

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 30 (1984)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: TRANSFORMÉES DE LAPLACE DES MICROSOLUTIONS DE SYSTÈMES HOLONOMES
Autor: Pham, F.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-53821>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 21.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

TRANSFORMÉES DE LAPLACE DES MICROSOLUTIONS DE SYSTÈMES HOLONOMES

par F. PHAM

Le but du présent article est d'exposer des outils mathématiques généraux permettant de clarifier l'étude locale des « points tournants » de la méthode semi-classique en dimension quelconque. Il y sera question (comme chez Balian-Bloch [1], Voros [18] [19]) d'intégrales de Laplace de la forme

$$\phi(x, \tau) = \int_{\gamma} e^{-\tau t} \psi(x, t) dt,$$

où ψ est une fonction analytique multiforme de $(x, t) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}$ dont le lieu de ramification \mathcal{S} est de trace discrète dans chaque droite complexe $x = \text{Cte}$ (tout au moins « localement sur la surface de Riemann » de ψ , en un sens à préciser); pour un contour d'intégration γ comme celui de la figure 1, l'intégrale va converger pour $\text{Re } \tau > 0$ pourvu que ψ soit à croissance modérée à l'infini en t , de sorte que ϕ sera une fonction analytique de (x, τ) sauf peut-être au-dessus des « *points de bifurcation* », valeurs de x pour lesquelles deux points $S_1(x), S_2(x)$ de $\mathcal{S}_x = \mathcal{S} \cap (\{x\} \times \mathbf{C})$ viennent à se confondre et risquent de « pincer » le contour d'intégration γ .

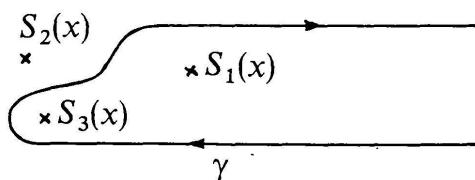


FIGURE 1

Nous nous proposons ici d'étudier localement une classe très générale de fonctions ψ dont les transformées de Laplace ne seront jamais singulières, même en cas de pincement du contour d'intégration: il s'agira des fonctions ψ qui sont localement solution de systèmes holonomes (au sens de Sato) non caractéristiques pour le feuilletage vertical de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}$ (celui dont les feuilles sont les droites $x = \text{Cte}$; cf. §0).

Alors la transformée de Laplace ϕ sera *holomorphe* au-dessus du point de bifurcation *bien que, s'il s'agit d'un point tournant* (déf. 2.6), *chacun des*

termes de son développement asymptotique formel en τ soit singulier ! Il s'agit là d'un phénomène bien connu des physiciens (la fonction d'onde est régulière, bien que ses développements BKW *) soient singuliers), dont la relation avec le « phénomène de Stokes » de la théorie des équations différentielles à singularités irrégulières avait été remarquée depuis longtemps dans le cas $n = 1$, mais qui ne m'est devenu clair qu'après lecture de l'article de Voros [18]. En fait, la seule prétention du présent article est de généraliser en dimension n quelconque l'étude de la structure des points tournants donnée par Voros (dans le cas particulier des points tournants de type « Airy ») au §6 de son article [18]. Il se trouve que tout le travail technique était déjà fait dans un article fondamental de Kashiwara-Kawai[6], et ma seule contribution (peut-être) originale a été d'utiliser la transformation de Laplace comme un dictionnaire pour traduire leurs résultats; pour tout ce qui concerne Laplace (absent des préoccupations de [6]) je me suis inspiré d'idées non publiées de Malgrange (cf. cependant [12]), elles-mêmes influencées par les travaux de Voros; pour l'exposé des résultats de Kashiwara-Kawai (difficiles à lire dans l'article original, en raison du gros outillage cohomologique utilisé), j'ai été très aidé par un exposé de J. E. Björk au séminaire Goulaouic-Schwartz [3]. Le présent exposé doit donc beaucoup à B. Malgrange qui depuis plusieurs années m'explique ses idées sur Laplace, ainsi qu'à J. E. Björk qui m'a aidé à comprendre l'article de Kashiwara-Kawai. Il aurait pu être beaucoup plus bref si je n'avais voulu le rendre lisible sans connaissance préalable du calcul microdifférentiel.

Dans un article ultérieur (dont [16] est une première esquisse) j'aborderai plus spécifiquement les problèmes de physique concernés par la méthode semi-classique complexe (états liés dans le cas où le système classique est complètement intégrable; états de diffusion...).

0. LA CONDITION « NON CARACTÉRISTIQUE »

On se place désormais dans un voisinage de l'origine dans $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}$ muni des coordonnées $(x_1, \dots, x_n, t) = (x, t)$. $\mathcal{O} = \mathbf{C}\{x, t\}$ désigne l'anneau des

*) « BKW » = Brillouin Kramers Wentzel. Les développements BKW sont des développements en puissances de $\frac{1}{\hbar}$ (= notre paramètre τ) des fonctions d'onde de la mécanique ondulatoire. Ces développements sont divergents, de plus leurs termes pris individuellement sont singuliers (avec ramification) aux points dits « points tournants » (*turning points*) où est singulière la solution de l'équation de Hamilton-Jacobi. L'article de Voros mentionné ici exploite joliment l'idée de Balian et Bloch [1] de chercher à resommer les développements BKW sous forme intégrale de Laplace.

germes de fonctions holomorphes, et $\mathcal{D} = \mathcal{O} < \partial_x, \partial_t >$ désigne l'anneau (noethérien) des germes d'opérateurs différentiels à coefficients holomorphes.

Soit $\mathcal{S} \subset \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}$ un germe d'hypersurface analytique complexe, et soit ψ une fonction analytique multiforme dans $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C} \setminus \mathcal{S}$, de classe de Nilsson le long de \mathcal{S} , c'est-à-dire de type de détermination fini et à croissance modérée au voisinage de \mathcal{S} . On sait (cf. par exemple [2], chap. IV) que ψ est alors solution d'un germe de système holonome d'équations aux dérivées partielles linéaires, c'est-à-dire qu'il existe dans \mathcal{D} un idéal à gauche \mathcal{I} tel que $P\psi = 0$ pour tout $P \in \mathcal{I}$, et tel que les symboles principaux des éléments de \mathcal{I} définissent dans le fibré $T^*(\mathbf{C}^n \times \mathbf{C})$ un sous-ensemble analytique (conique) holonome (= lagrangien, c'est-à-dire involutif et de codimension $n+1$), la « variété caractéristique du système », notée $V(\mathcal{D}/\mathcal{I})$. De plus ce système holonome est « à singularité régulière » (mais ce fait ne sera guère utilisé dans la suite).

Comme nous nous intéresserons avant tout aux singularités de ψ , nous serons en réalité amenés à étudier des germes de systèmes holonomes dont ψ est solution modulo \mathcal{O} , c'est-à-dire que $P\psi \in \mathcal{O}$ pour tout $P \in \mathcal{I}$. Le quotient par \mathcal{O} de l'espace des solutions modulo \mathcal{O} constitue ce que nous appellerons l'espace des « microsolutions ».

Exemples

i) $\psi = t^\alpha (\alpha \in \mathbf{C})$ est solution de $(t\partial_t - \alpha)\psi = 0$, $\partial_{x_1}\psi = \dots = \partial_{x_n}\psi = 0$.

$$V(\mathcal{D}/\mathcal{I}) = \{(x, t; \xi, \tau) \mid t\tau = 0, \xi_1 = \dots = \xi_n = 0\},$$

union de la section nulle du fibré cotangent, et du fibré conormal à l'hyperplan $t = 0$;

$\psi = t^p \operatorname{Log} t$ ($p \in \mathbf{N}$) est solution mod. \mathcal{O} de $(t\partial_t - p)\psi \equiv 0 \pmod{\mathcal{O}}$, $\partial_{x_1}\psi = \dots = \partial_{x_n}\psi = 0$ (même variété caractéristique que ci-dessus).

ii) ($n=1$) $\psi = \frac{1}{t^2 - x^3}$ est solution mod. \mathcal{O} de

$$\begin{cases} (t^2 - x^3)\psi \equiv 0 \pmod{\mathcal{O}} \\ (3x^2\partial_t + 2t\partial_x)\psi = 0 \end{cases}$$

dont la variété caractéristique est donnée par les équations

$$\begin{cases} t^2 - x^3 = 0 \\ 3x^2\tau + 2t\xi = 0, \end{cases}$$

et a donc deux composantes :

la première, $T_{\mathcal{S}}^*(\mathbf{C} \times \mathbf{C})$, est le fibré conormal à la courbe \mathcal{S} d'équation
 $t^2 - x^3 = 0$ ($t^2 - x^3 = 0, \tau \neq 0, \frac{\xi}{\tau} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{x^2}{\tau}$);

la seconde, $T_0^*(\mathbf{C} \times \mathbf{C})$, est le fibré conormal à l'origine: ($x=t=0, \xi, \tau$ quelconques).

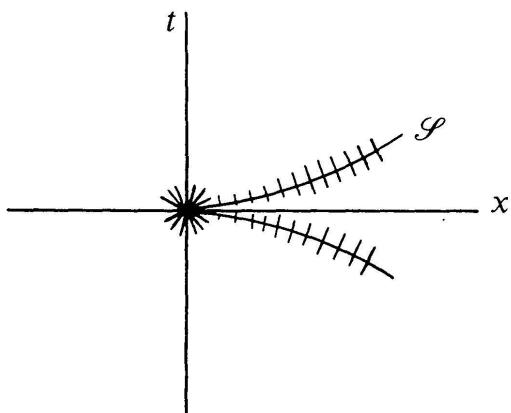


FIGURE 2

Les deux composantes de la variété caractéristique de l'exemple ii).

iii) ($n=1$) Considérons le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(t\partial_t + \frac{2}{3}x\partial_x + \frac{2}{3} \right) \psi = 0 \\ \left(\partial_x^2 - \frac{9}{4}x\partial_t^2 \right) \psi = 0. \end{array} \right.$$

Sa variété caractéristique, donnée par les équations

$$(3t\tau + 2x\xi = 0, 4\xi^2 - 9x\tau^2 = 0),$$

se compose de la section nulle et de la composante $T_{\mathcal{S}}^*(\mathbf{C} \times \mathbf{C})$ de l'exemple ii).

