Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 30 (1984)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: GROUPE DE BRAUER DES CORPS DE FRACTIONS RATIONNELLES À COEFFICIENTS COMPLEXES

Autor: Steiner, Philippe A. J.

Kapitel: Introduction

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-53824

L'Enseignement Mathématique, t. 30 (1984), p. 115-140

GROUPE DE BRAUER DES CORPS DE FRACTIONS RATIONNELLES À COEFFICIENTS COMPLEXES

par Philippe A. J. Steiner

Introduction

Le but de cet article est de calculer le groupe de Brauer des corps de fractions rationnelles à coefficients complexes $\mathbf{C}(t_1, ..., t_n)$. Dès que n est supérieur ou égal à 2, ce groupe est non nul et il se décompose en une somme directe non dénombrable de groupes $\chi(K)$ associés à des corps de fonctions complexes K. Plus précisément, on a une formule de récurrence

$$\mathrm{Br}(\mathbf{C}(t_1, ..., t_n)) \simeq \mathrm{Br}(\mathbf{C}(t_1, ..., t_{n-1})) \oplus \{\oplus_f \chi(K_f)\},$$

où f parcourt l'ensemble des polynômes unitaires irréductibles à coefficients dans $\mathbf{C}(t_1, ..., t_{n-1})$ et où K_f est l'extension de $\mathbf{C}(t_1, ..., t_{n-1})$ obtenue en adjoignant une racine de f.

Chaque groupe $\chi(K)$ est calculé à l'aide d'un modèle géométrique de K, c'est-à-dire à l'aide d'une variété algébrique lisse X ayant K pour corps des fonctions. On obtient la suite exacte

$$0 \to H^1(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to \chi(K) \to \mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \xrightarrow{c} H^2(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}),$$

qui exprime $\chi(K)$ en terme du groupe $\mathrm{Div}(X)$ des diviseurs de X et de la cohomologie $H^i(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ de X muni de la topologie transcendante et où l'homomorphisme c est induit par la première classe de Chern.

On montrera ensuite comment (une fois un modèle X de K fixé) on peut construire des algèbres simples centrales sur $\mathbf{C}(t_1, ..., t_n)$ à partir d'éléments de $\mathrm{Div}(X)$ et de $H^1(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, puis qu'il existe un modèle X pour lequel $H^1(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ est divisible. Soit X_f un tel modèle de K_f et notons $\mathrm{Div}_0(X_f)$ son groupe des diviseurs dont la première classe de Chern est nulle. On obtient une formule

$$\mathrm{Br}(\mathbf{C}(t_1, ..., t_n)) \simeq \oplus_f\{H^1(X_f, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \oplus \mathrm{Div}_0(X_f) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}\},$$

où f parcourt l'ensemble des polynômes unitaires irréductibles à coefficients dans $\mathbf{C}(t_1, ..., t_i)$ pour $1 \leqslant i < n$. On établit enfin que $\mathrm{Br}(\mathbf{C}(t_1, ..., t_n))$ est divisible et que, pour $n \geqslant 2$, sa classe d'isomorphie est indépendante de n.

Les deux premiers paragraphes sont consacrés aux rappels du théorème d'Auslander-Brumer-Faddeev (qui fournit la décomposition de $\mathrm{Br}(\mathbf{C}(t_1, ..., t_n))$ en somme directe) et de la normalisation en géométrie algébrique. Dans les paragraphes 3 et 4, on dérive la suite exacte qui détermine le groupe $\chi(K)$. On en tire au paragraphe 5 un procédé pour construire « explicitement » des algèbres simples, puis on termine en établissant au paragraphe 6 la formule finale pour $\mathrm{Br}(\mathbf{C}(t_1, ..., t_n))$ et en montrant que ce groupe est divisible.

Je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont aidé à accomplir ce travail, notamment M. Kervaire qui m'en a suggéré le thème.

§ 1. Théorème d'Auslander-Brumer-Faddeev

Ce théorème calcule la structure du groupe de Brauer d'un corps de fractions rationnelles à une variable sur un corps quelconque. En se restreignant à la caractéristique zéro pour simplifier, on va rappeler (d'après [7]) comment il découle d'un résultat classique de Tsen.

Si K est un corps, on notera $K^{\bullet}$ son groupe multiplicatif, $\mathscr{P}(K)$ l'ensemble des polynômes en T unitaires irréductibles à coefficients dans K et si $f \in \mathscr{P}(K)$, K_f sera l'extension $K[T]/(f(T))$ de K. Si $\bar{K}$ est une clôture algébrique de K, on considérera le groupe $\chi_{\bar{K}}(K)$ des homomorphismes $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ d'ordre fini (le groupe des homomorphismes continus pour les topologies discrète de $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ et naturelle de $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$). Comme $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ est abélien, si $\tilde{K}$ est une autre clôture algébrique de K, $\chi_{\bar{K}}(K)$ est canoniquement isomorphe à $\chi_{\tilde{K}}(K)$ et sera noté simplement $\chi(K)$.

Théorème 1.1 (Auslander-Brumer [1], Faddeev [6]). *Soit K un corps de caractéristique zéro. On a un isomorphisme naturel*

$$\mathrm{Br}(K(t)) = \mathrm{Br}(K) \oplus \{\oplus_{f \in \mathscr{P}(K)} \chi(K_f)\}.$$

Démonstration. Tout repose sur l'interprétation du groupe de Brauer comme groupe de cohomologie galoisienne. Pour cette interprétation, ainsi que pour la notion de produit croisé, on pourra se reporter à [14].

1) *Construction de l'isomorphisme:* Fixons une clôture algébrique $\bar{K}$ de K. Par le théorème de Tsen [14, Chap. 19, § 4], $\mathrm{Br}(\bar{K}(t)) = 0$ et donc