoplus_w R_U \rightarrow \mathcal{F}$ qui par construction même est surjectif. Or le faisceau R_U est plat; donc d'après 1.1., ([Go], chap. II, 2.7) et [Bo2], chap. I, § 2, prop. 2), le faisceau $\bigoplus_w R_U$ est plat.

1.3. COROLLAIRE. *Tout faisceau \mathcal{F} sur X admet une résolution plate $\mathcal{P}_\bullet \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$.*

1.4. Soit X et Y deux espaces localement compacts. Considérons une application continue $f: X \rightarrow Y$ telle que le foncteur $f_!$ soit de dimension cohomologique finie.

PROPOSITION. *Soit \mathcal{K} un faisceau sur X , $f_!$ -mou et plat. Alors pour tout faisceau \mathcal{A} sur X , le faisceau $\mathcal{A} \otimes \mathcal{K}$ est $f_!$ -mou.*

Démonstration. D'après le corollaire 1.3 on peut trouver une résolution $\mathcal{P}_\bullet \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow 0$ de \mathcal{A} par des faisceaux de la forme $\mathcal{P}_j = \bigoplus_{w_j} R_U (j \geq 0)$. Comme \mathcal{K} est plat la suite $\mathcal{P}_\bullet \otimes \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{K} \rightarrow 0$ est une résolution de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{K}$. Supposons que la dimension cohomologique de $f_!$ est inférieure à n et posons $\mathcal{B} = \text{Ker}(d_n \otimes 1_{\mathcal{K}})$. Alors la suite

$$0 \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{P}_n \otimes \mathcal{K} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{P}_0 \otimes \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{K} \rightarrow 0$$

est une résolution bornée du faisceau \mathcal{B} . Comme \mathcal{K} est $f_!$ -mou, les faisceaux

$\mathcal{P}_j \otimes \mathcal{K} = \bigoplus_{w_j} R_U \otimes \mathcal{K} = \bigoplus_{w_j} \mathcal{K}_U (0 \leq j \leq n)$ sont $f_!$ -mous ([Gr], lemme 2.10).

L'argument standard utilisé dans ([Gr], th. 2.12) montre que $\mathcal{A} \otimes \mathcal{K}$ est $f_!$ -mou.

1.5. THÉORÈME. *Supposons que l'anneau R est noethérien. Soit \mathcal{F} un faisceau plat sur X . Alors \mathcal{F} admet une $f_!$ -résolution $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{K}^\bullet$, dans laquelle les faisceaux \mathcal{K}^j sont plats ($j \geq 0$).*

Démonstration. Soit $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}^\bullet$ la résolution flasque canonique de \mathcal{F} ([Go], chap. II, 4.3) et posons $\mathcal{Z}^j = \text{Coker}(d: \mathcal{C}^{j-1} \rightarrow \mathcal{C}^j)$ ($j \geq 1$). Supposons que la dimension cohomologique de $f_!$ est inférieure à n . Alors la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}^0 \rightarrow \mathcal{C}^1 \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{C}^n \rightarrow \mathcal{Z}^{n+1} \rightarrow 0$$

est une $f_!$ -résolution de \mathcal{F} . En effet les faisceaux \mathcal{C}^j ($0 \leq j \leq n$) étant flasques, ils sont $f_!$ -mous ([Br], chap. II, coroll. 2.5 et [Gr], lemme 2.10) et par un argument standard ([Gr], th. 2.12) le faisceau \mathcal{Z}^{n+1} est aussi $f_!$ -mou.

Il reste donc à montrer que les faisceaux \mathcal{C}^j ($0 \leq j \leq n$) et \mathcal{Z}^{n+1} sont plats.

La construction de la résolution flasque étant inductive, il suffit de démontrer par récurrence que, pour tout entier $j \geq 0$, les faisceaux \mathcal{C}^j et \mathcal{Z}^{j+1} sont plats.

