

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 30 (1984)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LE PROBLÈME DE J. MILNOR SUR LE NOMBRE GORDIEN DES NŒUDS ALGÈBRIQUES  
**Autor:** Boileau, Michel / Weber, Claude  
**Kapitel:** §5. Relation entre le nombre gordien et d'autres invariants de la theorie des entrelacs  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-53827>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

dimension 1 d'une surface de Seifert de genre minimal, et de la représentation en tresses fermées positives des entrelacs algébriques.

Pour l'affirmation 2, c'est une conséquence facile de la définition 4 du nombre gordien et du fait que: l'enlacement de deux cercles dans  $S^3$  est égal à l'intersection de deux chaînes qu'ils bordent dans  $D^4$ .

*Application.* Nous verrons au § 6 que la conjecture de Milnor est vraie pour les nœuds du tore de type  $(2, n)$ ,  $(3, 4)$  et  $(3, 5)$ . La proposition précédente entraîne, par exemple, que la conjecture de Milnor est vraie pour l'entrelacs d'A'Campo, dont le nombre gordien est donc  $u = 6$ .

Plus facilement encore, la conjecture de Milnor est vraie pour l'entrelacs de Hopf généralisé  $\Gamma(d, d)$ , associé au point  $d$ -uple ordinaire (cf. § 1). Dans ce cas  $u(\Gamma(d, d)) = \frac{d(d-1)}{2}$ .

## § 5. RELATION ENTRE LE NOMBRE GORDIEN ET D'AUTRES INVARIANTS DE LA THÉORIE DES ENTRELACS

### A. Nombre gordien et genre de Murasugi

Au § 1, nous avons défini le genre  $g$  d'une surface compacte orientable  $G$  comme:  $g(G) = \sum_i g(\overline{G}_i)$ , où les  $\overline{G}_i$  désignent la surface close obtenue en collant un disque de dimension 2 sur chaque composante de  $\partial G_i$ . Le nombre  $g(\overline{G}_i)$  désigne alors le genre usuel. Ceci est la façon traditionnelle de procéder dans ce type de situations et amène aux genres de Seifert et de Murasugi pour les entrelacs dont nous avons parlé au § 2.

*Références classiques:* K. Murasugi [Mu]; A. Tristram [Tri].

Cependant dans le cas des entrelacs à plusieurs composantes, cette définition n'est pas toujours la plus pratique. Par exemple un entrelacs de genre zéro n'est pas nécessairement trivial.

De même, le genre de Murasugi traditionnel des entrelacs se compare mal avec le nombre gordien. C'est pourquoi nous introduisons un nouvel invariant que nous proposons d'appeler le grand genre (car il majore le genre habituel).

Soit donc, à nouveau,  $G$  une surface compacte, orientable.  $G$  n'est pas nécessairement connexe et son bord a, disons,  $r$  composantes connexes.

Désignons par  $P_r$  la surface plane connexe, dont le bord a  $r$  composantes connexes. Il y a une façon essentiellement unique d'identifier le bord de  $G$  et le bord de  $P_r$  pour obtenir une surface close, orientable  $\hat{G}$ . La surface  $\hat{G}$  est

connexe si et seulement si  $G$  n'a pas de composante connexe close. Alors, par définition, le grand genre de  $G$ , noté  $t(G)$  est:  $t(G) = \text{genre usuel de } \hat{G}$ .

*Remarques.* 1) Le grand genre d'un anneau est 1, alors que son genre traditionnel est zéro. Plus généralement  $t(P_r) = r - 1$ .

2) Une surface est de grand genre nul si et seulement si c'est une union disjointe de sphères et de disques.

Le lien entre genre et grand genre est donné par le lemme facile suivant, où  $b_0(G)$  désigne le nombre de composantes connexes de  $G$ .

LEMME.  $t(G) = g(G) + (r - b_0(G))$ .

Le grand genre est un invariant utile dans certaines circonstances. Par exemple, revenons à la situation du § 1 :

Soit  $f: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  une application polynomiale ayant 0 pour singularité isolée. Pour  $t$  non nul, suffisamment petit, considérons  $X = f^{-1}(t) \cap D$ , où  $D$  est une boule de Milnor. Abstraitement  $X$  est la « fibre de Milnor » de l'entrelacs algébrique associé à  $f$ .

LEMME. Le nombre  $\delta$  attaché à la singularité est égal au grand genre de la fibre de Milnor.

La démonstration résulte d'un calcul immédiat sur l'homologie des surfaces en question.

Soit maintenant  $K$  un entrelacs orienté dans  $S^3$ . On peut définir son grand genre de Seifert et son grand genre de Murasugi, en prenant le minimum des grands genres des surfaces de Seifert pour  $K$  (respectivement des surfaces de Murasugi pour  $K$ ).

L'économie de vocabulaire qui résulte de ces définitions nous paraît assez importante. Par exemple un entrelacs est trivial si et seulement si son grand genre de Seifert est nul. Un entrelacs est fortement cobordant à zéro (au sens de A. Tristram ou K. Murasugi) si et seulement si son grand genre de Murasugi est nul.

*Notations:*  $S(K)$  pour le grand genre de Seifert de  $K$ .

$M(K)$  pour le grand genre de Murasugi de  $K$ .

Avec cette notation, la conjecture anonyme du § 2 (voir aussi [Kir, pb. 1.40]) s'énonce: pour tout entrelacs algébrique  $K$ , on a  $M(K) = \delta(K)$ .

Bien sûr, dans le cas des nœuds (entrelacs connexes) il n'y a pas de différence entre genre et grand genre.

La proposition suivante donne un lien entre le grand genre de Murasugi et le nombre gordien.

