

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 30 (1984)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** TRANSFORMÉES DE LAPLACE DES MICROSOLUTIONS DE SYSTÈMES HOLONOMES  
**Autor:** Pham, F.  
**Kapitel:** 3. Appendice sur le cas réel: solutions microfonctions de Sato  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-53821>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

régions de Stokes, admettent des prolongements analytiques au-dessus de tout  $B$ , avec contrôle uniforme en  $x$  du comportement asymptotique en  $\tau$  (ce qui permet de repasser aux  $\psi(x, t)$  par « Laplace inverse »). L'article [11] de Malgrange me semble contenir tout ce qu'il faut pour faire ce travail (on y étudie, au voisinage de  $\tau = \infty$ , le système différentiel en  $(x, \tau)$  « transformée de Laplace » du système microdifférentiel considéré).

## 2.6. QU'EST-CE QU'UN « POINT TOURNANT » ?

Nous avons appelé « points de bifurcation » les projections des points singuliers de  $\mathcal{S}$  (relativement au feuilletage vertical). Certains points singuliers sont d'un type trivial, et ne donnent pas lieu à des singularités des développements asymptotiques: ce sont les points où le système  $\mathcal{M}$  est localement somme directe de systèmes du type 2.3 (par exemple les points où 2 nappes lisses de  $\mathcal{S}$  se coupent transversalement).

Il me semble conforme à l'usage des physiciens d'appeler « points tournants » les points de bifurcation qui sont projections de points singuliers *non triviaux* de  $\mathcal{S}$ .

Notons que la trivialité d'un point singulier ne dépend pas seulement de la géométrie de  $\mathcal{S}$ ; par exemple, en un point où deux nappes lisses de  $\mathcal{S}$  ont un contact quadratique en codimension 1, il existe deux types de systèmes holonomes simples aux points génériques; celui de ces deux types qui n'est pas trivial est connu des physiciens sous le nom d'« intersection effective de deux singularités de Landau » (cf. [8] et [15] pour une étude mathématique de cet exemple).

## 3. APPENDICE SUR LE CAS RÉEL: SOLUTIONS MICROFONCTIONS DE SATO

Considérant  $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}$  comme le complexifié de  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ , nous nous proposons d'étudier les solutions de notre système microdifférentiel *dans le faisceau*  $\mathcal{C}_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}}$  *des microfonctions de Sato*. Rappelons [17] que  $\mathcal{C}_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}}$  est un faisceau sur le fibré  $S^*(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R})$  des directions de demi-droites cotangentes à  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ , et que le support du faisceau des solutions dans  $\mathcal{C}_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}}$  est inclus dans la variété caractéristique réelle du système (considérée comme sous-ensemble de  $S^*(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R})$ ). Avec notre hypothèse non caractéristique, ce support est donc *propre à fibres finies* au-dessus de  $\mathbf{R}^n$ , de sorte que les solutions dans  $\mathcal{C}_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}}$  s'identifient aux solutions dans  $\mathcal{C}_{\bar{\omega}} = (\mathcal{C}_{\bar{\omega}}^+, \mathcal{C}_{\bar{\omega}}^-)$ , faisceau des *familles analytiques en*  $x \in \mathbf{R}^n$  *de microfonctions d'une variable réelle*  $t$  (cf. par exemple [14], Microlocalisation, §2).

Rappelons la définition de  $\mathcal{C}_{\bar{\omega}}^+$  (celle de  $\mathcal{C}_{\bar{\omega}}^-$  est analogue): c'est le faisceau sur  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$  dont les sections sur un ouvert  $U$  sont définies comme limites inductives

$$\mathcal{C}_{\bar{\omega}}^+(U) = \lim_{\rightarrow \Omega^+} \mathcal{O}(\Omega^+) / \mathcal{O}(\Omega^+) \cap \mathcal{A}(U),$$

où  $\mathcal{A}(U)$  désigne l'espace des fonctions analytiques réelles sur  $U$ , et  $\Omega^+$  parcourt la famille des « demi-voisinages imaginaires positifs » de  $U$  dans  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{C}$ , c'est-à-dire:

$$\Omega^+ = \Omega \cap \mathbf{C}^+, \quad \mathbf{C}^+ = \{t \in \mathbf{C} \mid \text{Im } t > 0\},$$

$\Omega$  voisinage de  $U$  dans  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{C}$  contenant  $U$  comme sous-ensemble fermé.

Il résulte facilement de notre étude 2.2 que les solutions dans  $\mathcal{C}_{\bar{\omega}}^+$  se prolongent dans le domaine complexe, en microsolutions du type 2.2. Pour éviter toute ambiguïté dans les prolongements analytiques, il sera commode de considérer que les coupures 2.4 ont été choisies dans la direction *imaginaire négative* du plan des  $t$  (au lieu de la direction réelle positive), de sorte que la transformation de Laplace  $\mathcal{L}$  de 2.5 deviendra une « transformation de Fourier » au sens de ([13], n° 1.2).