Ce système admet 2 solutions linéairement indépendantes, que l'on peut écrire

$$\psi_{\pm}(x, t) = \frac{1}{x} F\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}; \frac{1}{2} \pm \frac{t}{2x^{3/2}}\right)$$

où F est la fonction hypergéométrique. Bien que cela ne transparaisse pas immédiatement dans l'écriture ci-dessus, ces fonctions ne sont pas singulières sur la droite $x = 0$.

Définition. On dit que le système \mathcal{D}/\mathcal{I} est *non caractéristique pour le feilletage vertical* de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}$ si sa variété caractéristique ne contient aucun covecteur horizontal non nul.

Ici « horizontal » [resp. « vertical »] signifie parallèle à la 1^{re} [resp. 2^e] composante de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}$; le feilletage vertical est donc celui dont les feuilles sont les droites $x = \text{Cte}$, et un covecteur (ξ, τ) est horizontal si $\tau = 0$.

Exemples. La condition « non caractéristique » est vérifiée par les exemples i) et iii) ci-dessus, mais pas par l'exemple ii).

REMARQUE. Comme les fibres de la variété caractéristique sont des cônes, le fait d'interdire les codirections horizontales entraîne que chacun de ces cônes ne peut consister qu'en un *nombre fini de codirections* (car une variété projective complexe ne peut éviter un hyperplan que si elle est de dimension 0).

Dans le cas — qui nous occupe — où la variété caractéristique est *holonome* (= lagrangienne) on en déduit que la condition non caractéristique équivaut à la condition apparemment plus forte que voici :

Condition
non
caractéristique
pour
les systèmes
holonomes

- 1° Le lieu singulier \mathcal{S} de \mathcal{D}/\mathcal{I} (ensemble des points où il existe un covecteur caractéristique non nul) est *fini* (localement) *en restriction à chaque feuille*;
 - 2° Le feilletage est transverse à \mathcal{S} , c'est-à-dire qu'il est transverse à toutes les directions limites d'hyperplans tangents à la partie lisse de \mathcal{S} ;
 - 3° L'ensemble $V^*(\mathcal{D}/\mathcal{I})$ des covecteurs caractéristiques non nuls correspond à l'ensemble des directions limites ci-dessus, autrement dit
- $$\overline{V^*(\mathcal{D}/\mathcal{I})} = T_{\mathcal{S}}^*(\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}).$$

Cette définition étant posée, nous trouvons dans Kashiwara-Kawai [6], chap. IV, une réponse à la question suivante :

« étant donné un germe de système holonome $\mathcal{M} = \mathcal{D}/\mathcal{I}$, non caractéristique pour le feilletage en droites verticales, que peut-on dire de l'espace des « *microsolutions* » de ce système, c'est-à-dire de l'espace quotient par \mathcal{O} de l'espace des solutions mod. \mathcal{O} ? »

En fait Kashiwara et Kawai placent d'emblée le problème dans le cadre « microdifférentiel », c'est-à-dire que l'anneau \mathcal{D} , difficile à manier, est remplacé par un anneau plus grand dans lequel l'opérateur ∂_t est inversible, et dans lequel l'idéal engendré par \mathcal{I} est plus commode à étudier.

Ce qui suit est un exposé élémentaire d'une partie des résultats de Kashiwara et Kawai, suivi d'une *relecture* (n°s 1.5 & 2.5) de ces résultats en termes de transformées de Laplace.

1. ETUDE DES MICROSOLUTIONS, DANS LE CAS D'UNE SEULE VARIABLE ($n=0$)

1.0. L'ANNEAU \mathcal{E} DES OPÉRATEURS MICRODIFFÉRENTIELS est défini comme l'ensemble des séries formelles $P = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k \partial_t^k$, où les $a_k \in \mathbf{C}\{t\}$ ont un disque de convergence commun, vérifiant les deux conditions suivantes :

- i) *ordre fini*: $a_k = 0$ pour $k > m$ (« *l'ordre* » de P);
- ii) « convergence de Borel »: la série $\sum_{k \in \mathbf{N}} a_{-k}(t) \frac{\theta^k}{k!}$ est absolument convergente pour $|t|, |\theta|$ assez petits.

La loi de composition dans \mathcal{E} (que nous n'écrirons pas ici) est une extension naturelle de la loi de composition dans \mathcal{D} (sous-anneau des $P \in \mathcal{E}$ tels que $a_k = 0$ pour tous $k < 0$); cf. par exemple [14] (Microlocalisation) pour plus de détails. On note $\mathcal{E}(m)$ l'espace des opérateurs microdifférentiels d'ordre (\leqslant) m . En particulier $\mathcal{E}(0)$ est un sous-anneau de \mathcal{E} , et la multiplication à droite ou à gauche par ∂_t^m ($m \in \mathbf{Z}$) établit une bijection entre $\mathcal{E}(0)$ et $\mathcal{E}(m)$.

PROPOSITION: \mathcal{E} est un anneau principal. (Notons que cette proposition est fausse pour l'anneau \mathcal{D}).

Idée de la démonstration: Comme ∂_t est inversible dans \mathcal{E} , tout idéal \mathcal{I} de \mathcal{E} peut être engendré par des opérateurs d'ordre exactement 0, c'est-à-dire, après division par un élément inversible de $\mathbf{C}\{t\}$, de la forme $P = t^m + P'$, $P' \in \mathcal{E}(-1)$; l'entier m est la « valuation » de P (ne pas confondre avec l'ordre!). J'affirme alors qu'un élément P de \mathcal{I} dont la valuation est minimale engendre nécessairement \mathcal{I} : cela résulte immédiatement d'un *théorème de division* dans $\mathcal{E}(0)$, qui nous dit que tout élément de $\mathcal{E}(0)$ peut être divisé par P , avec un reste de valuation strictement inférieure.

(Comme sous-produit du même théorème de division, nous obtenons une propriété fondamentale, utilisée traditionnellement pour motiver l'introduction des opérateurs microdifférentiels: *un opérateur microdifférentiel est inversible si et seulement si son symbole principal est non nul à l'origine*).

Grâce à la proposition ci-dessus, notre problème devient le suivant:

étudier les microsolutions d'un opérateur $P = t^m + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) \partial_t^{-k}$.

1.1. ACTION DE P SUR LES FONCTIONS HOLOMORPHES

A la série formelle $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) \partial_t^{-k}$ on associe le noyau intégral $K(t, u)$
 $= \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) \frac{(t-u)^{k-1}}{(k-1)!}$, qui grâce à la condition de convergence ii) est holomorphe pour $|t|, |u|$ assez petits. Soit donc D un disque ouvert assez petit pour que K soit holomorphe dans un voisinage de $\bar{D} \times \bar{D}$. Pour tout ouvert simplement connexe $U \subset D$, et pour tout $t_0 \in U$, on définit $P_{t_0}: \mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}(U)$ par la formule

$$(P_{t_0} \psi)(t) = t^m \psi(t) + \int_{t_0}^t K(t, u) \psi(u) du.$$

En particulier $(\partial_t^{-1})_{t_0}$ est l'opérateur qui à toute fonction holomorphe associe sa primitive nulle en t_0 .

1.2. MICROSOLUTIONS DE P

Commençons par définir, sur $D^* = D \setminus \{0\}$, le faisceau $\text{Sol}^{\bar{D}}$ des solutions mod. $\mathcal{O}(\bar{D})$, où $\mathcal{O}(\bar{D})$ désigne désormais l'algèbre de Banach des fonctions continues sur \bar{D} et holomorphes sur D : pour tout ouvert simplement connexe $U \subset D^*$ on pose

$$\text{Sol}^{\bar{D}}(U) = \{\psi \in \mathcal{O}(U) \mid P_{t_0} \psi \in \mathcal{O}(\bar{D}) \text{ pour un } t_0 \in U\};$$

remarquons que cette définition ne dépend pas du choix de t_0 , car

$$P_{t_0} \psi - P_{t_1} \psi = \int_{t_0}^{t_1} K(t, u) \psi(u) du$$

est holomorphe dans un voisinage du disque \bar{D} .

THÉORÈME:

i) *Tout germe de solution mod. $\mathcal{O}(\bar{D})$ se prolonge sur tout D^* en fonction analytique multiforme.*

ii) Le faisceau quotient $\text{Sol}^{\bar{D}}/\mathcal{O}(\bar{D})$, que nous noterons $\text{sol}^{\bar{D}}$, est un système local d'espaces vectoriels de dimension m (l'espace des « microsolutions » de $P \text{ mod. } \mathcal{O}(\bar{D})$).

En fait, cet énoncé est valable dans une situation plus générale qui nous sera utile au paragraphe suivant :

Situation « semi-locale »: dans la définition de l'opérateur P , t^m peut être remplacé par un polynôme unitaire $p(t)$ de degré m , ayant toutes ses racines S_1, \dots, S_l dans le disque D (de multiplicités relatives m_1, \dots, m_l , avec $m_1 + \dots + m_l = m$); on note alors $D^* = D \setminus \{S_1, \dots, S_l\}$.

Avant de démontrer le théorème (dans la situation semi-locale) énonçons deux lemmes :

LEMME 1. Pour tout $t_0 \in D^*$, l'opérateur $P_{t_0}: \mathcal{O}_{t_0} \rightarrow \mathcal{O}_{t_0}$ est bijectif.