**PROPOSITION.** *Soit  $K$  un entrelacs non orienté dans  $S^3$  de nombre gordien  $u$ . Alors, quelle que soit l'orientation de  $K$ , on a :  $M(K) \leq u(K)$ .*

*Preuve de la proposition.* Nous allons utiliser la définition 4 du nombre gordien. Par hypothèse, il existe une immersion différentiable

$$G : D_r = \bigsqcup_{i=1}^r D_i^2 \hookrightarrow D^4,$$

propre, telle que  $G^{-1}(S^3) = S_r$  et  $G|_{S_r}$  est une paramétrisation orientée de  $K$ . De plus les seules singularités de  $G$  sont des points doubles génériques en quantité  $u$ . (Nous n'avons pas besoin du comportement de Morse de  $p \circ G$ .)

Plaçons-nous en un point double de  $G$ . Par définition de « générique », il existe une petite boule  $B^4$  au voisinage du point double telle que  $B^4 \cap \text{Im } G$  soit difféomorphe à l'intersection de la boule unité dans  $\mathbf{R}^4$  avec deux plans réels en position générale.

Par conséquent,  $\partial B^4 \cap \text{Im } G$  est un entrelacs de Hopf à deux composantes, orienté. Cet entrelacs borde dans  $\partial B^4$ , de façon orientée, un anneau.

Enlevons de  $\text{Im } G$ , l'intersection  $\mathring{B}^4 \cap \text{Im } G$  et mettons à sa place l'anneau dont nous venons de parler. Effectuons cette opération à chaque point double. Nous obtenons ainsi une surface  $V$  qui est une surface de Murasugi pour  $K$ .

Abstraitement,  $V$  est obtenue à partir de  $D_r$  en enlevant  $2u$  petits disques dans  $\mathring{D}_r$  et en collant  $u$  anneaux. Quelle que soit la façon dont on procède le grand genre de  $V$  est toujours le même et est égal à  $u$ . (Tandis que le genre usuel dépend de la façon dont on procède.)

Pour vérifier ce dernier point, on peut remarquer que  $\hat{V}$  est, par construction, obtenue à partir de  $D_r \cup P_r = S^2$  en recollant  $u$  anneaux orientés.

Ceci achève la démonstration de la proposition.

Nous insérons maintenant une petite parenthèse. En prenant un peu de soin en recollant l'anneau, on peut s'arranger pour que la surface  $V$  que l'on obtient soit « ribbon », c'est-à-dire telle que  $p|_V \rightarrow \mathbf{R}_+$  ne possède pas de minimum local.

Si on désigne alors par  $M'(K)$  le grand genre de Murasugi pour les surfaces qui sont « ribbon », on a donc en fait :  $M'(K) \leq u(K)$ .

D'autre part, l'interprétation de  $\delta$  en termes de points doubles proches que nous avons donnée au § 4 montre que pour un entrelacs algébrique, on a aussi :  $M'(K) \leq \delta(K)$ . Voir [Ru].



Malheureusement il est très difficile d'utiliser cette information supplémentaire de façon pertinente. Peut-être un lecteur avisé le pourra-t-il? Nous achevons là la parenthèse.

Pour comparer le nombre gordien avec le genre de Murasugi traditionnel, on peut utiliser le lemme du début du paragraphe. Cependant, il y a en principe une ambiguïté, car on ignore a priori le nombre de composantes connexes de la surface  $V$  que l'on a construite. Il y a toutefois un cas où l'on peut s'en tirer facilement :

Soit  $K$  un entrelacs à  $r$  composantes. Associons à  $K$  un graphe  $\Gamma(K)$  de la façon suivante :

- i) Les sommets de  $\Gamma(K)$  sont en bijection avec les composantes de  $K$ .
- ii) Une arête relie le sommet  $K_i$  au sommet  $K_j$ ,  $i \neq j$ , si et seulement si  $\mathcal{L}(K_i, K_j) \neq 0$ .

Il est clair que, si  $\Gamma(K)$  est connexe, la surface  $V$  de Murasugi associée à une immersion de dénouement  $G$ , comme dans la preuve de la proposition précédente, est toujours connexe. (On utilise le principe du calcul des enlacements dans  $S^3$  par des intersections dans  $D^4$ ). Par conséquent :

**PROPOSITION.** *Soit  $K$  un entrelacs à  $r$  composantes, tel que  $\Gamma(K)$  soit connexe. Alors, quelle que soit l'orientation de  $K$  :  $m(K) + (r-1) \leq u(K)$ .*

Rappelons que pour un entrelacs algébrique, le coefficient d'enlacement entre deux composantes n'est jamais nul. De sorte que la proposition précédente s'applique aux entrelacs algébriques.

#### B. *La conjecture de Thom implique la conjecture de Milnor.*

**THÉORÈME (classique).** *Si la conjecture de Thom est vraie, alors la conjecture de Milnor est vraie.*

*Preuve.* Nous venons de montrer que l'on a toujours :  $M(K) \leq u(K)$ .

Le théorème de Pinkham dit que, pour un entrelacs algébrique :  $u(K) \leq \delta(K)$ .

Finalement, la conjecture de Thom implique que, pour les entrelacs algébriques :  $M(K) = \delta(K)$ . D'où le résultat.

#### C. *Nombre gordien et homotopies d'entrelacs.*

Pour ce qui nous concerne, nous prendrons pour définition d'une homotopie entre deux entrelacs ce qui suit.

Soient  $K$  et  $L$  deux entrelacs non orientés dans  $S^3$ . On dira que  $K$  et  $L$  sont homotopes si on peut passer de  $K$  à  $L$  en effectuant sur  $K$  un nombre fini d'échanges élémentaires de telle façon que, lors de chaque échange, les deux brins appartiennent à la même composante.

Il n'est pas difficile de voir que cette définition est équivalente à la définition traditionnelle. Mais il est clair qu'elle se prête mieux à l'étude du nombre gordien.

