Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 30 (1984)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LE PROBLÈME DE J. MILNOR SUR LE NOMBRE GORDIEN DES NŒUDS ALGÉBRIQUES

Autor: Boileau, Michel / Weber, Claude

Kapitel: §4. Le problème de Milnor

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-53827

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 24.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

§ 4. Le problème de Milnor

Dans son livre sur les singularités [Mi_1, p. 92] J. Milnor pose la question suivante (voir aussi [Kir, pb. 1.14]):

Soit $f : (\mathbf{C}^2, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ une fonction polynomiale ayant une singularité isolée en 0. Soit K le nœud algébrique associé au polynôme f et soit δ le nombre associé à la singularité qui intervient dans la formule de Riemann-Roch (cf. § 1). Est-ce que $\delta = u(K)$?

La « conjecture de Milnor » affirme que oui. Nous verrons dans ce paragraphe que δ et $u(K)$ ont tous deux une interprétation en termes de points doubles, ce qui rend la conjecture très plausible.

Il est connu (mais pas évident) que $u(K) \leqslant \delta$. La première démonstration de cette inégalité est due à H. Pinkham, et L. Rudolph en a donné une autre. Nous présentons ici une preuve très élémentaire de cette inégalité. Elle est le résultat de discussions passionnantes que nous avons eues avec D. Bennequin, et nous le remercions de son aide.

Références: H. Pinkham [Pi]; L. Rudolph [Ru].

Finalement nous achèverons ce paragraphe en observant que si la conjecture de Milnor est vraie pour les singularités à une branche, alors elle est toujours vraie. Nous remercions F. Michel pour d'utiles conversations sur cette question.

Interprétation du nombre δ en termes de points doubles proches.

Dans [A], N. A'Campo démontre que la fonction f possède une déformation analytique réelle f_τ, telle que, pour $\tau \neq 0$, $f_\tau^{-1}(0)$ possède δ points doubles ordinaires (« nodes »). En fait A'Campo démontre bien plus: les nodes sont tous réels.

Interprétons ce résultat. Soit D_ε^4 une boule de Milnor pour $f = f_0$. Pour τ suffisamment petit, ∂D_ε sera aussi transverse à $f_\tau^{-1}(0)$ et l'entrelacs K_τ déterminé par l'intersection $\partial D_\varepsilon \cap f_\tau^{-1}(0)$ dans ∂D_ε sera équivalent (différentiablement et de façon orientée) à K. Pour le vérifier, on observe que « être transverse » est une condition ouverte, puis on applique le théorème d'extension des isotopies.

Du point de vue différentiable, le morceau de courbe algébrique $f_\tau^{-1}(0) \cap D_\varepsilon$ est l'image d'une immersion de $D_r = \coprod_{i=1}^{r} D_i^2$ avec δ points doubles génériques. De plus ce nombre de points doubles est, en un certain sens, rigide. De façon plus précise: si pour une certaine déformation f_s de $f = f_0$, dès que s est

suffisamment proche de 0, $f_s^{-1}(0)$ est l'image d'une immersion de D_r avec des points doubles génériques pour seules singularités, alors ce nombre de points doubles est nécessairement égal à δ.

Pour démontrer ces dernières affirmations, on répète l'argument de Milnor que nous avons rappelé à la fin du § 1 : on homogénise f et on regarde la courbe projective plane correspondante. On applique le théorème de Riemann-Roch à cette courbe et à celle correspondant à une petite déformation. Un calcul facile des genres donne la solution.

D'autre part, souvenons-nous que la définition 4 donne aussi une interprétation du nombre gordien en termes de nombre minimum de points doubles d'une immersion différentiable de $D_r = \coprod_{i=1}^{r} D_i^2$ dans D^4.

La différence entre les deux concepts vient de ce que les deux types d'immersions considérées ont des propriétés supplémentaires qui sont différentes dans les deux cas. En effet :

a) Dans le cas du nombre gordien, l'immersion est (seulement) différentiable. Mais elle se comporte très bien quand on la compose avec la projection sur $\mathbf{R}_+$: elle est de Morse avec le minimum de points critiques compatibles avec la topologie de D_r.

b) En ce qui concerne $f_\tau^{-1}(0)$, τ petit, $\tau \neq 0$, l'immersion est $\mathbf{C}$-analytique. (C'est beaucoup plus fort que différentiable!) Mais elle se comporte moins bien quand on projette sur $\mathbf{R}_+$: l'application est génériquement de Morse et n'a pas de minimum.

Références : L. Rudolph [Ru] ; J. Milnor [Mi_2].

Le mot « ribbon » est souvent employé dans ce dernier contexte. Voir l'article de L. Rudolph [Ru] cité ci-dessus.