Preuve. $P_{t_0} = p(t) + \int_{t_0}^t K$, où $p(t)$ est un isomorphisme et $\int_{t_0}^t K$ une perturbation de norme aussi petite qu'on veut dans l'espace de Banach des fonctions holomorphes sur un disque assez petit de centre t_0 .

LEMME 2. Pour tout disque $D_0 \subset D$ (de centre t_0 arbitraire), l'opérateur de $\mathcal{O}(\bar{D}_0)$ dans $\mathcal{O}(\bar{D}_0)$ défini par

$$\psi(t) \mapsto \int_{t_0}^t K(t, u)\psi(u) du$$

est un opérateur compact.

Preuve. Appliquer le critère d'Ascoli.

Preuve du théorème (d'après J. E. Björk [3]).

i) Soit ψ un germe de solution mod. $\mathcal{O}(\bar{D})$, admettant un prolongement analytique dans un ouvert $U \subset D^*$, et soit D_0 un disque de centre $t_0 \in U$, non inclus dans U , mais d'adhérence $\bar{D}_0 \subset D^*$. Posant $\theta = P_{t_0}\psi \in \mathcal{O}(\bar{D})$, on va montrer que l'équation $P_{t_0}\psi' = \theta$ admet dans $\mathcal{O}(\bar{D}_0)$ une solution unique, qui sera donc le prolongement analytique de ψ . Il suffit pour cela de remarquer que l'opérateur P de $\mathcal{O}(\bar{D}_0)$ dans $\mathcal{O}(\bar{D}_0)$ est d'une part injectif (en vertu du lemme 1 et du principe de prolongement analytique), d'autre part d'indice 0 car déduit de l'opérateur p (évidemment bijectif) par une perturbation compacte (lemme 2).

ii) Comme opérateur de $\mathcal{O}(\bar{D})$ dans $\mathcal{O}(\bar{D})$, P_{t_0} se déduit par perturbation compacte (lemme 2) de l'opérateur p qui est d'indice $-m$ (injectif, de conoyau

de dimension m). P_{t_0} est donc d'indice $-m$, et pour $t_0 \in D^*$ il est injectif en vertu du lemme 1 et du principe de prolongement analytique. Son conoyau est donc de dimension m . Soit $\theta_1, \dots, \theta_m \in \mathcal{O}(\bar{D})$ des fonctions définissant une base de ce conoyau. D'après le lemme 1 les équations $P_{t_0}\psi_1 = \theta_1, \dots, P_{t_0}\psi_m = \theta_m$ se résolvent de façon unique dans \mathcal{O}_{t_0} , et l'on vérifie immédiatement que ψ_1, \dots, ψ_m définissent une base de $\text{Sol}_{t_0}^{\bar{D}}/\mathcal{O}(\bar{D})$.

1.3. EXEMPLE: MICROSOLUTIONS AU VOISINAGE D'UN POINT SIMPLE ($m=1$)

Si P est de valuation $m=1$ à l'origine, tout élément de $\mathcal{E}(0)$ peut être divisé par P avec un reste à coefficients constants (cf. par exemple [14] Microloc. §3). En particulier, la division $t = QP + R$ permet ainsi de se ramener au cas où le générateur de l'idéal est de la forme $P = t - R$, $R \in \mathcal{E}(-1)$ à coefficients constants.

Ecrivant donc $P = t + \alpha \partial_t^{-1} + \dots$ ($\alpha \in \mathbb{C}$), on peut démontrer le

LEMME. *Il existe un opérateur d'ordre 0 à coefficients constants.*

$$Q = 1 + c_1 \partial_t^{-1} + c_2 \partial_t^{-2} + \dots,$$

tel que $PQ = Q(t + \alpha \partial_t^{-1})$.

COROLLAIRE. *L'opérateur Q^{-1} transforme les microsolutions ψ de P en les microsolutions $\tilde{\psi}$ de $(t + \alpha \partial_t^{-1})\tilde{\psi} = 0$ (mod. \mathcal{O}).*

Remarquons que l'action des opérateurs microdifférentiels sur les microsolutions est bien définie, car l'ambiguité du choix du point t_0 dans 1.1 disparaît quand on passe au quotient modulo \mathcal{O} .

Microsolutions de $(t + \alpha \partial_t^{-1})\tilde{\psi} = 0$ (mod. \mathcal{O}).

Si $\alpha \neq -1, -2, \dots$, l'espace à 1 dimension des microsolutions est engendré par $\tilde{\psi}_\alpha = \frac{1}{2\pi i} \frac{(-t)^{-\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \text{ mod. } \mathcal{O}$;

si $\alpha = -1-j, j \in \mathbb{N}$, il est engendré par

$$\tilde{\psi}_\alpha = \frac{-1}{2\pi i} \frac{t^j \log t}{j!} \text{ mod. } \mathcal{O}$$

(les coefficients de normalisation sont choisis pour la commodité).

Dans un cas comme dans l'autre, nous noterons $\delta_{(t)}^{(\alpha)}$ la microsolution ainsi définie. $\delta_{(t)}^{(0)} = \delta_{(t)}$ est la « microfonction de Dirac », et avec les normalisations choisies $\partial_t^k \delta_{(t)}^{(\alpha)} = \delta_{(t)}^{(\alpha+k)}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Microsolutions de $(t + \alpha \partial_t^{-1} + \dots)\psi = 0$ (mod. \mathcal{O})

D'après le corollaire du lemme précédent l'espace des microsolutions est engendré par la « microfonction » :

$$Q \delta_{(t)}^{(\alpha)} = \delta_{(t)}^{(\alpha)} + c_1 \delta_{(t)}^{(\alpha-1)} + c_2 \delta_{(t)}^{(\alpha-2)} + \dots$$

c'est-à-dire par la classe mod. \mathcal{O} de la fonction analytique $g_\alpha \tilde{\Psi}_\alpha$, où $\tilde{\Psi}_\alpha$ a été définie précédemment, et g_α est le germe de fonction holomorphe définie par

$$g_\alpha(t) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{\Gamma(\alpha)_k}{\Gamma(\alpha-k)} (-t)^k & \text{si } \alpha \neq -1, -2, \dots \\ \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{j!}{(j+k)!} t^k & \text{si } \alpha = -1-j, j \in \mathbf{N} \end{cases}$$

(on a posé $c_0 = 1$).

1.4. COMPARAISON DES MICROSOLUTIONS « LOCALES » ET « SEMI-LOCALES »

Dans la situation semi-locale 1.2, posons $D' = D \setminus C_1 \cup \dots \cup C_l$, où les « coupures » C_1, \dots, C_l sont des demi-droites parallèles disjointes issues respectivement des points singuliers S_1, \dots, S_l (disons, pour fixer les idées, les demi-droites $t - S_i \in \mathbf{R}^+$, en supposant $\text{Im } S_i \neq \text{Im } S_j$ pour $i \neq j$). Pour $i = 1, \dots, l$ soit D_i un disque de centre S_i , assez petit pour que $D'_i = D_i \setminus C_i \subset D'$ (cf. Fig. 3).

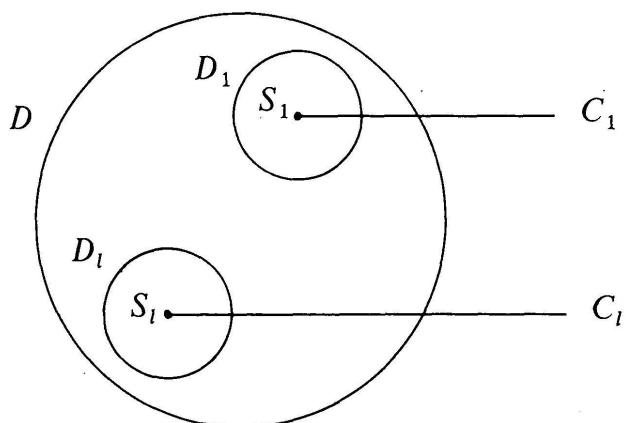


FIGURE 3

On peut alors considérer les applications linéaires Sp_i (resp. sp_i) de « spécialisation » des (micro)-solutions définies pour tout $i = 1, 2, \dots, l$ par la restriction des fonctions holomorphes :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{O}(\bar{D}) & \xrightarrow{\text{restriction}} & \mathcal{O}(\bar{D}_i) \\
 \cap & & \cap \\
 \text{Sol}^{\bar{D}}(D') & \xrightarrow{\text{Sp}_i} & \text{Sol}^{\bar{D}_i}(D'_i) \\
 \downarrow \text{sing} & & \downarrow \text{sing}_i \\
 \text{sol}^{\bar{D}}(D') & \xrightarrow{\text{sp}_i} & \text{sol}^{\bar{D}_i}(D'_i)
 \end{array}$$

où sing , sing_i sont les applications qui à chaque solution associent la micro-solution correspondante (« singularité » de cette solution).

PROPOSITION: $\bigoplus_{i=1}^l \text{sp}_i : \text{sol}^{\bar{D}}(D') \rightarrow \bigoplus_{i=1}^l \text{sol}^{\bar{D}_i}(D'_i)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Preuve: Il s'agit d'espaces vectoriels de même dimension $m = m_1 + \dots + m_l$ d'après la partie ii) du théorème 1.2. Par ailleurs la partie i) du même théorème implique immédiatement l'injectivité, car une détermination dans D' de fonction analytique multiforme dans D^* est évidemment holomorphe dans tout D si elle l'est au voisinage des points S_1, \dots, S_l .