*Références* (pour la définition traditionnelle): J. Hillman [Hi]; J. Milnor [Mi<sub>3</sub>].

Un entrelacs est, par définition, homotopiquement trivial, s'il est homotope à un entrelacs trivial.

L'exemple standard d'un entrelacs non trivial et pourtant homotopiquement trivial est l'entrelacs de J. H. C. Whitehead (Fig. 3).

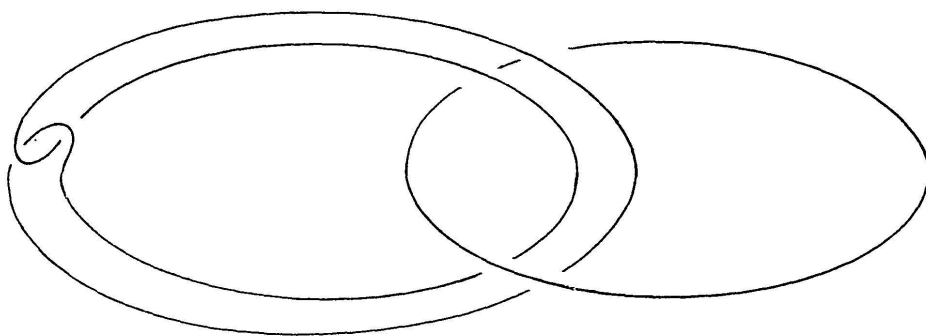


FIGURE 3

Ceci suggère la définition suivante (F. Michel):

Soit  $L$  un entrelacs non orienté dans  $S^3$ . Le nombre gordien homotopique de  $L$  est le nombre minimum d'échanges élémentaires simultanés qu'il faut effectuer pour transformer  $L$  en un entrelacs homotopiquement trivial. On exige que lors de chaque échange, les deux brins appartiennent à deux composantes distinctes.

Nous noterons le nombre gordien homotopique de  $K$  (homotopy unknotting number of  $K$ ) par  $hu(K)$ .

La proposition suivante n'est pas difficile.

**PROPOSITION.** Soit  $K$  un entrelacs non orienté à  $r$  branches:  $K_1, K_2, \dots, K_r$ . Alors:

$$a) hu(K) \geq \sum_{1 \leq i < j \leq r} |\mathcal{L}(K_i, K_j)|.$$

$$b) u(K) \geq hu(K) + \sum_{i=1}^r u(K_i).$$

*Notes.* 1) L'entrelacs de Whitehead montre que l'inégalité  $b$  peut très bien être stricte.

2) Cette proposition est une version un peu plus forte de l'affirmation 2 que nous avons utilisée au § 4.

*Preuve de la proposition.* Pour a), c'est encore une fois une conséquence du principe que « l'enlacement sur le bord est égal à l'intersection à l'intérieur ».

Pour b), nous utilisons le fait que l'on peut effectuer les échanges élémentaires à l'instant où l'on veut. Voir [BW].

Soit donc  $G: D_r \hookrightarrow S^3 \times \mathbf{R}_+$  une immersion selon la définition 4. Nous pouvons supposer :

- i)  $\frac{1}{2} \in \mathbf{R}_+$  n'est l'image par  $p$  d'aucun point double.
- ii) si  $Q$  est un point double de l'immersion  $G$  tel que  $p(Q) < \frac{1}{2}$ , alors  $Q$  est un point d'intersection entre deux disques différents, tandis que
- iii) si  $Q$  est un point double tel que  $p(Q) > \frac{1}{2}$ , alors  $Q$  est un point double faisant intervenir deux points d'un même disque.

Alors  $p^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \subset S^3 \times \left\{\frac{1}{2}\right\}$  est un entrelacs homotopiquement trivial, et la conclusion suit immédiatement.

L'étude du gordien homotopique semble une question intéressante. Voici quelques premiers jalons.

1. Soit  $K$  un entrelacs à deux composantes  $K_1$  et  $K_2$ . Alors  $hu(K) = |\mathcal{L}(K_1, K_2)|$ .

Cette égalité est une petite généralisation d'un théorème de J. Milnor, qui affirme qu'un entrelacs à deux composantes et de coefficient d'enlacement nul est homotopiquement trivial. Il est facile de s'y ramener, ou de la démontrer directement.

*Référence:* J. Milnor [Mi<sub>3</sub>].

2. Pour les entrelacs avec  $r \geq 3$  composantes, on peut très bien avoir une inégalité stricte:  $hu(K) > \sum_{i < j} |\mathcal{L}(K_i, K_j)|$ .

Par exemple, l'entrelacs des Borromées est tel que  $\mathcal{L}(K_i, K_j) = 0$  si  $i \neq j$ , et pourtant il n'est pas homotopiquement trivial. (Pour les Borromées  $u = hu = 2$ ).

3. Milnor montre que l'entrelacs des Borromées n'est pas homotopiquement trivial en utilisant son invariant  $\mu$ . (Ce n'est pas celui des singularités, mais celui qui est défini dans  $[Mi_3]$  et dans  $[Mi_4]$ ).

*Question.* Y a-t-il une connection entre les invariants que Milnor introduit dans les articles en question et le gordien homotopique des entrelacs?

#### D. Genre de Murasugi et signature.

Le genre de Murasugi est un invariant très difficile à calculer. En fait il y a peu de nœuds ou entrelacs pour lesquels on connaisse sa valeur exacte. Dans ce contexte, la signature donne une minoration utile, car calculable en principe. Hélas, cette minoration n'est en général pas décisive.

Nous rappelons maintenant de quoi il s'agit, en signalant au lecteur que nous reviendrons plus en détails sur cette question au § 6 dans le cadre des signatures de J. Levine et A. Tristram.

*Références:* K. Murasugi [Mu]; L. Kauffman et L. Taylor [KT].

Soit  $K$  un entrelacs orienté dans  $S^3$  et soit  $V$  une surface de Murasugi de  $K$ .