En résumé : Interprétés comme nous venons de la faire, δ et $u(K)$ ont indéniablement une certaine ressemblance. Il est tentant d'essayer d'utiliser cette ressemblance dans les deux interprétations pour montrer qu'ils sont égaux.

Nous allons maintenant démontrer que, pour un entrelacs algébrique K : $u(K) \leqslant \delta$. (C'est le théorème de H. Pinkham.) En fait cette inégalité sera une conséquence d'une proposition plus générale sur les tresses fermées.

Soit donc B_n le groupe des tresses à n brins, de générateurs canoniques $\{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{n-1}\}$. Soit β un mot en les σ_i. Nous désignons par :

b la longueur du mot.

$\hat{\beta}$ la tresse fermée associée à β.

r le nombre de composantes de l'entrelacs $\hat{\beta}$.

Référence générale sur les tresses: J. Birman [Bi].

PROPOSITION. $u(\hat{\beta}) \leqslant \frac{1}{2}(b-n+r)$.

Commentaire. Cette majoration n'est pas extraordinaire en principe. Par exemple, si $n = r$, elle affirme seulement que $u(\hat{\beta}) \leqslant \frac{1}{2} b$, et b n'est rien d'autre que le nombre de croisements de $\hat{\beta}$. Un argument analogue à celui donné dans la preuve du lemme du § 3 donne immédiatement la démonstration dans ce cas. La majoration est un peu meilleure quand r est petit par rapport à n.

Nous indiquons maintenant comment le théorème de Pinkham se déduit de la proposition. Nous allons le faire en plusieurs étapes.

a) Il est bien connu qu'un entrelacs algébrique K est équivalent à une tresse fermée $\hat{\beta}$, où β est une tresse positive. Par là on entend que β peut se représenter en un mot en les σ_i, où tous les exposants sont égaux à $+1$. Remarquons qu'il s'agit d'une équivalence entre entrelacs orientés: K est orienté comme nous l'avons indiqué au § 1 et $\hat{\beta}$ est muni de l'orientation naturelle des tresses fermées. Ceci est une conséquence du théorème de préparation de Weierstrass.

b) Une tresse positive est, en particulier, une tresse homogène au sens de J. Stallings [St_2]. Dans l'article en question Stallings démontre, généralisant un concept dû à K. Murasugi, que $\hat{\beta}$ est un entrelacs fibré, et que la fibre est la surface de Seifert U donnée par la construction de Seifert, effectuée sur la présentation $\hat{\beta}$.

c) Un calcul élémentaire donne alors pour la caractéristique d'Euler de

$$U : \chi(U) = b_0(U) - b_1(U) = n - b\,,$$

où b_i désigne le i-ème nombre de Betti. Or, $b_0(U) = 1$ puisqu'on a un entrelacs fibré, et $b_1(U) = \mu$. D'où $\mu = b - n + 1$. D'autre part, la formule de Milnor, $2\delta = \mu + r - 1$, donne $2\delta = b - n + 1 + r - 1 = b - n + r$.

Remarque. Si on veut démontrer la conjecture de Milnor par des voies « purement topologiques » par exemple en utilisant essentiellement la théorie des nœuds et entrelacs, il est difficile de tenir compte assez exactement de l'hypothèse que l'on part d'un entrelacs algébrique, car les entrelacs algébriques

constituent une classe assez particulière d'entrelacs toriques itérés. C'est pourquoi, si on travaille selon ces lignes, il est naturel de généraliser la conjecture de Milnor en:

Conjecture. (cf. [Ru]). Soit β une tresse positive. Alors $u(\hat{\beta}) = \frac{1}{2}(b-n+r)$.

La preuve de la proposition sera faite en plusieurs pas.

1er pas. En supprimant $(n-r)$ croisements, on transforme $\hat{\beta}$ en un entrelacs à n composantes. Plus précisément, en supprimant $(n-r)$ lettres du mot β, convenablement choisies, on obtient un mot γ tel que $\hat{\gamma}$ soit un entrelacs à n composantes. Bien sûr la longueur de γ est $b-(n-r)$.

2e pas. Numérotons les brins de β (et de γ) de droite à gauche: $1, 2, ..., n$. Désignons par γ_i la composante de $\hat{\gamma}$ qui correspond au i-ème brin.

A chaque point d'intersection de la projection de γ_i avec la projection de $\gamma_j (i<j)$ attribuons le signe $+$ si γ_i passe dessus γ_j et le signe $-$ sinon. Soit $N(\gamma_i, \gamma_j)$ la somme des signes ainsi obtenus. Finalement,

$$a_i = \sum_{j \geqslant i+1} N(\gamma_i, \gamma_j)$$

Nous allons transformer la tresse γ en une tresse λ en changeant les signes de certains croisements, de façon à ce que $\hat{\lambda}$ soit l'entrelacs trivial à n composantes. Nous allons le faire de façon économique.

