Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 30 (1984)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: DISTRIBUTION DES VALEURS DE LA FONCTION D'EULER

Autor: Nicolas, Jean-Louis

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-53832

L'Enseignement Mathématique, t. 30 (1984), p. 331-338

DISTRIBUTION DES VALEURS DE LA FONCTION D'EULER

par Jean-Louis Nicolas

ABSTRACT. Let $F(x)$ be the number of integers m such that $\phi(m) \leqslant x$, where ϕ is the Euler function.

An asymptotic formula is given for $F(x)$ with an error term. The method is elementary, and goes through various estimations of sums involving arithmetical functions.

Soit $\phi(n)$ la fonction d'Euler, et soit

$$F(x) = \sum_{\phi(n) \leqslant x} 1 .$$

Il est facile de voir que cette somme est finie (cf. par exemple [Par], ch. 1, ex. 25) et il est connu que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{F(x)}{x} = C = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p(p-1)}\right) = \frac{\zeta(2)\,\zeta(3)}{\zeta(6)},$$

où $\zeta(s) = \sum_{n \geqslant 1} n^{-s}$ est la fonction de Riemann. La première démonstration due à P. Erdös (cf. [Erd]), est basée sur l'existence d'une fonction de distribution pour $n/\phi(n)$. R. E. Dressler a donné (cf. [Dre]) une deuxième démonstration, élémentaire, en approchant $\phi(n)$ par les fonctions

$$\phi_k(n) = n \prod_{\substack{p \mid n \\ p \leqslant p_k}} (1 - 1/p),$$

où p_k désigne le $k^{\text{ième}}$ nombre premier. Enfin P. Bateman (cf. [Bat]), par des méthodes de variables complexes, a fourni des estimations de la forme:

$$F(x) = C\,x + O(x \exp(-c(\log x)^a))$$

pour diverses valeurs de c et de a.

Nous nous proposons de démontrer ici le résultat suivant :

THÉORÈME. *On a :*

$$F(x) = \sum_{\phi(n) \leqslant x} 1 = C\,x + O(x/\log x)\,.$$

Ce résultat est moins fort que celui de Bateman, mais il est obtenu de façon élémentaire. La méthode est assez classique : elle consiste à étudier la somme $L(x) = \sum_{\phi(n) \leqslant x} \log \phi(n)$, et avait été utilisée déjà par Chebyshev dans l'étude de la répartition des nombres premiers (voir aussi [Nic 2]). L'essentiel de la démonstration de notre théorème réside dans la proposition qui compare $L(x)$ à $\sum_{\phi(n) \leqslant x} 1/\phi(n)$.

Nous montrerons également que le terme de reste de notre théorème peut être majoré explicitement. Mais cela ne peut se faire actuellement qu'en utilisant des méthodes non élémentaires. En effet, nous utilisons le théorème des nombres premiers sous la forme :

$$\theta(x) = x + O(x/\log^2 x)$$

où $\theta(x)$ est la première fonction de Chebyshev. Les méthodes élémentaires (cf. [Dia] et [Ste]) permettent d'obtenir un tel reste, mais n'en donnent pas pour le moment une majoration explicite.

Je remercie vivement le referee pour d'utiles remarques, et surtout pour la démonstration du lemme 2 qui fournit un meilleur reste que la démonstration initiale.

LEMME 1. *On a :*

$$S(x) = \sum_{n \leqslant x} \frac{1}{\phi(n)} = C \log x + O(1)\,,$$

avec

$$C = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p(p-1)}\right) = \frac{\zeta(2)\,\zeta(3)}{\zeta(6)}\,.$$

Démonstration. La démonstration du lemme 1 est due semble-t-il à Landau (cf. [Lan]). La méthode est celle utilisée de façon très classique pour évaluer la somme des premières valeurs d'une fonction arithmétique multiplicative (cf. par exemple, [Har, ch. 18]). On écrit ici

$$\frac{1}{\phi(n)} = \frac{1}{n} \sum_{d \mid n} d\, h(d)\,,$$

où h est la fonction multiplicative définie par

$$h(p) = \frac{1}{p(p-1)} \quad \text{et} \quad h(p^\alpha) = 0 \quad \text{pour} \quad \alpha \geqslant 2\,.$$

Une estimation plus précise de $S(x)$, est donnée dans [Sit].