Considérons le revêtement à 2 feuilles  $Y_V$  de  $D^4$ , ramifié sur  $V$ .  $Y_V$  est une variété de dimension 4, compacte, connexe, orientée (par la projection sur  $D^4$ ). Elle a un bord qui est le revêtement à 2 feuilles de  $S^3$ , ramifié sur  $K$ .

On considère alors la forme d'intersection sur  $H_2(Y_V; \mathbf{Q})$ . Cette forme est  $\mathbf{Q}$ -bilinéaire, symétrique. Elle peut très bien être dégénérée, car  $\partial Y$  est non vide. Elle a néanmoins une signature.

On montre (cf. Kauffman-Taylor [KT]) que cette signature ne dépend que de  $K$  et pas du choix de la surface de Murasugi  $V$ . Notons la  $\sigma(K)$ .

Il y a plusieurs façons de calculer explicitement  $\sigma(K)$ . Pour la théorie générale, voir Gordon-Litherland [GoL]. Rappelons en particulier que si  $A$  est la forme de Seifert associée à une surface de Seifert  $U$  de  $K$ , alors  $(A + A^\#) \otimes \mathbf{Q}$  est la forme d'intersection de  $Y_U$ . ( $A^\#$  désigne la transposée de  $A$ ).

On a alors le théorème suivant, dû à K. Murasugi [Mu]. Pour une démonstration plus moderne voir Kauffman-Taylor [KT]. Voir aussi le théorème 2 du § 6.

**THÉORÈME.** Soit  $K$  un entrelacs orienté à  $r$  composantes dans  $S^3$ . Alors:  $|\sigma(K)| \leq 2m(K) + r - \text{nul}(K)$ .

Ici,  $\text{nul}(K)$  désigne la « nullité de Murasugi » de  $K$  par opposition à la nullité d'Alexander, qui est un concept différent; voir le livre de J. Hillman [Hi].

Rappelons que par définition  $\text{nul}(K) = 1 + q_1$ , où  $q_1$  est le premier nombre de Betti rationnel du revêtement à 2 feuilles de  $S^3$  ramifié sur  $K$ .

On a les renseignements suivants sur la nullité:

PROPOSITION. Soit  $K$  un entrelacs orienté à  $r$  composantes dans  $S^3$ . Alors:

- a)  $\text{nul}(K) \leq r$
- b) si  $A$  est la forme de Seifert associée à une surface de Seifert  $U$  de  $K$ :  
 $\text{nul}(K) = \dim_{\mathbf{Q}}(\text{radical de } (A + A^{\#}) \otimes \mathbf{Q}) + b_0(U)$ , où  $b_0(U)$  désigne le nombre de composantes connexes de  $U$ .

COROLLAIRE. Pour un nœud ( $r=1$ ),  $|\sigma(K)| \leq 2m(K)$ .

*Application de la formule de Murasugi.*

Il y a une formule qui donne la signature des entrelacs du tore (cf. § 6). Cette formule et la formule de Murasugi, appliquées aux entrelacs algébriques  $K$  associés aux singularités  $X^a - Y^b = 0$ , montrent que l'on a  $M(K) = \delta(K)$  lorsque:

- i)  $(a, b) = (2, n)$ ,  $n \geq 1$  (résultat connu de Murasugi [Mu]);
- ii)  $(a, b) = (3, 3)$  ou  $(3, 4)$  ou  $(3, 5)$  ou  $(3, 6)$  ou  $(4, 4)$ .

Ce sont les seuls entrelacs algébriques pour lesquels la conjecture anonyme est connue. Par conséquent la conjecture de Milnor est vraie pour ces entrelacs algébriques.

Rappelons finalement que la signature croît très lentement par satellisation, de sorte que les formules précédentes donnent de mauvaises minoration pour les branches à plusieurs paires de Puiseux.

Référence: Y. Shinohara [Shi].

E. *Nombre gordien et revêtements cycliques infinis.*

Pour un entrelacs orienté  $K$ , on a:  $M(K) \leq u(K)$  et  $M(K) \leq S(K)$ . Il est donc assez naturel de se demander s'il existe une relation entre le nombre gordien  $K$  et le grand genre de Seifert de  $K$ .

Au vu des exemples que nous présentons dans la partie  $F$  de ce paragraphe, nous pensons qu'il n'y en a pas, même pour les entrelacs fibrés.

Tout d'abord on a les théorèmes suivants:

THÉORÈME (H. Kondo). Soit  $P(t)$  un polynôme à coefficients entiers, de degré  $2h$ , tel que  $P(1) = \pm 1$  et  $P(t) = t^{2h}P(t^{-1})$ . Alors il existe un nœud  $K$ , de nombre gordien 1, de genre de Seifert  $h$ , ayant  $P(t)$  pour polynôme d'Alexander.

Référence : H. Kondo [Ko].

THÉORÈME (T. C. V. Quach). Soit  $P(t)$  un polynôme comme dans le théorème précédent et tel que, en plus,  $P(0) = \pm 1$ . Alors il existe un nœud fibré satisfaisant les mêmes conditions que celles du théorème précédent.

Référence : T. C. V. Quach [Qa].

Note. Ces théorèmes montrent que la situation est plus complexe que le problème 1.4 de la liste de R. Kirby [Ki] ne laisse supposer.

Nous donnerons dans la partie F des exemples de nœuds rationnels fibrés de gordien 1 et de genre arbitraire (voir aussi Y. Nakanishi [Na]).

Hélas il est plus difficile de trouver des nœuds de petit genre et de grand nombre gordien, car on tombe à nouveau sur le problème de la minoration du nombre gordien.

Dans cette direction, la meilleure minoration connue est toujours celle de H. Wendt que nous allons décrire maintenant d'une façon un peu différente de la sienne. Cette minoration se généralise facilement aux cas des entrelacs. Pour cela nous avons besoin de rappeler quelques notions classiques.