Remarques

i) Notons que la proposition implique en particulier que toute micro-solution locale $\varphi_i \in \text{sol}^{\bar{D}_i}(D'_i)$ peut être représentée par une solution semi-locale ψ holomorphe non seulement dans D' mais dans $D \setminus C_i$ (c'est-à-dire non singulière aux points $S_j, j \neq i$).

ii) Notons aussi que les applications de « spécialisation » qui définissent l'isomorphisme de la proposition dépendent de façon cruciale de la direction choisie pour les coupures (cela sera précisé un peu plus loin).

Monodromies. Etant section d'un système local d'espaces vectoriels sur D^* , $\text{sol}^{\bar{D}}(D')$ est muni d'une action du groupe fondamental de D^* (qui est libre non commutatif à l générateurs) et il est naturel de se demander comment cette action (la « monodromie » de $\text{sol}^{\bar{D}}$) se lit dans la somme directe

$\bigoplus_i \text{sol}^{\bar{D}_i}(D'_i)$. La seule donnée de la monodromie de chaque $\text{sol}^{\bar{D}_i}(D'_i)$ (action de \mathbf{Z} , groupe fondamental de $D_i^* = D_i \setminus S_i$) est évidemment une information beaucoup plus pauvre. En fait on récupère toute l'information en se donnant les « *variations* » des microsolutions locales, définies ci-après :

Variations. Soit $\psi_i \in \text{Sol}^{\bar{D}_i}(D'_i)$ une solution locale, et soit T_i la monodromie de $\text{Sol}^{\bar{D}_i}(D'_i)$ (action d'un lacet tournant une fois autour de S_i dans le sens trigonométrique). Il est clair que la fonction $\text{var}_i \psi_i = T_i \psi_i - \psi_i$ ne dépend que de la microsolution $\text{sing}_i \psi_i$, ce qui définit une application

$$\text{var}_i : \text{sol}^{\bar{D}_i}(D'_i) \rightarrow \text{Sol}^{\bar{D}_i}(D'_i)$$

appelée « variation locale autour de S_i ».

Comme en vertu de la remarque i) ci-dessus toute microsolution locale peut être représentée par une fonction $\psi_i \in \mathcal{O}(D')$ (et même $\mathcal{O}(D \setminus C_i)$), on voit que la variation locale var_i se factorise à travers une « variation semi-locale »

$$\text{Var}_i : \text{sol}^{\bar{D}_i}(D'_i) \rightarrow \text{Sol}^{\bar{D}}(D') \quad (\text{et même } \text{Sol}^{\bar{D}}(D \setminus C_i)).$$

On en déduit des « *microvariations* »

$$\text{var}_i^j = \text{sing}_j \circ \text{Sp}_j \circ \text{Var}_i : \text{sol}^{\bar{D}_i}(D'_i) \rightarrow \text{sol}^{\bar{D}_j}(D'_j)$$

qui sont très utiles pour expliciter la façon dont l'isomorphisme de la proposition dépend de la direction choisie pour les coupures.

De façon précise, si l'on fait tourner les coupures en faisant croître leur argument θ , et si pour un certain argument θ_0 le point S_j est « balayé » par une coupure $C_k (k \neq j)$ et par aucune autre, alors le spécialisé sp'_j pour $\theta \geq \theta_0$ se déduit du spécialisé sp_j pour $\theta \leq \theta_0$ par la formule

$$\text{sp}'_j \psi = \text{sp}_j \psi - \text{var}_k^j \text{sp}_k \psi$$

(quant aux autres $\text{sp}'_i \psi$, ils sont tous égaux à $\text{sp}_i \psi$ si aucun autre S_i n'est balayé par une coupure).

1.5. TRANSFORMÉES DE LAPLACE LOCALES ET SEMI-LOCALES

Dans la situation 1.4, supposons que les points S_1, \dots, S_l soient à une distance de l'origine inférieure à un nombre r égal à $1/\sqrt{2}$ fois le rayon du disque D . Cela nous permettra de considérer dans D' des chemins d'intégration $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_l$ (cf. Fig. 4) dont l'origine et l'extrémité auront leurs parties réelles supérieures à r .

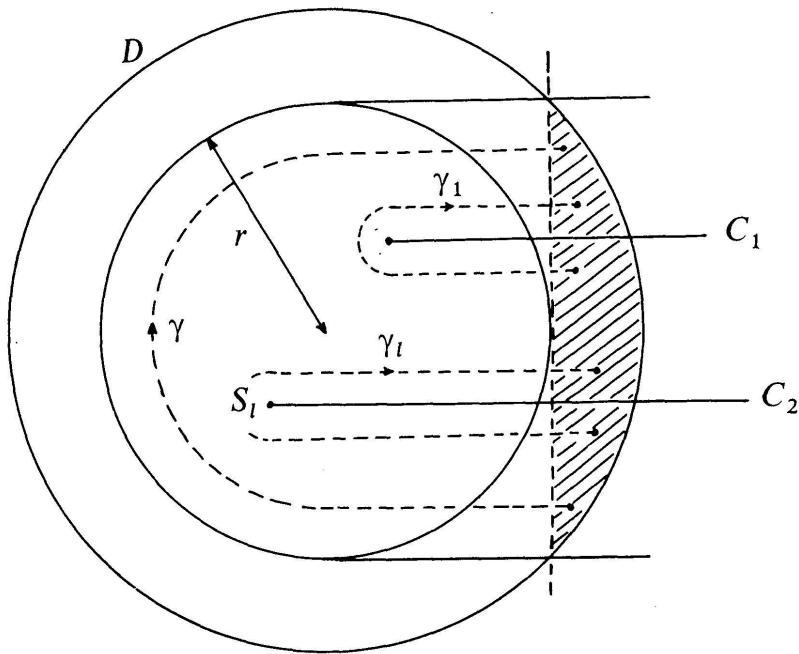


FIGURE 4

Pour $\psi \in \text{Sol}^{\bar{D}}(D')$, définissons la « transformée de Laplace semi-locale » par

$$(\mathcal{L}\psi)(\tau) = \int_{\gamma} e^{-\tau t} \psi(t) dt.$$

C'est une fonction holomorphe de τ dans le demi-plan $\text{Re } \tau > 0$, vérifiant une condition de croissance que nous noterons ainsi :

$\mathcal{L}\psi \in \mathcal{A}^r$, espace vectoriel des fonctions ϕ holomorphes dans $\text{Re } \tau > 0$ admettant dans tout secteur $-\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \text{Arg } \tau < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ une majoration du type $|\phi| < c_\varepsilon e^{r\tau}$. En notant de même \mathcal{A}_{-r} , l'espace des ϕ admettant dans tout secteur $-\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \text{Arg } \tau < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ des majorations $|\phi| < c_\varepsilon e^{-r'\tau}$ ($r' < r$ arbitrairement proche de r), on déduit immédiatement du théorème de Cauchy que la classe de $\mathcal{L}\psi$ mod. \mathcal{A}_{-r} ne change ni quand on déforme le chemin γ en astreignant son origine et son extrémité à rester dans la lunule $D' \cap \{\text{Re } t > r\}$, ni quand on remplace ψ par une fonction équivalente mod. $\mathcal{O}(\bar{D})$. Autrement dit, la transformée de Laplace semi-locale définit une application linéaire

$$\mathcal{L} : \text{sol}^{\bar{D}}(D') \rightarrow \mathcal{A}^r / \mathcal{A}_{-r}.$$

Notons que cette application est injective (on adapte un argument de Malgrange [11], qui définit la transformation de Laplace inverse en intégrant

sur n'importe quelle demi-droite non verticale du demi-plan $\operatorname{Re} \tau > 0$ dont l'origine a une partie réelle > 0 arbitrairement petite).

Définissons maintenant les « *transformations de Laplace locales* » par les formules

$$(\mathcal{L}_i \psi)(\tau) = \int_{\gamma_i} e^{-\tau t} \psi(t) dt \quad i = 1, 2, \dots, l.$$

Par le même raisonnement que plus haut, mais en utilisant de plus la remarque 1.4 i), on voit que les \mathcal{L}_i définissent des applications linéaires

$$\mathcal{L}_i : \operatorname{sol}^{\bar{D}_i}(D'_i) \rightarrow \mathcal{A}'/\mathcal{A}_{-r} \quad (i=1, 2, \dots, l)$$

De plus, l'homologie $\gamma \sim \sum_{i=1}^l \gamma_i$ (dans D' mod. $D' \cap \{\operatorname{Re} t > r\}$) implique

$$\mathcal{L}\psi = \sum_{i=1}^l \mathcal{L}_i \psi, \text{ c'est-à-dire } \mathcal{L} = \sum_i \mathcal{L}_i \circ \operatorname{sp}_i.$$

Conclusion: On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{sol}^{\bar{D}}(D') & \xrightarrow{\mathcal{L}} & \mathcal{A}'/\mathcal{A}_{-r} \\ \downarrow \bigoplus_i \operatorname{sp}_i & & \uparrow \sum_i \\ \bigoplus_i \operatorname{sol}^{\bar{D}_i}(D'_i) & \xrightarrow{\bigoplus_i \mathcal{L}_i} & \bigoplus_i \mathcal{A}'/\mathcal{A}_{-r} \end{array}$$

par lequel l'espace vectoriel à m dimensions des microsolutions semi-locales s'identifie à un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}'/\mathcal{A}_{-r}$, qui admet une décomposition en somme directe de sous-espaces vectoriels de $\mathcal{A}'/\mathcal{A}_{-r}$, image de la décomposition 1.4.