Soient $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les n composantes de $\hat{\lambda}$. Si $a_1 \geqslant 0$, décidons que λ_1 sera au-dessus de toutes les autres composantes $\lambda_2, ..., \lambda_n$. Par contre, si $a_1 < 0$, décidons que λ_1 sera au-dessous de toutes les autres composantes. De même, si $a_2 \geqslant 0$, décidons que λ_2 sera au-dessus de $\lambda_3, \lambda_4, ..., \lambda_n$; sinon décidons qu'elle sera au-dessous. Par récurrence, si $a_i \geqslant 0$, décidons que λ_i sera au-dessus de $\lambda_{i+1}, ..., \lambda_n$; sinon décidons qu'elle sera au-dessous.

En vertu de la définition des $N(\gamma_i, \gamma_j)$, toute cette opération pourra se faire en effectuant au plus $\frac{1}{2}(b-(n-r))$ changements de signes aux croisements.

3e pas. Rétablissons les $(n-r)$ croisements que nous avions supprimés dans le 1er pas. Nous obtenons une tresse ε. Nous affirmons que $\hat{\varepsilon}$ est un entrelacs trivial à r composantes. Bien évidemment ceci achèvera la preuve de la proposition.

Tout d'abord, il est clair que le nombre de composantes de $\hat{\varepsilon}$ est r, car $\hat{\beta}$ et $\hat{\varepsilon}$ ont même projection (sans les signes).

Pour voir que $\hat{\varepsilon}$ est trivial, revenons à $\hat{\lambda}$. Par construction, chaque composante λ_i est dans un plan horizontal. Si $i \neq j$, le plan contenant λ_i est distinct du plan contenant λ_j. Toujours par construction, le plan horizontal contenant λ_1 est soit au-dessus soit au-dessous de tous les autres.

Considérons alors la permutation w de $\{1, 2, ..., n\}$ associée à la tresse ε. Si w laisse fixe 1, la composante λ_1 se retrouve inchangée dans $\hat{\varepsilon}$. Il est clair qu'elle est non nouée et non enlacée avec les autres composantes de $\hat{\varepsilon}$, car on peut l'isotoper en un tout petit cercle dans son plan horizontal sans rencontrer d'obstacle, car le plan horizontal contenant λ_1 est extrémal.

Si la permutation w ne laisse pas fixe 1, il y a un croisement et un seul qui relie λ_1 à une autre composante de $\hat{\lambda}$, disons $\lambda_k (k \neq 1)$. On peut considérer ce croisement comme le bord d'une mini bande verticale (effectuant un demi-tour) et reliant le plan horizontal contenant λ_k à celui contenant λ_1.

Comme le plan horizontal contenant λ_1 est extrémal, on peut isotoper la boucle correspondant à λ_1 dans ce plan jusqu'à ce qu'on arrive aux extrémités de la bande verticale, ceci sans rencontrer d'obstacles. Ensuite on isotope les côtés de la boucle verticale jusqu'à ce qu'on se trouve dans le plan horizontal contenant λ_k.

Un facile raisonnement par récurrence (sur le nombre de brins) achève alors la démonstration.

Remarque. Notons $\pi(\hat{\beta})$ la projection associée à la présentation en tresse fermée $\hat{\beta}$. La démonstration de la proposition 1 donne aussi une minoration du nombre gordien de la projection $\pi(\hat{\beta})$. Elle montre en effet que:

$$u(\pi(\hat{\beta})) \geqslant \frac{1}{2}(|c| - n + r),$$

où c désigne la longueur algébrique de la tresse β (c'est la somme exponentielle du mot β).

Pour vérifier cela, remarquons tout d'abord que d'après la démonstration précédente: $u(\pi(\hat{\beta})) = \inf\{u(\hat{\gamma})$; où γ décrit tous les mots possibles, obtenus à partir du mot β en supprimant $(n-r)$ lettres pour que $\hat{\gamma}$ ait n composantes$\}$.

Par construction, la longueur algébrique c' d'une telle tresse γ vérifie: $|c'| \geqslant |c| - (n-r)$.

D'autre part, d'après l'affirmation 2 de la seconde proposition de ce même paragraphe, $u(\hat{\gamma}) \geqslant |\sum_{i<j} \mathscr{L}(\gamma_i, \gamma_j)|$, où $\mathscr{L}(\gamma_i, \gamma_j)$ désigne le coefficient d'enlacement de la composante γ_i de $\hat{\gamma}$ avec la composante γ_j de $\hat{\gamma}$.