Si  $K$  est un entrelacs orienté à  $r$  composantes dans  $S^3$ , il existe un homomorphisme surjectif unique  $l: \pi_1(S^3 - K) \rightarrow \mathbf{Z}$ , qui envoie chaque méridien orienté de  $K$  sur 1. (Un méridien  $m_i$  de  $K$  est orienté par  $\mathcal{L}(m_i, K_j) = \delta_{ij}$  où les  $K_j$  sont les composantes de  $K$ ).

Désignons par  $E(K)$  l'espace total du revêtement cyclique infini du complément de  $K$  dans  $S^3$ , associé au noyau de  $l$ . On peut identifier le groupe de Galois du revêtement avec le groupe cyclique infini  $T$ , noté multiplicativement  $T = \{t^i\}_{i \in \mathbf{Z}}$ .

Le groupe d'homologie  $H_1(E(K); \mathbf{Z})$  est de façon naturelle un module sur le groupe de Galois, donc un  $\mathbf{Z}T$ -module.

THÉORÈME. Soit  $K$  un entrelacs orienté à  $r$  composantes dans  $S^3$ , et de nombre gordien  $u$ . Alors le  $\mathbf{Z}T$ -module  $H_1(E(K); \mathbf{Z})$  peut être engendré par  $u + r - 1$  éléments.

Note. Dans le cas d'un nœud ( $r = 1$ ),  $H_1(E(K); \mathbf{Z})$  est le module d'Alexander de  $K$ , et ce théorème est alors implicite dans l'article de H. Wendt et également

chez D. Rolfsen. D'ailleurs, dans ce cas là, il a été remarqué par beaucoup de monde, par exemple par Y. Nakanishi.

*Références:* H. Wendt [We]; D. Rolfsen [Ro<sub>1</sub>], [Ro<sub>2</sub>]; Y. Nakanishi [Na].

Désignons par  $e(K)$  le nombre minimum de générateurs du  $\mathbf{ZT}$ -module  $H_1(E(K); \mathbf{Z})$ . Nous avons donc :

COROLLAIRE 1.  $e(K) \leq u(K) + r - 1$ .

Nous appellerons cette inégalité, l'inégalité de Wendt. (Rappelons que  $e(K)$  dépend de l'orientation de  $K$ , tandis que  $u(K)$  en est indépendant).

COROLLAIRE 2. *Le module d'Alexander d'un nœud ( $r=1$ ) de nombre gordien 1 est monogène.*

*Commentaires.* 1) On voit que la question de l'étude algébrique du module d'Alexander des nœuds (et plus généralement des modules  $H_1(E(K); \mathbf{Z})$  dans le cas des entrelacs) a un certain intérêt en ce qui concerne le nombre gordien. Toute méthode permettant d'évaluer  $e(K)$  sera la bienvenue. La théorie des idéaux élémentaires permet de trouver certaines minoration.

2) Une méthode classique, due originellement à H. Seifert, permet de trouver une présentation du module d'Alexander à partir d'une matrice de Seifert du nœud. Un petit examen de cette méthode (cf. par exemple [Sei]) montre que  $e(K) \leq 2s(K)$ , lorsque  $K$  est un nœud. Par conséquent, la minoration de Wendt ne peut dépasser deux fois le genre de Seifert dans le cas d'un nœud.

*Preuve du théorème.* Nous allons en donner une basée sur la notion de description chirurgicale d'un entrelacs, due à D. Rolfsen [Ro<sub>1</sub>]. De fait, dans le cas des nœuds ( $r=1$ ), la démonstration qui suit est implicite dans l'article de Rolfsen [Ro<sub>2</sub>].

Reprenons la définition 1 du nombre gordien. (La définition 2 ferait aussi l'affaire).

$K$  est un entrelacs orienté à  $r$  composantes. Considérons une bonne projection de  $K$  et un processus de dénouement de  $K$ , basé sur cette projection. Envisageons un point double de la projection, qui va changer de signe au cours du processus. Sans tenir compte des signes, la projection est localement :



FIGURE 4

Les orientations des brins proviennent de l'orientation de l'entrelacs.

Considérons le segment de droite dessiné en pointillé sur la figure de droite. « Au-dessus » de ce segment se trouve un plan dans  $\mathbf{R}^3$ . Il est facile de dessiner un disque  $\Delta$  dans ce plan, ayant la propriété que  $\Delta \cap K = \dot{\Delta} \cap K$  consiste en exactement deux points, chacun d'eux étant donné par l'intersection d'un des deux brins avec  $\Delta$ .