Exemple. Cas où tous les points S_i sont simples. Dans le cas où tous les points S_i sont simples ($m_i = 1$), on sait (n° 1.3) que les microsolutions locales sont de la forme $\varphi_i = (c_0^i + c_1^i \partial_t^{-1} + \dots) \delta_{(t-S_i)}$, de sorte que leurs transformées de Laplace admettent les développements asymptotiques formels

$$\mathcal{L}_i \varphi_i \propto (c_0^i + c_1^i \tau^{-1} + \dots) \tau^{\alpha_i} e^{-\tau S_i}.$$

Les transformées de Laplace semi-locales admettront donc formellement des développements asymptotiques (non convergents)

$$\mathcal{L}\psi \propto \sum_{i=1}^l (c_0^i + c_1^i \tau^{-1} + \dots) \tau^{\alpha_i} e^{-\tau S_i}$$

tout-à-fait semblables aux développements « BKW complexes » des physiciens. Tout le travail que nous venons de faire a pour effet de donner une signification *exacte mod. \mathcal{A}_-* , à de tels développements.

Remarque. Nos transformées de Laplace n'ont dû être tronquées (mod. \mathcal{A}_{-r}) que parce que nous ne savons pas jusqu'où les fonctions considérées peuvent être prolongées analytiquement en dehors de D . Mais considérons l'hypothèse suivante :

Hypothèse. Pour tout $i = 1, \dots, l$, la variation $\text{Var}_i\varphi$ de toute microsolution se prolonge analytiquement dans $E \setminus C_1 \cup \dots \cup C_l$, où E est la bande horizontale, union des demi-droites parallèles à \mathbf{R}^+ issues de D .

Sous cette hypothèse toutes les transformées de Laplace peuvent être définies mod. \mathcal{A}_{-R} pour tout $R > 0$, et même exactement (comme vraies fonctions) si les $\text{Var}_i\varphi$ sont à croissance modérée à l'infini.

Par exemple $\mathcal{L}_i\varphi$ pourra être définie par la formule suivante, à l'aide des chemins γ_i et β_i de la figure 5 :

$$(\mathcal{L}_i\varphi)(\tau) = \int_{\gamma_i} e^{-\tau t} \psi(t) dt - \int_{\beta_i} e^{-\tau t} (\text{Var}_i\varphi)(t) dt$$

où ψ est un représentant (analytique multiforme dans D^*) de la microsolution φ ; la demi-droite β_i et le « lacet » γ_i ont leur origine commune dans D' un peu au-dessus de la coupure C_i , et l'on a représenté en pointillé sur la figure la partie de γ_i située dans le « 2^e feuillet » (voir fig. 5).

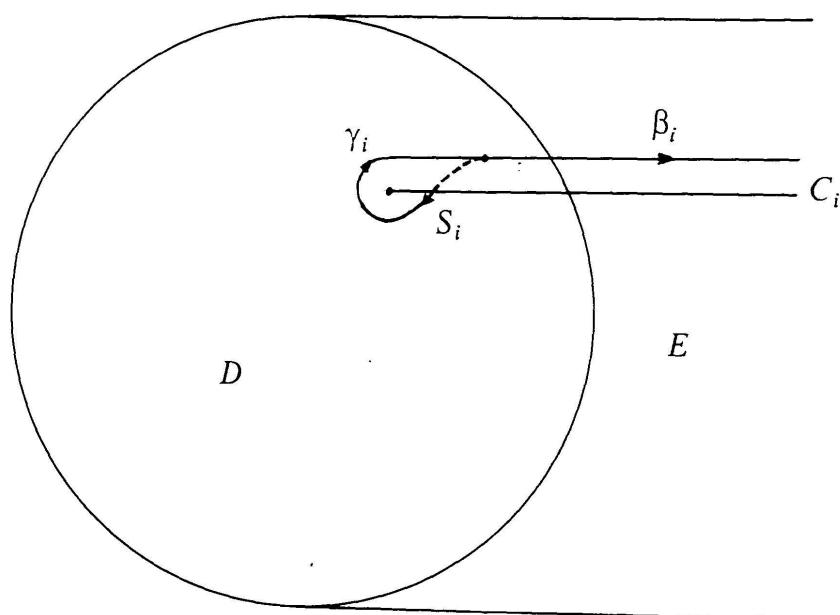


FIGURE 5

2. ETUDE DES MICROSOLUTIONS DANS LE CAS GÉNÉRAL

2.0. MICROLOCALISATION « VERTICALE »

Nous noterons $\bar{\omega}$ le feuilletage vertical de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}$, et $\mathcal{E}_{\bar{\omega}}$ l'anneau des opérateurs microdifférentiels « verticaux », c'est-à-dire l'ensemble des séries formelles $P = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k \partial_t^k$, où les $a_k \in \mathbf{C}\{x, t\}$ ont un polydisque de convergence commun et vérifient les deux conditions suivantes :

- i) *ordre fini*: $a_k = 0$ pour $k > m$ (« l'*ordre* » de P);
- ii) « *convergence de Borel* »: la série $\sum_{k \in \mathbf{N}} a_{-k}(x, t) \frac{\theta^k}{k!}$ est absolument convergente pour $\|x\|, |t|, |\theta|$ assez petits.

On note $\mathcal{E}_{\bar{\omega}}(m)$ l'espace des opérateurs microdifférentiels verticaux d'ordre $(\leq) m$. En particulier $\mathcal{E}_{\bar{\omega}}(0)$ est un sous-anneau de $\mathcal{E}_{\bar{\omega}}$, et la multiplication à droite ou à gauche par $\partial_t^m (m \in \mathbf{Z})$ établit une bijection entre $\mathcal{E}_{\bar{\omega}}(0)$ et $\mathcal{E}_{\bar{\omega}}(m)$.

Soit maintenant $\mathcal{R} = \mathcal{E}_{\bar{\omega}} < \partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n} >$ l'anneau des opérateurs polynomiaux en $\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}$ à coefficients dans $\mathcal{E}_{\bar{\omega}}$: on pourra convenir d'écrire ces coefficients à gauche des $\partial_{x_1}^{a_1} \dots \partial_{x_n}^{a_n}$, mais il faudra de toutes façons tenir compte des relations de commutation $[\partial_{x_i}, x_j] = 1$ au moment d'écrire la loi de composition. Ainsi \mathcal{R} contient \mathcal{D} comme sous-anneau, dont il est en quelque sorte le « microlocalisé vertical ». Tout comme \mathcal{D} , $\mathcal{E}_{\bar{\omega}}$, etc., \mathcal{R} est un anneau noethérien. Tout comme eux il peut être considéré comme la fibre à l'origine d'un faisceau cohérent d'anneaux sur $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}$.

2.1. ACTION DE \mathcal{R} SUR LES FONCTIONS HOLOMORPHES

Séule l'action de $\mathcal{E}_{\bar{\omega}}$ pose problème, et comme tout élément de $\mathcal{E}_{\bar{\omega}}$ est la somme d'un opérateur différentiel et d'un élément de $\mathcal{E}_{\bar{\omega}}(0)$, il nous suffira de définir l'action de $\mathcal{E}_{\bar{\omega}}(0)$; Soit donc $P \in \mathcal{E}_{\bar{\omega}}(0)$:

$$P = p(x, t) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x, t) \partial_t^{-k}.$$

A la série formelle $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \partial_t^{-k}$ on associera le noyau intégral

$$K(x; t, u) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x, t) \frac{(t-u)^{k-1}}{(k-1)!},$$

qui grâce à la condition de convergence ii) est holomorphe pour $\|x\|, |t|, |u|$ assez petits. Soient donc B une boule de \mathbf{C}^n et D un disque de \mathbf{C} , assez petits pour que p [resp. K] soit holomorphe dans un voisinage de

$\bar{B} \times \bar{D}$ [resp. $\bar{B} \times \bar{D} \times \bar{D}$]. Pour tout ouvert $V \times U \subset B \times D$, avec U simplement connexe, et pour tout $t_0 \in U$, on définit $P_{t_0}: \mathcal{O}(V \times U) \rightarrow \mathcal{O}(V \times U)$ par la formule

$$(P_{t_0}\psi)(x, t) = p(x, t)\psi(x, t) + \int_{t_0}^t K(x; t, u)\psi(x, u)du.$$

En particulier $(\partial_t^{-1})_{t_0}$ est l'opérateur qui à toute fonction holomorphe associe sa « primitive verticale » nulle sur l'hyperplan $t = t_0$.

On en déduit pour tout $R \in \mathcal{R}$ un opérateur

$$R_{t_0}: \mathcal{O}(V \times U) \rightarrow \mathcal{O}(V \times U)$$

bien défini pourvu que $V \times U$ soit assez petit (et U simplement connexe).

Remarque. Il sera parfois utile d'étendre l'action des opérateurs R_{t_0} aux fonctions analytiques multiformes dans le complémentaire d'une hypersurface \mathcal{S} . Mais on prendra garde que cette action n'est pas définie dans les « feuilles singulières », c'est-à-dire les droites verticales où plusieurs points de \mathcal{S} viennent à confluer, risquant de pincer le contour d'intégration. Le résultat d'une telle action sera donc une fonction analytique multiforme dans le complémentaire de $\mathcal{S} \cup \mathcal{T}$, où l'hypersurface \mathcal{T} est l'union des droites verticales « en position singulière par rapport à \mathcal{S} ».

2.2. MICROSOLUTIONS D'UN IDÉAL $\mathcal{I} \subset \mathcal{R}$

On prend B, D assez petits pour que \mathcal{I} admette des générateurs R_1, \dots, R_v dont l'action sur les fonctions holomorphes est bien définie dans $B \times D$.

Solutions mod. $\mathcal{O}(\cdot \times D)$. Pour $V \times U \subset B \times D$ comme au n° 2.1, on définit l'espace

$$\text{Sol}^D(V \times U) = \{\psi \in \mathcal{O}(V \times U) \mid (R_\lambda)_{t_0} \psi \in \mathcal{O}(V \times D), \lambda = 1, \dots, v\},$$

dont il convient de remarquer qu'il ne dépend pas du choix du point $t_0 \in U$. Il ne dépend pas non plus du choix des générateurs de l'idéal \mathcal{I} pourvu que ceux-ci convergent dans $V \times D$ (on prendra garde en vérifiant ce point que l'égalité $R_{t_0}(R'_{t_0} \psi) = (RR')_{t_0} \psi$ n'est pas vraie ; toutefois elle l'est mod. $\mathcal{O}(V \times D)$, ce qui nous suffit).

