

# §4. Appendix

Objektyp: **Appendix**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **30 (1984)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## § 4. APPENDIX

$R = R_{(0)} \oplus R_{(1)} \oplus \dots$  is a graded  $k$ -algebra with  $R_{(0)} = k$ . Let  $\mathfrak{m}$  be the maximal ideal  $\sum_{i=1}^{\infty} R_{(i)}$ . We assume that  $\hat{R}$  is a power series ring in finitely many variables. Obviously  $\hat{\mathfrak{m}}$  corresponds to the unique maximal ideal of the power series ring, whence  $\hat{R}/\hat{\mathfrak{m}}^d$  is always finite dimensional. Since  $\hat{\mathfrak{m}}^d$  is homogeneous, some tail  $\prod_{i=2}^{\infty} R_{(i)}$  must then lie in  $\hat{\mathfrak{m}}^d$ . It follows that the graded algebra of  $R$  for the  $\mathfrak{m}$ -adic filtration is isomorphic to the graded algebra of  $\hat{R}$  for the  $\hat{\mathfrak{m}}$ -adic filtration. The power series assumption implies that the latter is simply a polynomial ring with the standard grading.

Clearly  $\mathfrak{m}^2 \subset \sum_{j=2}^{\infty} R_{(j)}$ . Hence  $R_{(1)}$  injects into  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ . Choose a basis for  $R_{(1)}$  over  $k$  and extend it to a list of homogeneous elements  $x_1, \dots, x_n$  in  $\mathfrak{m}$  whose images constitute a basis for  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ . It is generally true for any commutative  $k$ -algebra  $R$  that when  $R/\mathfrak{m} = k$  and when the associated graded ring for the  $\mathfrak{m}$ -adic filtration is the symmetric algebra on  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ , that any basis for  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$  pulls back to a set of algebraically independent elements in  $R$ . In particular,  $x_1, \dots, x_n$  are algebraically independent.

We use the given grading on  $R$  to prove that  $R = k[x_1, \dots, x_n]$ . Vacuously,  $R_{(0)} \subset k[x_1, \dots, x_n]$ . We have chosen the  $x_i$  so that  $R_{(1)}$  lies in their span, so  $R_{(1)} \subset k[x_1, \dots, x_n]$ . Assume, inductively, that  $d \geq 1$  and  $R_{(s)} \subset k[x_1, \dots, x_n]$  for all  $s \leq d$ . If  $y \in R_{(d+1)}$  then

$$y = \sum \lambda_i x_i + \sum u_j v_j$$

for some  $\lambda_i \in k$  and  $u_j, v_j \in \mathfrak{m}$ . Without loss of generality  $u_j$  and  $v_j$  are homogeneous and all the  $x_i$  and  $u_j v_j$  which appear in the formula lie in

$\bigcup_{t=1}^{d+1} R_{(t)}$ . This can only happen when  $u_j$  and  $v_j$  are in  $R_{(s)}$  for some  $s \leq d$ .

By induction,  $u_j$  and  $v_j$  are elements of  $k[x_1, \dots, x_n]$ . Therefore  $y \in k[x_1, \dots, x_n]$ .

## § 5. WEYL GROUPS

It seems to be part of the folklore for Lie theory that the converse of Theorem 8 fails to be true (cf. [4] VI§ 3 Ex. 2). Rather than being dead-ends, these examples serve as inspiration: the machinery of root systems will allow us to determine the correct necessary and sufficient conditions