*Illustration :*

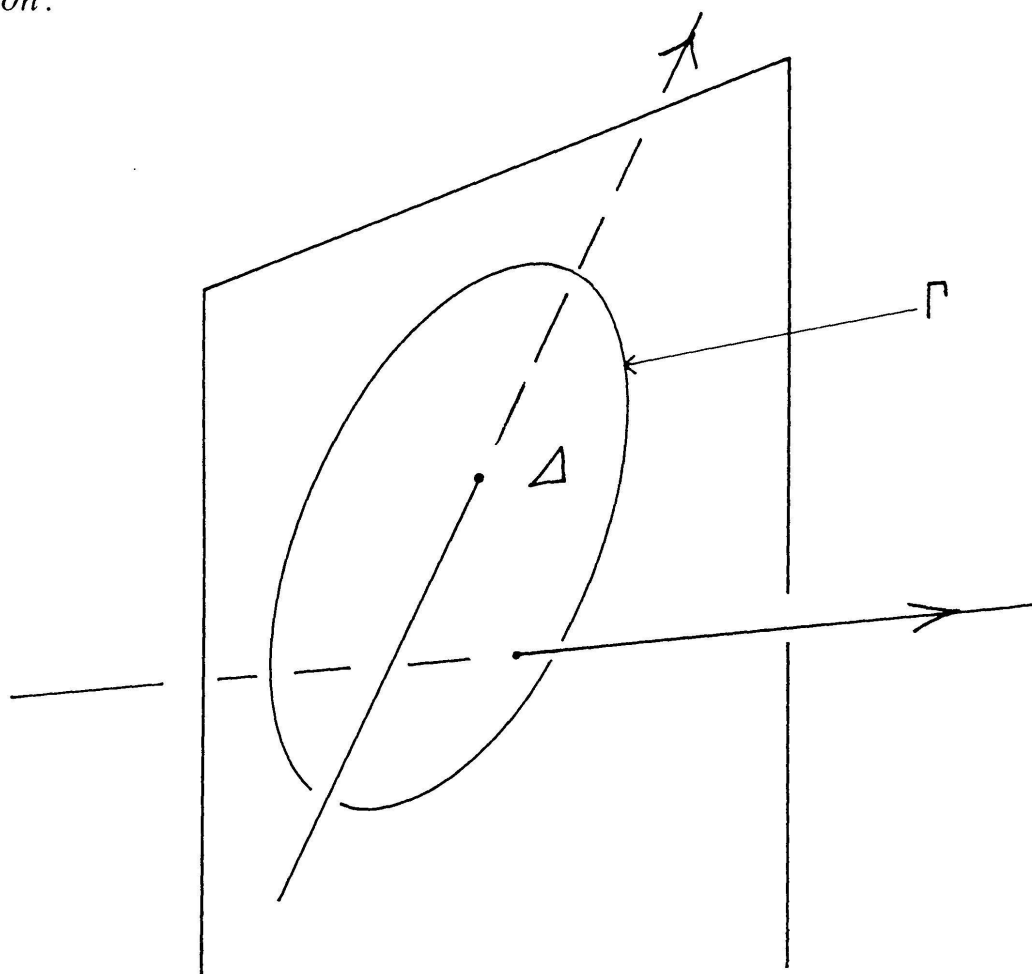


FIGURE 5



Soit  $\Gamma = \partial\Delta$ .  $\Gamma$  est un cercle non noué dans  $S^3$ , ne rencontrant pas  $K$ , et le nombre d'enlacement de  $\Gamma$  avec  $K$  est nul (grâce à la position choisie du plan par rapport aux brins orientés).

Soit  $N$  un voisinage tubulaire de  $\Gamma$  dans  $S^3$ , suffisamment petit pour ne pas rencontrer  $K$ .  $N$  est un tore plein et comme  $\Gamma$  est non noué,  $S^3 - \mathring{N}$  est aussi un tore plein  $W$ . Un disque méridien de  $W$  est précisément le disque  $\Delta$ , un peu rétréci.

Effectuons un twist de Dehn  $\tau$  dans  $W$ , concentré au voisinage de  $\Delta$ . Pour cela, choisissons un petit voisinage  $\Delta \times [-1, +1]$  de  $\Delta$  dans  $W$ . (Nous choisissons une identification). Alors, par définition  $\tau(x, t) = (e^{i(t+1)\pi} \cdot x, t)$ , avec  $(x, t) \in \Delta \times [-1, 1]$ ,  $\Delta$  étant identifié au disque unité dans  $\mathbb{C}$ . Le twist  $\tau$  se prolonge par l'identité en un automorphisme de  $W$ , mais, attention, il ne se prolonge pas en un automorphisme de  $S^3$ .

Comme  $K$  est dans  $\mathring{W}$ , on peut considérer  $\tau(K)$ . Alors, à isotopie près,  $\tau(K)$  aura même projection que  $K$ . Tous les points doubles auront même signe, sauf celui que nous considérons, qui, lui, a changé de signe.

*Précaution:* Cette dernière affirmation dépend de la façon dont on identifie  $\Delta \times [-1, 1]$  à un voisinage de  $\Delta$  dans  $W$ . Ce qui compte est la normale au plan qui contient  $\Delta$ , qu'il faut orienter convenablement. Sur l'illustration précédente, l'orientation de la normale part de l'œil du spectateur pour traverser  $\Delta$ .

Supposons maintenant que le processus de dénouement associé à la bonne projection, que nous avons choisie pour  $K$ , fasse intervenir  $u$  changements de signes aux points doubles.

Nous choisissons  $u$  petits tores pleins  $N_1, \dots, N_u$  selon la méthode que nous venons d'indiquer. La composition des twists  $\tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_u$ , où  $\tau_i$  est le twist

sur  $W_i$ , est bien définie sur  $Y = \bigcap_{i=1}^u W_i = S^3 - \bigcup_{i=1}^u N_i$ ; notons la  $\tau$ . L'ordre

de la composition importe peu car les supports des  $\tau_i$  sont disjoints. Posons

$$N = \bigcup_{i=1}^u N_i.$$

Par définition d'un processus de dénouement,  $\tau: Y \rightarrow Y$  est un difféomorphisme qui envoie  $K$  sur l'entrelacs trivial  $T_r$  dans  $S^3$ .

D'autre part,  $Y - K = S^3 - (N \cup K)$  est difféomorphe par  $\tau$  à  $\tau(Y) - \tau(K) = S^3 - (N \cup T_r)$ .

On passe de  $S^3 - (N \cup K)$  à  $S^3 - K$  en ajoutant des 2-cellules et des 3-cellules. (On remplit les tores pleins  $N_1, \dots, N_u$ ).

Si  $p: E(K) \rightarrow S^3 - K$  est la projection du revêtement infini cyclique, associé à l'homomorphisme d'enlacement total  $l$ , posons:  $Z = p^{-1}(S^3 - (N \cup K)) = p^{-1}(Y - K)$ .