Microsolutions. Pour $V \times U$ comme ci-dessus, on définit

$$\text{sol}^D(V \times U) = \text{Sol}^D(V \times U)/\mathcal{O}(V \times D).$$

En passant à la limite inductive sur les petits ouverts $V \times U$ nous avons ainsi défini deux faisceaux Sol^D et sol^D , que nous étudierons sur l'espace $(B \times D)^* = B \times D \setminus \mathcal{S}$ complémentaire du *lieu singulier* \mathcal{S} du système

$\mathcal{M} = \mathcal{R}/\mathcal{I}$. Ce dernier sera supposé *holonome, non caractéristique pour le feuilletage vertical* (toutes les notions introduites au §0 se transfèrent sans modification aux \mathcal{R} -modules, avec la simplification supplémentaire que la variété caractéristique ne contient jamais la section nulle du fibré cotangent).

Le lieu singulier \mathcal{S} est donc une hypersurface transverse au feuilletage (à trace finie dans chaque feuille), et nous pouvons choisir B, D de telle sorte que $\mathcal{S} \cap (B \times D)$ ne rencontre pas $B \times \partial D$ ($\partial D =$ bord du disque).

THÉORÈME. *Avec les hypothèses ci-dessus, et si B, D sont assez petits,*

i) *pour tout ouvert $V \times U \subset (B \times D)^* = B \times D \setminus \mathcal{S}$, avec V, U simplement connexes, toute $\psi \in \text{Sol}^D(V \times U)$ se prolonge en fonction analytique multiforme sur $(V \times D)^* = V \times D \setminus \mathcal{S}$;*

ii) *le faisceau sol^D des microsolutions est localement constant sur $(B \times D)^*$, où il définit un système local d'espaces vectoriels de dimension finie.*

Preuve de la partie i). Il s'agit d'un résultat de « prolongement analytique vertical » dont la démonstration peut être calquée sur le cas $n = 0$ (théorème 1.2 i)), après quelques préparatifs algébriques dont voici l'esquisse : grâce à un théorème de division dans l'anneau des opérateurs micro-différentiels (cf. par exemple [14] Microloc. §3), l'hypothèse non caractéristique implique que \mathcal{M} peut être considéré comme la fibre à l'origine d'un $\mathcal{E}_{\bar{\omega}}$ -Module cohérent de support \mathcal{S} ; on en déduit l'existence dans $\mathcal{I} \cap \mathcal{E}_{\bar{\omega}}(0)$ d'un opérateur P dont le symbole principal $p(x, t)$ est une équation (non nécessairement réduite) de \mathcal{S} .

Alors un argument de « perturbation compacte » analogue à celui de 1.2 montre que P , tout comme p , est un isomorphisme sur tous les $B_0 \times D_0 \subset V \times D \setminus \mathcal{S}$, ce qui démontre l'existence du prolongement analytique multiforme sur $V \times D \setminus \mathcal{S}$ de toute solution de P mod. $\mathcal{O}(V \times D)$.

Quant à la partie ii) du théorème, nous en dirons quelques mots au n° 2.4, où seront donnés des énoncés plus précis.

2.3. MICROSOLUTIONS LOCALES AU VOISINAGE D'UN POINT GÉNÉRIQUE DE \mathcal{S}

Plaçons-nous maintenant au voisinage d'un point générique de \mathcal{S} , c'est-à-dire un point S au voisinage duquel \mathcal{S} est lisse et transverse aux feuilles $x = \text{Cte}$; prenons pour $B \times D$ un voisinage assez petit de S , dans lequel \mathcal{S} sera donnée par l'équation $t = 0$ (on peut toujours se ramener à ce cas par un changement de coordonnées locales respectant le feuilletage). Pour étudier la structure des microsolutions, on essaye de se ramener au cas d'une

seule variable en cherchant un changement d'inconnue $\tilde{\Psi} = Q\Psi$ qui mette le système sous la forme

$$P(t, \partial_t^{-1})\tilde{\Psi} = 0, \quad \partial_{x_1}\tilde{\Psi} = \dots = \partial_{x_n}\tilde{\Psi} = 0.$$

En fait, cela n'est possible en général qu'en prenant Q dans un anneau plus grand, l'anneau des opérateurs microdifférentiels *d'ordre infini*, qui heureusement agit lui aussi sur les microfonctions. Le cas où l'on peut prendre Q d'ordre fini est le cas où le système est « à singularité régulière » (Kashiwara-Oshima [9]; une démonstration élémentaire est esquissée dans [15], et détaillée dans [4]).

Conclusion. Le faisceau sol^D (avec D comme ci-dessus) définit sur $(B \times D)^*$ un système local d'espaces vectoriels de dimension $m = \langle \text{multiplicité} \rangle$ du système microdifférentiel au point S (= valuation de l'opérateur P ci-dessus).

Cas particulier. S est un point « simple », c'est-à-dire que $m = 1$. C'est le cas le plus simple de singularité régulière. L'opérateur P peut alors être mis sous la forme $P = t + \alpha\partial_t^{-1}$, comme au n° 1.3, et l'on en déduit que l'espace des microsolutions est engendré par une « microfonction » de la forme

$$Q(x, \partial_t^{-1})\delta_{(t)}^{(\alpha)} = c_0(x)\delta_{(t)}^{(\alpha)} + c_1(x)\delta_{(t)}^{(\alpha-1)} + c_2(x)\delta_{(t)}^{(\alpha-2)} + \dots$$

où $\delta_{(t)}^{(\alpha)}$ est la « dérivée α -ième » ($\alpha \in \mathbb{C}$) de la microfonction de Dirac, définie comme en 1.3 (indépendante de x).

2.4. DÉCOMPOSITION « DE STOKES » DES MICROSOLUTIONS

Reprendons maintenant B et D comme en 2.2, et posons $(B \times D)' = B \times D \setminus C$, où C désigne la « coupure » $C = \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S + \mathbf{R}^+$, en notant $S + \mathbf{R}^+ = \{x, s+t) \mid (x, s) = S, t \in \mathbf{R}^*\}$. Nous voulons définir une décomposition de l'espace $\text{sol}^D((B \times D)')$ en somme directe finie d'espaces de microsolutions locales du type 2.3 :

$$\text{sol}_S = \text{sol}^{Ds}((B_S \times D_S)'),$$

où S est un point générique de \mathcal{S} (au sens 2.3), $B_S \times D_S$ est un voisinage assez petit de S , et $(B_S \times D_S)'$ désigne ce même voisinage privé de la coupure locale correspondante :

$$(B_S \times D_S)' = B_S \times D_S \setminus C_S, \quad C_S = \bigcup_{S \in \mathcal{S} \cap (B_S \times D_S)} S + \mathbf{R}^+.$$

Notons que les espaces vectoriels sol_S ainsi définis ne dépendent pas de la taille des voisinages (pourvu que ceux-ci soient assez petits : cf. lemme

ci-après) et se recollent de façon évidente quand S parcourt \mathcal{S}^* , ensemble des points génériques au sens 2.3, en un système local sur \mathcal{S}^* d'espaces vectoriels de dimension finie (cf. 2.3).

Si de plus on prend S dans \mathcal{S}' , ouvert dense de \mathcal{S}^* formé des points qui ne sont sur aucune demi-droite $S' + \mathbf{R}^+$ issue d'un autre point S' de \mathcal{S} , il est clair qu'on a comme en 1.4 une application linéaire de « *spécialisation* »

$$\text{sp}_S : \text{sol}^D((B \times D)') \rightarrow \text{sol}_S,$$

localement constante quand S parcourt \mathcal{S}' .

Posons $B^* = B \setminus \Delta$, où Δ est l'hypersurface complexe « *de bifurcation* » (projection de la partie non générique de \mathcal{S}). Pour $x \in B^*$, $\mathcal{S}_x = \mathcal{S} \cap (\{x\} \times D)$ consiste en l points distincts, d'où sont issues l coupures $S_i + \mathbf{R}^+ (i=1, \dots, l)$; nous noterons B' l'ouvert dense des $x \in B^*$ pour lesquelles ces l coupures sont disjointes. Les composantes connexes de B' seront appelées « *régions de Stokes* ». Au-dessus de chaque région de Stokes, $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$ est un *revêtement trivial à l feuillets* (car en interdisant aux coupures de se recouvrir on interdit à leurs origines de s'échanger). Soient S_1, S_2, \dots, S_l des points choisis sur chacun des l feuillets de ce revêtement (pour une région de Stokes donnée).

PROPOSITION. *L'application linéaire $\bigoplus_{i=1}^l \text{sp}_{S_i} : \text{sol}^D((B \times D)') \rightarrow \bigoplus_{i=1}^l \text{sol}_{S_i}$ est un isomorphisme (constant sur chaque région de Stokes).*

Preuve. L'injectivité est évidente, car une détermination sur $(B \times D)'$ de fonction analytique multiforme sur $(B \times D)^*$ (théorème 2.2 i)) se prolonge à tout $B \times D$ si elle se prolonge au voisinage de chaque branche de \mathcal{S} .

La preuve de la surjectivité peut se décomposer en deux étapes.

1^{re} étape: surjectivité de l'application $\text{sol}^D((V \times D)') \rightarrow \bigoplus_{i=1}^l \text{sol}_{S_i}$ pour tout ouvert V inclus dans une région de Stokes.

Elle découle immédiatement du lemme plus général suivant, qui montre dans quelle mesure le faisceau sol^D des microsolutions est indépendant du choix de D .