LEMME 2. *On a:*

$$T(x) = \sum_{\phi(n) \leqslant x} \frac{1}{\phi(n)} = C \log x + O(1)\,,$$

où C est défini dans le lemme 1.

Démonstration. D'après le lemme 1, il suffit de prouver

$$T(x) - S(x) = O(1)\,.$$

On observe d'abord que, pour $t \geqslant 2$,

$$\sum_{n \geqslant t} \frac{1}{n^2} \leqslant \sum_{n \geqslant t} \left(\frac{1}{n - 1/2} - \frac{1}{n + 1/2} \right) = \min_{\substack{n \geqslant t \\ n \in \mathbf{N}}} \frac{1}{n - 1/2} \leqslant \frac{1}{t - 1/2} \leqslant \frac{\pi^2}{6t}$$

et que cette inégalité est encore vérifiée pour tout $t > 0$.

On a ensuite:

$$T(x) - S(x) = \sum_{\substack{n \geqslant x \\ \phi(n) \leqslant x}} \frac{1}{\phi(n)} \leqslant \sum_{n \geqslant x} \frac{x}{\phi(n)} \frac{1}{\phi(n)}\,.$$

Soit $g(n)$ la fonction multiplicative définie par:

$$g(p) = \frac{2\,p - 1}{(p-1)^2} \quad \text{et} \quad g(p^\alpha) = 0 \quad \text{pour} \quad \alpha \geqslant 2\,.$$

Nous vérifions que

$$\frac{n^2}{\phi^2(n)} = \sum_{d \mid n} g(d)$$

(les deux membres sont multiplicatifs et la relation est vraie lorsque $n = p^\alpha$). Il s'ensuit que

$$\sum_{n \geqslant x} \frac{1}{\phi^2(n)} = \sum_{n \geqslant x} \frac{1}{n^2} \sum_{d \mid n} g(d) = \sum_{d=1}^{\infty} g(d) \sum_{\substack{n \geqslant x \\ d \mid n}} \frac{1}{n^2}$$

$$= \sum_{d=1}^{\infty} \frac{g(d)}{d^2} \sum_{m \geqslant x/d} \frac{1}{m^2} \leqslant \frac{\pi^2}{6x} \sum_{d=1}^{\infty} \frac{g(d)}{d}$$

$$= \frac{\pi^2}{6x} \prod_p \left(1 + \frac{2p-1}{p(p-1)^2}\right) = O(1/x).$$

La valeur du produit infini ci-dessus est 4,431. On peut donc préciser:

$$0 \leqslant T(x) - S(x) \leqslant \frac{\pi^2}{6} 4{,}431 \leqslant 7{,}3 .$$

LEMME 3. *Soit* $\theta(x) = \sum_{p \leqslant x} \log p$ *la fonction de Chebyshev. On pose* $\theta^*(x) = \sum_{p \leqslant x} \log(p-1)$. *Il existe des constantes* c_1, c_2, c_3, c_4 *telles que pour tout* $x \geqslant 1$, *on ait:*

(i) $$\theta^*(x) \leqslant \theta^*(x+1) \leqslant \theta^*(x) + \log x \leqslant \theta^*(x) + \frac{c_1 x}{\log^2(2+x)},$$

(ii) $$\theta(x) - \frac{c_1 x}{\log^2(2+x)} \leqslant \theta(x) - \log x \leqslant \theta^*(x) \leqslant \theta(x),$$

(iii) $$|\,\theta(x) - x\,| \leqslant c_2 x/\log^2(2+x),$$

(iv) $$\theta(x) \leqslant c_3 x,$$

(v) $$\sum_{k \geqslant 2} \theta((2x)^{1/k}) \leqslant c_4 x/\log^2(2+x).$$

Démonstration. (i) est évident en prenant $c_1 = \max_{x \geqslant 1} x^{-1}(\log x)\log^2(2+x)$.

On prouve (ii) en observant que

$$\theta^*(x) = \theta(x) - \sum_{p \leqslant x} \log\left(\frac{p}{p-1}\right) \geqslant \theta(x) - \sum_{2 \leqslant n \leqslant x} \log \frac{n}{n-1} = \theta(x) - \log[x],$$

où $[x]$ désigne la partie entière de x.