On passe de  $Z$  à  $E(K)$  en ajoutant des 2-cellules et des 3-cellules car la restriction  $p|: p^{-1}(N) \rightarrow N$  est un revêtement trivial (produit), puisque le nombre d'enlacement de chaque tore plein  $N_i$  avec  $K$  est nul. Donc le nombre de générateurs du  $\mathbf{Z}T$ -module  $H_1(Z; \mathbf{Z})$  majore celui de  $H_1(E(K); \mathbf{Z})$ . Nous allons estimer le nombre de générateurs du  $\mathbf{Z}T$ -module  $H_1(Z; \mathbf{Z})$ .

Pour cela observons que le revêtement cyclique infini,  $E(T_r)$  associé à l'homomorphisme d'enlacement total, de l'entrelacs trivial  $T_r$ , est difféomorphe à la somme connexe d'un nombre infini de copies de l'intérieur d'un corps avec  $(r-1)$  anses. Chaque copie est indexée par un élément de  $\mathbf{Z}$ , et le générateur du groupe de Galois  $T$  est la transformation qui envoie la copie d'indice  $i$  sur celle d'indice  $i+1$ . En particulier, en tant que  $\mathbf{Z}T$ -module,  $H_1(E(T_r); \mathbf{Z})$  est de rang  $r-1$ .

Soit  $q: E(T_r) \rightarrow S^3 - \tau(K)$  la projection de revêtement et soit

$$Z' = q^{-1}(S^3 - (N \cup \tau(K))) = q^{-1}(\tau(Y - K)).$$

Pour un pull-back de  $\tau$ ,  $Z = p^{-1}(Y - K)$  et  $Z' = q^{-1}(\tau(Y - K))$  sont Galois-équivalents. Les  $\mathbf{Z}T$ -modules  $H_1(Z; \mathbf{Z})$  et  $H_1(Z'; \mathbf{Z})$  sont donc isomorphes.

Il est facile de voir que  $H_1(Z'; \mathbf{Z})$  est engendré par  $u + r - 1$  éléments comme module sur  $\mathbf{Z}T$ , car  $Z' = E(T_r) - q^{-1}(N)$ , où  $H_1(E(T_r); \mathbf{Z})$  est de rang  $r-1$  en tant que  $\mathbf{Z}T$ -module, et la restriction  $q|: q^{-1}(N) \rightarrow N$  est un revêtement trivial de « groupe de Galois »  $T$ , puisque le nombre d'enlacement de chaque tore plein  $N_i$  avec  $\tau(K) = T_r$  est nul.

*Remarque.* Nous n'avons utilisé que la partie la plus facile de la méthode de D. Rolfsen. Dans le cas des nœuds ( $r=1$ ), en poussant l'analyse plus loin il montre comment on peut, en principe, trouver une présentation du module d'Alexander.

En fait, les énoncés de H. Wendt portent sur l'homologie des revêtements ramifiés cycliques finis, plutôt que sur celle des revêtements cycliques infinis. Nous allons nous y ramener par une méthode dont le principe était déjà connu de H. Seifert dans le cas des nœuds.

*Notations.* Soit  $K$  un entrelacs orienté à  $r$  composantes dans  $S^3$ . Nous désignerons par  $E_n(K)$  l'espace total du revêtement cyclique à  $n$  feuilles de  $S^3$ , ramifié sur  $K$ . Rappelons que, si  $r \geq 2$ , le type topologique de  $E_n(K)$  dépend de l'orientation de  $K$  (dès que  $n \geq 3$ ).

Le groupe d'homologie  $H_1(E_n(K); \mathbf{Z})$  est un module sur  $\mathbf{Z}T$ . M. Sakuma [Sak] a démontré le théorème suivant, bien connu dans le cas des nœuds ( $r = 1$ , cf. [Gor]).

THÉORÈME.  $H_1(E_n(K); \mathbf{Z})$  est isomorphe comme  $\mathbf{Z}T$ -module à

$$\text{Coker} \{1 + t + \dots + t^{n-1} : H_1(E(K); \mathbf{Z}) \rightarrow H_1(E(K); \mathbf{Z})\}.$$

Références: M. Sakuma [Sak].

Nous obtenons alors l'énoncé traditionnel du théorème de H. Wendt, où  $e_n(K)$  désigne le nombre minimum de générateurs du groupe abélien

$$H_1(E(K_n); \mathbf{Z}).$$

THÉORÈME (H. Wendt). Soit  $K$  un entrelacs orienté à  $r$  composantes dans  $S^3$ . Alors:  $e_n(K) \leq (n-1)(u(K) + r - 1)$ .

COROLLAIRE.  $e_2(K) \leq u(K) + r - 1$ .

Commentaires.

1) Souvenons-nous que, pour un nœud  $K(r = 1)$ ,  $e_2(K) \leq 2s(K)$ .

La méthode de Wendt permet de trouver (ce qu'il a fait, cf. [We]) des nœuds de nombre gordien  $u(K) \geq 2s(K)$ . Nous en donnons des exemples dans la partie G de ce paragraphe. Bien que les candidats abondent, il semble bien que pour l'instant, il n'existe aucun nœud pour lequel on sache montrer que  $u(K) > 2s(K)$ .

2) Les majorations plus fines de  $e_n(K)$ , obtenues par S. Kinoshita dans le cas des nœuds, montrent que le théorème de Wendt fournit souvent une minoration très faible du nombre gordien  $u(K)$ .

Références: S. Kinoshita [Kin<sub>1</sub>], [Kin<sub>2</sub>].