LEMME. *Sous les hypothèses du théorème 2.2, soit $D_0 \subset D$ un disque de centre arbitraire tel que $\mathcal{S} \cap (V \times \partial D_0) = \emptyset$ (∂D_0 désigne le bord de D_0). Alors l'homomorphisme de spécialisation des microsolutions*

$$\text{sol}^D((V \times D_0)') \rightarrow \text{sol}^{D_0}((V \times D_0)')$$

est surjectif (et évidemment bijectif si $\mathcal{S} \cap (V \times D_0) = \mathcal{S} \cap (V \times D)$).

Remarque préliminaire. Commençons par considérer les « variations » d'une microsolution $\varphi \in \text{sol}_{(x_0, t_0)}^{D_0}$, c'est-à-dire les fonctions analytiques multiformes dans $(V \times D_0)^*$, différences de 2 déterminations d'un représentant ψ de φ . On vérifie facilement que ces variations sont des solutions de $\mathcal{I} \text{ mod. } \mathcal{O}(\cdot \times D)$, car si l'on compare au point (x_0, t_0) les germes de fonctions $P_{t_0}\psi_1$ et $P_{t_0}\psi_2$, où ψ_1 et ψ_2 sont deux déterminations de ψ en ce point, on trouve (par exemple pour un opérateur P de la forme 2.1)

$$P_{t_0}\psi_1 - P_{t_0}\psi_2 = \int K(x; t, u) \psi(x, u) du$$

(intégrale prise sur le lacet qui fait passer d'une détermination à l'autre), et cette intégrale se prolonge en fonction holomorphe dans tout le domaine d'holomorphie du noyau K .

Par conséquent, d'après la partie i) du théorème 2.2, les variations de microsolutions mod. $\mathcal{O}(\cdot \times D_0)$ se prolongent en fonctions analytiques multiformes dans $(V \times D)^*$.

Preuve du lemme. L'hypersurface $\mathcal{S} \cap (V \times D)$ se décompose en deux parties disjointes \mathcal{S}_0 et \mathcal{S}_1 avec $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S} \cap (V \times D_0)$ (et \mathcal{S}_1 éventuellement vide). Nous noterons $C_0 = \mathcal{S}_0 + \mathbf{R}^+$ et $C_1 = \mathcal{S}_1 + \mathbf{R}^+$ les coupures correspondantes. En prenant pour V une boule (par exemple), l'ouvert de Stein $(V \times D_0)' = V \times D_0 \setminus \mathcal{S}_0$ sera l'intersection des deux ouverts de Stein $V \times D \setminus C_0$ et $V \times D_0$. Soit alors $\psi_0 \in \text{Sol}^{D_0}((V \times D_0)')$. D'après Cousin, la fonction $\psi_0 \in \mathcal{O}((V \times D_0)')$ peut s'écrire $\psi_0 = \psi + \theta$, où $\psi \in \mathcal{O}(V \times D \setminus C_0)$ et $\theta \in \mathcal{O}(V \times D_0)$. Pour tout $R \in \mathcal{I}$ la fonction $R_{t_0}\psi$ sera donc, comme ψ , holomorphe dans $V \times D \setminus C_0$, et comme $R_{t_0}\psi_0$ holomorphe dans $V \times D_0$. Donc $R_{t_0}\psi$ est holomorphe dans $V \times D$ à l'exception peut-être de la partie C'_0 de la coupure C_0 située hors de $V \times D_0$.

Par ailleurs la remarque préliminaire nous dit que les variations de la microsolution φ , c'est-à-dire les différences de déterminations de ψ dans $(V \times D_0)'$, se prolongent en fonctions analytiques multiformes dans $(V \times D)^*$. On en déduit que les différences de déterminations de $R_{t_0}\psi$ sont analytiques multiformes dans $V \times D \setminus (\mathcal{S}_0 \cup \mathcal{T}_0)$, où \mathcal{T}_0 désigne l'union des droites verticales en position singulière par rapport à \mathcal{S}_0 (cf. remarque 2.1). Le fait que l'une de ces déterminations soit holomorphe dans $V \times D \setminus C'_0$ implique alors qu'elle est holomorphe dans tout $V \times D$.

2^e étape : surjectivité de l'application $\text{sol}^D((B \times D)') \rightarrow \text{sol}^D((V \times D)').$

Il s'agit là d'un problème de « prolongement horizontal des microsolutions », dans lequel l'hypothèse non caractéristique doit jouer un rôle essentiel. J'aimerais beaucoup en lire une démonstration élémentaire convaincante (une possibilité est indiquée à la fin du n° 2.5). La démonstration de Kashiwara-Kawai dans [6] (chap. III, §6, Prop. 4.6.1) fait appel aux outils sophistiqués de Kashiwara et Schapira sur le problème de Cauchy « microhyperbolique » [10].

Rappelons que modulo cette deuxième étape, nous avons achevé la démonstration de la partie ii) du théorème 2.2.

2.5. TRANSFORMÉES DE LAPLACE DES MICROSOLUTIONS

On prend la boule B assez petite pour que $\forall x \in B$, \mathcal{S}_x soit inclus dans le disque de rayon r , en notant $r\sqrt{2}$ le rayon du disque D . La situation est donc celle de 1.5 avec paramètres (avec confluences possibles de points de \mathcal{S}_x pour certaines valeurs des paramètres). On se reportera à la figure 4 de 1.5 pour y voir la définition du chemin γ , qui maintenant dépend continûment de x pour $x \in B$, ainsi que la définition des chemins γ_i , qui eux ne peuvent tous dépendre continûment de x que sur une région de Stokes B^σ , et seront donc notés γ_i^σ (l'indice σ numérote les régions de Stokes, définies en 1.4).

L'intégration sur γ permet comme en 1.5 de définir la transformation de Laplace

$$\mathcal{L} : \text{sol}^D((B \times D)') \rightarrow \mathcal{A}^r(B)/\mathcal{A}_{-r}(B)$$

où $\mathcal{A}^r(B)$ resp. $\mathcal{A}_{-r}(B)$ désigne l'espace des fonctions holomorphes dans $B \times \mathbf{C}_\tau^+$ (où $\mathbf{C}_\tau^+ = \{\tau \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re}\tau > 0\}$) vérifiant *localement au-dessus de B* des conditions de croissance analogues à celles introduites en 1.5.

On montre comme en 1.5 que \mathcal{L} est une application *injective*, qui identifie l'espace des microsolutions à un sous-espace vectoriel \mathcal{V} de $\mathcal{A}^r(B)/\mathcal{A}_{-r}(B)$. De même l'intégration sur les γ_i^σ permet de définir des transformations de Laplace locales \mathcal{L}_i^σ : au-dessus d'une région de Stokes B^σ , où l'on a numéroté $\mathcal{S}_1^\sigma, \dots, \mathcal{S}_l^\sigma$ les feuillets de \mathcal{S} , et noté $\text{sol}_i^\sigma (i=1, \dots, l)$ les espaces de microsolutions locales correspondant aux \mathcal{S}_i^σ , on pourra définir pour tout $\varphi \in \text{sol}_i^\sigma$

$$(*) \quad \mathcal{L}_i^\sigma \varphi = \int_{\gamma_i} e^{-\tau t} \psi(x, t) dt \quad \text{mod } \mathcal{A}_{-r}(B^\sigma)$$

où ψ est n'importe quel représentant de φ holomorphe dans $B^\sigma \times D \setminus \mathcal{S}$. En fait on peut même prendre ψ holomorphe dans $B^\sigma \times D \setminus \mathcal{S}_i$ (d'après le

lemme 2.4), et dans ce cas le chemin d'intégration γ_i dans (*) peut être remplacé par γ (théorème de Cauchy). Une fois ce remplacement fait, l'intégrale ne dépend que de la classe de ψ dans $\text{sol}^D((B^\sigma \times D)')$, ce qui permet de se ramener au cas où ψ est holomorphe dans $(B \times D)'$ (grâce à la résolution de la 2^e étape de la proposition 2.4).

Conclusion. Les $\mathcal{L}_i^\sigma \phi$, pour $\phi \in \text{sol}_i^\sigma$, admettent des représentants holomorphes dans tout $B \times \mathbf{C}_\tau^+$ (vérifiant les conditions de croissance $\mathcal{A}_r(B)$) et définissent donc mod. $\mathcal{A}_{-,r}(B)$ un sous-espace vectoriel \mathcal{V}_i^σ de \mathcal{V} . De plus on a une décomposition de en somme directe

$$\mathcal{V} = \bigoplus_{i=1}^l \mathcal{V}_i^\sigma$$

qui au-dessus de la région de Stokes B^σ n'est autre que l'image par $\mathcal{L} = \sum_{i=1}^l \mathcal{L}_i^\sigma$ de la décomposition $\text{sol}^D((B^\sigma \times D)') = \bigoplus_{i=1}^l \text{sol}_i^\sigma$ (cf. la proposition 2.4, dont tout ce qui précède n'est qu'une paraphrase).

Exemple. Cas où le système est simple aux points génériques de \mathcal{S} . Dans ce cas les espaces \mathcal{V}_i^σ sont à 1 dimension, engendrés par des fonctions $\phi_i^\sigma(x, \tau)$ qui *dans la région de Stokes* B^σ admettent des développements asymptotiques formels

$$(**) \quad \phi_i^\sigma(x, \tau) \propto \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_{i,k}^\sigma(x) \tau^{-k} \right) \tau^{\alpha_i} e^{-\tau S_i^\sigma(x)},$$

qui doivent se comprendre comme transformés de Laplace des développements 2.3 des microsolutions en un point simple (en prenant garde dans 2.3 de remplacer la microfonction de Dirac $\delta_{(t)}^{(\alpha_i)}$ par $\delta_{(t-S_i^\sigma(x))}^{(\alpha_i)}$, où $t - S_i^\sigma(x)$ est l'équation de la branche \mathcal{S}_i^σ).