Le théorème des nombres premiers donne (iii). Le calcul de c_2 peut se faire en utilisant le résultat (non élémentaire) de Rosser et Schoenfeld (cf. [Ros] p. 266):

$$x > 1 \Rightarrow |\,\theta(x) - x\,| \leqslant 8{,}7\, x/\log^2 x .$$

Le résultat (iv) est dû à Chebyshev. Hanson a obtenu $c_3 = \log 3$ (cf. [Han]) par une méthode élémentaire. Le meilleur résultat actuel est dû à L. Schoenfeld (cf. [Sch], p. 360) qui donne: $c_3 = 1{,}000081$.

Enfin (v) s'obtient en remarquant que la sommation en k est finie, et a au plus $(\log 2x)/\log 2$ termes: Il vient ensuite

$$\sum_{k\geqslant 2}\theta((2x)^{1/k}) \leqslant \frac{\log 2x}{\log 2}\,\theta(\sqrt{2x}) \leqslant c_3\sqrt{2x}\,\frac{\log 2x}{\log 2} \leqslant c_4\,\frac{x}{\log^2(2+x)},$$

avec
$$c_4 = \frac{2c_3}{\log 2}\max_{x\geqslant 1}\frac{(\log 2x)\left(\log^2(2+x)\right)}{\sqrt{2x}}$$

PROPOSITION 1. *Avec la notation du lemme 2, on a:*

$$L(x) = \sum_{\phi(n)\leqslant x}\log\phi(n) = x\,T(x) + O(x)$$

Démonstration. Par analogie avec la fonction de Von Mangoldt, on définit la fonction arithmétique $\lambda(n)$ par:

$$\begin{aligned} \lambda(p) &= \log(p-1)\,, & & \\ \lambda(p^\alpha) &= \log p\,, & &\text{pour}\quad \alpha\geqslant 2\,, \\ \lambda(n) &= 0\,, & &\text{si}\quad n\neq p^\alpha\,. \end{aligned}$$

Et l'on a

$$\log\phi(n) = \sum_{d\mid n}\lambda(n/d)\,.$$

Il vient alors

$$L(x) = \sum_{\phi(n)\leqslant x}\ \sum_{d\mid n}\lambda(n/d)\,.$$

En observant que $d \mid n \Rightarrow \phi(d) \mid \phi(n)$, on obtient

$$L(x) = \sum_{\phi(d)\leqslant x}\ \sum_{\substack{n\\ \phi(n)\leqslant x\\ d\mid n}}\lambda(n/d)\,.$$

On pose $n = d\,d'$. Notre expression devient

$$L(x) = \sum_{\phi(d)\leqslant x}\ \sum_{\substack{d'\\ \phi(dd')\leqslant x}}\lambda(d') = \sum_{\phi(d)\leqslant x}\ \sum_{i=1}^{4}S_i(d) \tag{1}$$

où $S_i(d) = \displaystyle\sum_{\substack{d'\in E_i\\ \phi(dd')\leqslant x}}\lambda(d')\,.$

E_1 contient les nombres premiers p premiers avec d,

E_2 contient les nombres premiers p divisant d,

E_3 contient les nombres de la forme p^α, $\alpha\geqslant 2$, $(p, d) = 1$,

E_4 contient les nombres de la forme p^α, $\alpha\geqslant 2$, $p\mid d$.

En observant que, si $p \mid d$, $\phi(p^\alpha d) = p^\alpha \phi(d)$ et si $p \nmid d$, $\phi(p^\alpha d) = (p^\alpha - p^{\alpha-1})\, \phi(d)$, on obtient, avec les notations du lemme 3,

$$\theta^*\left(\frac{x}{\phi(d)}\right) \leqslant S_1(d) + S_2(d) \leqslant \theta^*\left(\frac{x}{\phi(d)} + 1\right),$$

$$0 \leqslant S_3(d) + S_4(d) \leqslant \sum_{k \geqslant 2} \theta\big((2\, x/\phi(d))^{1/k}\big);$$

il résulte alors du lemme 3 que

$$\left| \sum_{i=1}^{4} S_i(d) - \frac{x}{\phi(d)} \right| \leqslant (c_1 + c_2 + c_4)\, \frac{x/\phi(d)}{\log^2(2 + x/\phi(d))}.$$