F. Exemples: nombre gordien et grand genre de Seifert d'un entrelacs.

Considérons les entrelacs algébriques ou, plus généralement les tresses positives fermées orientées, munies de l'orientation naturelle. Ces entrelacs sont tous fibrés. Nous avons vu au § 4 que leur grand genre de Seifert est supérieur ou égal au nombre gordien. Cette remarque a conduit A. Durfee à poser la question suivante: « a-t-on  $u(K) \leq s(K)$  pour tout nœud fibré  $K$ ? »

Le but des exemples que nous présentons ici est de donner une réponse négative à la première question de A. Durfee. En fait, nous conjecturons qu'en général il n'y a aucun rapport entre ces deux invariants, et qu'étant donnés

deux entiers positifs  $u$  et  $s$  arbitraires ( $s \geq 2$ ), il existe un nœud fibré de nombre gordien  $u$  et de genre  $s$ .

Par exemple, il est facile de construire des nœuds fibrés de gordien 1 et de genre de Seifert  $s$  arbitrairement grand (cf. [Na]): il suffit de considérer le nœud à 2 ponts associé au plombage de  $2s$  bandes paires, suivant:

$$\overset{2}{\bullet} \text{---} \overset{2}{\bullet} \dots \overset{2}{\bullet} \text{---} \overset{-2}{\bullet} \text{---} \overset{-2}{\bullet} \dots \text{---} \overset{-2}{\bullet}.$$

(Voir aussi les nœuds construits par T. C. V. Quach [Qa]).

Par contre nous ne connaissons aucun exemple de nœuds (fibrés ou non) de genre 1 et de gordien arbitrairement grand. Les candidats ne manquent pas (cf. § 7, B-5); manquent les invariants pour minorer le nombre gordien.

Voici des exemples qui répondent négativement à la question de A. Durfee:

Soit l'entrelacs de bretzel  $K_n = K(-1, 3, \dots, 3)$ , qui est le bord de la surface constituée de deux disques reliés par  $(n+1)$  bandes tordues, et orienté comme sur la figure 6.

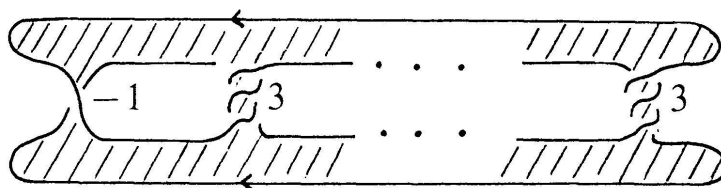


FIGURE 6

Cet entrelacs fibre pour l'orientation donnée, et la surface fibre  $F_n$  est la surface plate hachurée, car cet entrelacs orienté s'obtient à partir de l'entrelacs fibré torique  $(2, n+1)$  par  $n$  twists de Stallings [ $St_2$ ] (cf. T. C. V. Quach [Qa]; voir aussi T. Kanenobu [Ka] pour une preuve algébrique).

On a  $S(K_n) = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ , et une application immédiate de l'inégalité de Wendt montre que  $u(K_n) \geq n - 2$ . Pour des détails, voir [BW].

*Commentaires.* 1) Dans le cas où  $n$  est pair,  $n = 2p$ ,  $K_{2p}$  est un nœud fibré. Alors  $S(K_{2p}) = s(K_{2p}) = p$  et  $u(K_{2p}) \geq 2p - 1$ . Ceci donne une réponse négative à la première question de Durfee dès que  $p \geq 2$ .

2) Dans le cas où  $n$  est impair,  $n = 2p + 1$ ,  $K_{2p+1}$  est un entrelacs orienté à 2 composantes, et pour l'orientation donnée  $S(K_{2p+1}) = p + 1$ . En utilisant le § 5-c, on montre que  $u(K_{2p+1}) = 3p + 1$ .

### G. Les exemples de H. Wendt.

L'idée de comparer le nombre gordien d'un nœud avec son genre de Seifert est déjà dans l'article original de H. Wendt [We]. En fait Wendt avait exhibé des nœuds  $K$  (non fibrés!) de genre de Seifert  $s(K)$  et de gordien  $u(K) \geq 2s(K)$  (par exemple le nœud  $9_{35}$  dans la tabulation de Reidemester [Re]).

Nous donnons ici une généralisation des exemples de Wendt. Notons  $K_{2q+1}$ ,  $q \geq 1$ , le nœud de bretzel  $K(3, 3, \dots, 3)$ , qui est le bord de la surface constituée de deux disques reliés par  $2q + 1$  bandes tordues, et qui est représenté sur la figure 7.

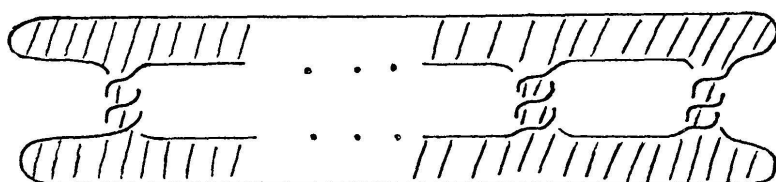


FIGURE 7

D'après T. Kanenobu [Ka] (voir aussi [Qa]), ce nœud n'est jamais fibré. On a :  $u(K_{2q+1}) \geq 2q = 2s(K_{2q+1})$ .

## § 6. SIGNATURES

Historiquement, à notre connaissance, deux voies ont été suivies par les topologues pour essayer de démontrer la conjecture de Thom.

La première consiste à utiliser ce que nous avons expliqué aux § 1 et 2 : minorer le mieux possible le genre de Murasugi des entrelacs de Hopf généralisés. Nous avons vu au § 5 que la signature de l'entrelacs donne une première minoration. Une difficulté de cette approche est que la signature dépend en principe aussi bien de  $d$  que de  $r$ . L'introduction des signatures « tordues » et le théorème 3 ci-après, dus à A. Tristram, permettent d'obtenir des minoration qui ne dépendent que de  $d$ .

*Référence* : A. Tristram [Tri].

Ces signatures ont aussi été introduites par J. Levine dans le cas des nœuds, à la fin de son article sur le cobordisme, dans un but différent de celui de Tristram.