La minoration annoncée découle alors de l'égalité : $|\sum_{i<j} \mathscr{L}(\gamma_i, \gamma_j)| = \frac{1}{2}|c'|$. Cette égalité se vérifie aisément pour toutes les tresses pures, en utilisant le disque bordé par chaque composante γ_i et donné par la présentation en tresse fermée de $\hat{\gamma}$.

Nous conseillons au lecteur d'illustrer la preuve ci-dessus par quelques exemples de son choix ; voir aussi [BW].

Nous montrons maintenant qu'il suffit de démontrer la conjecture de Milnor dans le cas des entrelacs algébriques à une branche.

PROPOSITION. *Soit L un entrelacs algébriques à r branches :*

$$L_1, L_2, ..., L_r .$$

Si la conjecture de Milnor est vraie pour chacune des branches, alors elle est vraie pour L.

Preuve de la proposition. Remarquons que, grâce au théorème de Pinkham, la conjecture de Milnor est équivalente à $\delta \leqslant u(L)$. (Les notations sont celles du début du paragraphe.)

La proposition découle immédiatement des deux affirmations ci-dessous.

Affirmation 1. Soit δ_i, l'invariant « δ » pour la i-ème branche. Soit $\mathscr{L}(L_i, L_j)$, le coefficient d'enlacement de L_i avec $L_j (i \neq j)$. On a :

$$\delta = \sum_{i=1}^{r} \delta_i + \sum_{i<j} \mathscr{L}(L_i, L_j)$$

Rappelons que pour un entrelacs algébrique, $\mathscr{L}(L_i, L_j) > 0$.

Affirmation 2. Soit K un entrelacs quelconque à r composantes : $K_1, ..., K_r$. On a :

$$u(K) \geqslant \sum_{i=1}^{r} u(K_i) + \sum_{i<j} |\mathscr{L}(K_i, K_j)| .$$

Donnons quelques indications sur la démonstration de ces deux affirmations.

Pour l'affirmation 1, la formule est donnée par Milnor dans son livre [Mi_1, p. 93]. Elle résulte d'un calcul classique en géométrie algébrique, à partir de la définition de δ que nous avons donnée en utilisant la clôture intégrale de l'anneau local.

Pour un topologue, c'est une conséquence facile de la formule de Milnor $2\delta = \mu + r - 1$, de l'interprétation de μ comme le rang de l'homologie en

dimension 1 d'une surface de Seifert de genre minimal, et de la représentation en tresses fermées positives des entrelacs algébriques.

Pour l'affirmation 2, c'est une conséquence facile de la définition 4 du nombre gordien et du fait que: l'enlacement de deux cercles dans S^3 est égal à l'intersection de deux chaînes qu'ils bordent dans D^4.

Application. Nous verrons au § 6 que la conjecture de Milnor est vraie pour les nœuds du tore de type $(2, n)$, $(3, 4)$ et $(3, 5)$. La proposition précédente entraîne, par exemple, que la conjecture de Milnor est vraie pour l'entrelacs d'A'Campo, dont le nombre gordien est donc $u = 6$.

Plus facilement encore, la conjecture de Milnor est vraie pour l'entrelacs de Hopf généralisé $\Gamma(d, d)$, associé au point d-uple ordinaire (cf. § 1). Dans ce cas $u(\Gamma(d, d)) = \dfrac{d(d-1)}{2}$.

§ 5. Relation entre le nombre gordien et d'autres invariants de la théorie des entrelacs

A. *Nombre gordien et genre de Murasugi*

Au § 1, nous avons défini le genre g d'une surface compacte orientable G comme: $g(G) = \sum_i g(\overline{G_i})$, où les $\overline{G_i}$ désignent la surface close obtenue en collant un disque de dimension 2 sur chaque composante de ∂G_i. Le nombre $g(\overline{G_i})$ désigne alors le genre usuel. Ceci est la façon traditionnelle de procéder dans ce type de situations et amène aux genres de Seifert et de Murasugi pour les entrelacs dont nous avons parlé au § 2.

Références classiques: K. Murasugi [Mu]; A. Tristam [Tri].

Cependant dans le cas des entrelacs à plusieurs composantes, cette définition n'est pas toujours la plus pratique. Par exemple un entrelacs de genre zéro n'est pas nécessairement trivial.

De même, le genre de Murasugi traditionnel des entrelacs se compare mal avec le nombre gordien. C'est pourquoi nous introduisons un nouvel invariant que nous proposons d'appeler le grand genre (car il majore le genre habituel).

Soit donc, à nouveau, G une surface compacte, orientable. G n'est pas nécessairement connexe et son bord a, disons, r composantes connexes.

Désignons par P_r la surface plane connexe, dont le bord a r composantes connexes. Il y a une façon essentiellement unique d'identifier le bord de G et le bord de P_r pour obtenir une surface close, orientable $\hat{G}$. La surface $\hat{G}$ est