Il est alors clair qu'une microsolution  $\varphi \in \text{sol}^D((B \times D)')$  provient d'une solution dans  $\mathcal{C}_{\bar{\omega}}^+$  si et seulement si les spécialisées  $\text{sp}_S(\varphi)$  sont nulles pour tout  $S \in \mathcal{S}' \cap ((B \cap \mathbf{R}^n) \times D)$  dont la composante  $t$  est de partie imaginaire positive.

*Conclusion.* L'espace des solutions dans  $\mathcal{C}_{\bar{\omega}}^+$  s'identifie au sous-espace vectoriel de  $\text{sol}^D((B \times D)')$  défini par les équations  $\text{sp}_\lambda(\varphi) = 0$ , où l'indice  $\lambda$  numérote les composantes connexes de  $\mathcal{S}' \cap ((B \cap \mathbf{R}^n) \times D^+)$ , avec  $D^+ = D \cap \mathbf{C}^+$  (cf. 2.4 pour la définition de  $\mathcal{S}'$ ).

### Exemples

i)  $\mathcal{M}$  = système de Gauss-Manin de la catastrophe « pli » (exemple iii) du §0).

$\mathcal{S}$  est la « parabole semi-cubique »  $t^2 - x^3 = 0$ , et  $\mathcal{S}' \cap (\mathbf{R} \times \mathbf{C}^+)$  a une seule composante connexe  $\{(t, x) \mid x < 0, t = i |x|^{3/2}\}$ . L'espace des solutions microfonctions de Sato est donc donné par 1 équation dans l'espace à 2 dimensions des microsolutions. Il est donc à 1 dimension.

ii)  $\mathcal{M}$  = système de Gauss-Manin de la catastrophe « fonce » (déploiement universel de la fonction  $t = z^4$ )

$\mathcal{S}$  est la complexifiée de la « queue d'aronde » de  $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$ . La courbe de bifurcation dans  $\mathbf{R}^2$  a deux composantes dont l'une est la « caustique »  $x_2^2 - x_1^3 = 0$ , l'autre étant le « lieu de Maxwell »  $x_2 = 0$ . Au-dessus de l'in-

térieur de la caustique (zone hachurée (1) sur la figure 6) les trois nappes de  $\mathcal{S}$  sont réelles, alors qu'au-dessus de la zone non hachurée deux de ces nappes deviennent imaginaires conjuguées, en s'échangeant entre elles à la traversée du lieu de Maxwell

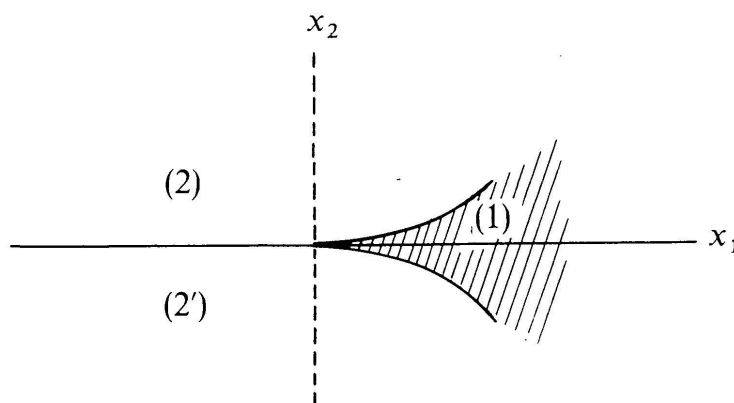


FIGURE 6

On voit ainsi que  $\mathcal{S}' \cap (\mathbf{R}^2 \times \mathbf{C}^+)$  a deux composantes connexes (nappes imaginaires positives au-dessus des zones (2) et (2'), se raccordant transversalement le long de la courbe de self-intersection de la queue d'aronde). L'espace des solutions microfonctions de Sato est donc donné par 2 équations  $sp_{(2)} = 0$  et  $sp_{(2')} = 0$  dans l'espace à 3 dimensions des microsolutions. Ces deux équations sont linéairement indépendantes, car elles correspondent aux deux composantes locales du système  $\mathcal{M}$  au voisinage de la courbe de self-intersection de la queue d'aronde (au voisinage de cette courbe  $\mathcal{M}$  est une somme directe de deux systèmes simples). Par conséquent l'espace des solutions microfonctions de Sato est à une dimension.

*Remarque:* En fait les deux exemples ci-dessus sont des systèmes à caractéristique simple (comme tous les systèmes de Gauss-Manin de déploiements versels de fonctions: cf. [14] Microloc., §7), et l'on dispose d'arguments plus élégants pour montrer que l'espace des solutions microfonctions de Sato est toujours à 1 dimension pour de tels systèmes (une « transformation de contact quantifiée » permet de ramener tous ces systèmes à la forme simple 2.3).

La méthode illustrée ci-dessus a cependant l'avantage de s'appliquer aussi bien aux systèmes dont la variété caractéristique n'est pas lisse.