Pour tout $U \in \text{Ouv}(X)$ on a $\mathcal{C}^0(U) = \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x$. Par hypothèse les modules \mathcal{F}_x sont plats sur l'anneau noethérien R , donc $\mathcal{C}^0(U)$ est un module plat (voir Appendice A). Il en résulte que pour tout $x \in X$ le module $\mathcal{C}_x^0 = \lim_{\substack{\rightarrow \\ U \in \mathcal{V}_x}} \mathcal{C}^0(U)$ est plat ([Bo2], chap. I, § 2, prop. 2) et par suite \mathcal{C}^0 est un faisceau plat.

De plus considérons la suite exacte scindée ([Br], chap. II, § 2)

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{C}_x^0 \rightarrow \mathcal{Z}_x^1 \rightarrow 0$$

dans laquelle les deux premiers termes sont des modules plats. Alors le module \mathcal{Z}_x^1 est aussi plat ([Bo2], chap. I, § 2, prop. 2) donc le faisceau \mathcal{Z}^1 est plat.

Maintenant supposons que les faisceaux \mathcal{C}^q et \mathcal{Z}^{q+1} sont plats pour $0 \leq q \leq p-1$ avec $p \geq 1$. On a $\mathcal{C}^p(U) = \prod_{x \in U} \mathcal{Z}_x^p$. Par hypothèse de récurrence les modules \mathcal{Z}_x^p sont plats, donc le même argument que précédemment montre que le faisceau \mathcal{C}^p est plat et en considérant la suite exacte scindée

$$0 \rightarrow \mathcal{Z}_x^p \rightarrow \mathcal{C}_x^p \rightarrow \mathcal{Z}_x^{p+1} \rightarrow 0$$

on en déduit que le faisceau \mathcal{L}^{p+1} est plat.

1.6. Soit $f: X \rightarrow Y$ une application continue entre espaces localement compacts, telle que le foncteur $f_!$ soit de dimension cohomologique finie et soit \mathcal{K} un faisceau sur X qui soit $f_!$ -mou et plat. La composition des foncteurs

$$Sh(X) \xrightarrow{- \otimes \mathcal{K}} Sh(X) \xrightarrow{f_!} Sh(Y)$$

définit un foncteur $f_!^{\mathcal{K}}: Sh(X) \rightarrow Sh(Y)$ qui commute aux sommes directes puisque chacun des foncteurs qui le compose commute aux sommes directes ([Gr], th. 2.15).

1.7. PROPOSITION. *Le foncteur $f_!^{\mathcal{K}}$ est exact.*

Démonstration. Soit $0 \rightarrow \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'' \rightarrow 0$ une suite exacte de faisceaux sur X . Comme \mathcal{K} est plat la suite

$$0 \rightarrow \mathcal{A}' \otimes \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{A}'' \otimes \mathcal{K} \rightarrow 0$$

est exacte et formée de faisceaux $f_!$ -mous en vertu de la proposition 1.4. Il résulte alors des propriétés du foncteur $R^i f_!$ que la suite

$$0 \rightarrow f_!(\mathcal{A}' \otimes \mathcal{K}) \rightarrow f_!(\mathcal{A} \otimes \mathcal{K}) \rightarrow f_!(\mathcal{A}'' \otimes \mathcal{K}) \rightarrow 0$$

est exacte.

1.8. Rappelons que le foncteur

$$f_{! \mathcal{K}}^!: Sh(Y) \rightarrow Sh(X)$$

est défini de la façon suivante ([Gr], § 3): pour tout faisceau \mathcal{B} sur Y et pour tout $U \in \text{Ouv}(X)$ on pose

$$f_{! \mathcal{K}}^!(\mathcal{B})(U) = \text{Hom}(f_!(\mathcal{K}_U); \mathcal{B}).$$

Il est évident que le foncteur $f_{! \mathcal{K}}^!$ est exact gauche et qu'il commute aux produits directs.