Cette inégalité donne, avec (1),

$$L(x) = x\, T(x) + O\big(x\, R(x)\big), \tag{2}$$

où R est définie par

$$R(x) = \sum_{\phi(d) \leqslant x} \frac{1}{\phi(d) \log^2(2 + x/\phi(d))}.$$

On observe d'abord que $R(x) = O\big(T(x)\big)$, et on en déduit, par (2) et le lemme 2 que $L(x) = O(x \log x)$. Il s'ensuit que

$$F(x) - F(2^-) = \int_{2^-}^{x} \frac{d[L(t)]}{\log t} = \frac{L(x)}{\log x} + \int_{2}^{x} \frac{L(t)\, dt}{t \log^2 t} = O(x). \tag{3}$$

On a alors

$$R(x) = \int_{1^-}^{x} \frac{d[F(t)]}{t \log^2 (2 + x/t)}$$

et, par intégration par partie, on obtient

$$R(x) = \frac{F(x)}{x \log^2 3} + \int_{1}^{x} \frac{F(t)\, \big(\log(2 + x/t) - 2\, x/(2\, t + x)\big)}{t^2 \log^3 (2 + x/t)}\, dt.$$

Le premier terme est $O(1)$. Le terme en $\dfrac{2\,x}{2\,t + x}$ étant borné, l'intégrale, en utilisant (3), est majorée en valeur absolue par $O\big(I(x)\big)$, avec

$$I(x) = \int_{1}^{x} \frac{dt}{t \log^2 (2 + x/t)}.$$

Le changement de variable $u = 2 + x/t$ donne

$$I(x) = \int_3^{2+x} \frac{du}{(u-2)\log^2 u} = O(1)\,.$$

On a donc $R(x) = O(1)$, et en reportant dans (2), on achève la démonstration de la proposition.

La démonstration du théorème découle immédiatement de la proposition et du lemme 2, en remarquant que

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{2^-}^{x} \frac{d[L(t)]}{\log t} + O(1) \\ &= \frac{L(x)}{\log x} + \int_{2^-}^{x} \frac{L(t)\,dt}{t\log^2 t} + O(1)\,. \end{aligned}$$

REFERENCES

[Bat] BATEMAN, P. T. The distribution of values of Euler function. *Acta Arithmetica, XXI* (1972), 329-345.

[Dia] DIAMOND, H. G. Elementary methods in the study of the distribution of prime numbers. *Bull. Amer. Math. Soc., New series, Vol. 7* (1982), 553-589.

[Dre] DRESSLER, R. E. A density which counts multiplicity. *Pacific J. Math. 34* (1970), 371-378.

[Erd] ERDÖS, P. Some remarks on Euler's ϕ-function and some related problems. *Bull. Amer. Math. Soc. 51* (1945), 540-544.

[Han] HANSON, D. On the product of the primes. *Canad. Math. Bull. 15* (1972), 33-37.

[Har] HARDY, G. H. and E. M. WRIGHT. *An introduction to the theory of numbers.* Oxford 1960, 4th edition.

[Lan] LANDAU, E. Über die zahlentheoretische Function $\phi(n)$ und ihre Beziehung zum Goldbachschen Satz. *Göttingen Nachrichten* (1900), 180-184.

[Nic 1] NICOLAS, J. L. Petites valeurs de la fonction d'Euler. *J. of Number Theory. 17* (1983), 375-388.

[Nic 2] —— Sur la distribution des nombres entiers ayant une quantité fixée de facteurs premiers. A paraître, *Acta Arithmetica, vol. 44, n° 3.*

[Par] PARENT, D. P. *Exercices de théorie des nombres.* Gauthier-Villars, Paris 1978.

[Ros] ROSSER, J. B. and L. SCHOENFELD. Sharper bounds for the Chebyshev functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$. *Math. of Comp. 29* (1975), 243-269.

[Sch] SCHOENFELD, L. Sharper bounds for the Chebyshev functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$ II. *Math. of Comp. 30* (1976), 337-360.

[Sit] SITARAMACHANDRARAO, R. Improvement of a theorem of E. Landau. *Abstract A.M.S. vol. 2, n° 7* (1981), 610.

[Ste] DIAMOND, H. G. and J. STEINIG. An elementary proof of the prime number theorem with a remainder term. *Invent. Math. 11* (1970), 199-258.

(Reçu le 24 avril 1984)

Jean-Louis Nicolas

Département de Mathématiques et Informatique
Université de Limoges
123, avenue Albert-Thomas
F-87060 Limoges Cedex

vide-leer-empty

vide-leer-empty