Rappelons encore que les fonctions ϕ_i^σ sont *holomorphes dans tout* $B \times \mathbf{C}_\tau^+$, bien que les coefficients $c_{i,k}^\sigma$ de leur développement asymptotique (**) soient en général singuliers sur l'hypersurface de bifurcation Δ (et se prolongent en fonctions analytiques multiformes dans le complémentaire de cette hypersurface). En dehors de la région de Stokes B^σ , le prolongement analytique du 2nd membre de (**) ne peut en aucune façon être compris comme un développement asymptotique formel de ϕ_i^σ .

En fait, le développement asymptotique formel de ϕ_i^σ dans une autre région de Stokes $B^{\sigma'}$ se calcule à l'aide de la « *matrice de raccordement* » $(C_{i,j}^{\sigma,\sigma'})_{i,j=1,2,\dots,l} \in G1_l(\mathbf{C})$:

$$\phi_i^\sigma(x, \tau) = \sum_j C_{i,j}^{\sigma, \sigma'} \phi_j^{\sigma'}(x, \tau),$$

qui ne fait qu'exprimer l'isomorphisme de « changement de décomposition »

$$\bigoplus_i \mathcal{V}_i^\sigma \leftrightarrow \bigoplus_j \mathcal{V}_j^{\sigma'},$$

et ne dépend donc que du choix de la normalisation des générateurs ϕ_i^σ des espaces vectoriels \mathcal{V}_i^σ .

Remarquons que l'isomorphisme de changement de décomposition est attaché de façon *intrinsèque* au système microdifférentiel, c'est-à-dire qu'il ne dépend que du \mathcal{R} -module $\mathcal{M} = \mathcal{R}/\mathcal{I}$ et pas de la façon dont celui-ci est présenté comme quotient de \mathcal{R} (en effet l'espace vectoriel des microsolutions peut être défini de façon intrinsèque : $\text{sol} = \text{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}, \text{microfonctions})$). Ainsi par exemple le cas d'un point tournant de type « pli », étudié au §6 de l'article [17] de Voros, se réduit au cas de l'exemple iii) de notre §0 (ici \mathcal{M} est le système de Gauss-Manin de la catastrophe « pli », déploiement universel de la fonction $t = z^3$).

Conclusion. Tout le travail qui précède peut être considéré comme une méthode de resommation de développements asymptotiques formels du type (**) — par exemple les développements BKW des physiciens — qui acquièrent ainsi une signification exacte modulo un reste exponentiellement petit en τ , dont le taux de décroissance exponentielle est d'autant plus fort que les microsolutions peuvent être prolongées loin à droite dans le plan complexe des t ; comme indiqué à la fin de 1.5, on peut même obtenir une resommation exacte (à reste nul) si les microsolutions ont des propriétés de prolongement analytique *global* dans le plan des t avec croissance modérée à l'infini, comme c'est le cas des « *fonctions résurgentes* » d'Ecalle [5], qui justement apparaissent dans les modèles semi-classiques étudiés par Voros [17].

Mise en garde au lecteur. Les développements asymptotiques dont il est question ici n'ont pas grand-chose à voir avec ceux qu'étudient Kashiwara et Kawai dans [7]: ces derniers sont purement *locaux*, ce qui exclut la prise en compte de termes exponentiellement petits, alors que les nôtres sont en quelque sorte « semi-locaux ».

Remarque technique. Il serait intéressant, suivant une suggestion de Malgrange, d'utiliser la transformation de Laplace comme outil technique pour démontrer la proposition 2.4 (2^e étape de la preuve) de façon plus élémentaire que dans Kashiwara-Kawai [6]. L'idée consisterait à démontrer que les intégrales de Laplace $\phi(x, \tau)$, définies au départ seulement au-dessus des

régions de Stokes, admettent des prolongements analytiques au-dessus de tout B , avec contrôle uniforme en x du comportement asymptotique en τ (ce qui permet de repasser aux $\psi(x, t)$ par « Laplace inverse »). L'article [11] de Malgrange me semble contenir tout ce qu'il faut pour faire ce travail (on y étudie, au voisinage de $\tau = \infty$, le système différentiel en (x, τ) « transformée de Laplace » du système microdifférentiel considéré).

2.6. QU'EST-CE QU'UN « POINT TOURNANT » ?

Nous avons appelé « points de bifurcation » les projections des points singuliers de \mathcal{S} (relativement au feuilletage vertical). Certains points singuliers sont d'un type trivial, et ne donnent pas lieu à des singularités des développements asymptotiques : ce sont les points où le système \mathcal{M} est localement somme directe de systèmes du type 2.3 (par exemple les points où 2 nappes lisses de \mathcal{S} se coupent transversalement).

Il me semble conforme à l'usage des physiciens d'appeler « points tournants » les points de bifurcation qui sont projections de points singuliers *non triviaux* de \mathcal{S} .

Notons que la trivialité d'un point singulier ne dépend pas seulement de la géométrie de \mathcal{S} ; par exemple, en un point où deux nappes lisses de \mathcal{S} ont un contact quadratique en codimension 1, il existe deux types de systèmes holonomes simples aux points génériques ; celui de ces deux types qui n'est pas trivial est connu des physiciens sous le nom d'« intersection effective de deux singularités de Landau » (cf. [8] et [15] pour une étude mathématique de cet exemple).

3. APPENDICE SUR LE CAS RÉEL : SOLUTIONS MICROFONCTIONS DE SATO

Considérant $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}$ comme le complexifié de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$, nous nous proposons d'étudier les solutions de notre système microdifférentiel *dans le faisceau $\mathcal{C}_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}}$ des microfonctions de Sato*. Rappelons [17] que $\mathcal{C}_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}}$ est un faisceau sur le fibré $S^*(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R})$ des directions de demi-droites cotangentes à $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$, et que le support du faisceau des solutions dans $\mathcal{C}_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}}$ est inclus dans la variété caractéristique réelle du système (considérée comme sous-ensemble de $S^*(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R})$). Avec notre hypothèse non caractéristique, ce support est donc *propre à fibres finies* au-dessus de \mathbf{R}^n , de sorte que les solutions dans $\mathcal{C}_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}}$ s'identifient aux solutions dans $\mathcal{C}_{\bar{\omega}} = (\mathcal{C}_{\bar{\omega}}^+, \mathcal{C}_{\bar{\omega}}^-)$, faisceau des *familles analytiques en $x \in \mathbf{R}^n$ de microfonctions d'une variable réelle t* (cf. par exemple [14], Microlocalisation, §2).

Rappelons la définition de $\mathcal{C}_{\bar{\omega}}^+$ (celle de $\mathcal{C}_{\bar{\omega}}^-$ est analogue): c'est le faisceau sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ dont les sections sur un ouvert U sont définies comme limites inductives

$$\mathcal{C}_{\bar{\omega}}^+(U) = \lim_{\substack{\rightarrow \\ \Omega^+}} \mathcal{O}(\Omega^+)/\mathcal{O}(\Omega^+) \cap \mathcal{A}(U),$$

où $\mathcal{A}(U)$ désigne l'espace des fonctions analytiques réelles sur U , et Ω^+ parcourt la famille des « demi-voisinages imaginaires positifs » de U dans $\mathbf{R}^n \times \mathbf{C}$, c'est-à-dire :

$$\Omega^+ = \Omega \cap \mathbf{C}^+, \quad \mathbf{C}^+ = \{t \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} t > 0\},$$

Ω voisinage de U dans $\mathbf{R}^n \times \mathbf{C}$ contenant U comme sous-ensemble fermé.

Il résulte facilement de notre étude 2.2 que les solutions dans $\mathcal{C}_{\bar{\omega}}^+$ se prolongent dans le domaine complexe, en microsolutions du type 2.2. Pour éviter toute ambiguïté dans les prolongements analytiques, il sera commode de considérer que les coupures 2.4 ont été choisies dans la direction *imaginaire négative* du plan des t (au lieu de la direction réelle positive), de sorte que la transformation de Laplace \mathcal{L} de 2.5 deviendra une « transformation de Fourier » au sens de ([13], n° 1.2).

Il est alors clair qu'une microsolution $\varphi \in \operatorname{sol}^D((B \times D)')$ provient d'une solution dans $\mathcal{C}_{\bar{\omega}}^+$ si et seulement si les spécialisées $\operatorname{sp}_S(\varphi)$ sont nulles pour tout $S \in \mathcal{S}' \cap ((B \cap \mathbf{R}^n) \times D)$ dont la composante t est de partie imaginaire positive.

Conclusion. L'espace des solutions dans $\mathcal{C}_{\bar{\omega}}^+$ s'identifie au sous-espace vectoriel de $\operatorname{sol}^D((B \times D)')$ défini par les équations $\operatorname{sp}_\lambda(\varphi) = 0$, où l'indice λ numérote les composantes connexes de $\mathcal{S}' \cap ((B \cap \mathbf{R}^n) \times D^+)$, avec $D^+ = D \cap \mathbf{C}^+$ (cf. 2.4 pour la définition de \mathcal{S}').

Exemples

- i) \mathcal{M} = système de Gauss-Manin de la catastrophe « pli » (exemple iii) du §0).

\mathcal{S} est la « parabole semi-cubique » $t^2 - x^3 = 0$, et $\mathcal{S}' \cap (\mathbf{R} \times \mathbf{C}^+)$ a une seule composante connexe $\{(t, x) \mid x < 0, t = i|x|^{3/2}\}$. L'espace des solutions microfonctions de Sato est donc donné par 1 équation dans l'espace à 2 dimensions des microsolutions. Il est donc à 1 dimension.

- ii) \mathcal{M} = système de Gauss-Manin de la catastrophe « fronce » (déploiement universel de la fonction $t = z^4$)

\mathcal{S} est la complexifiée de la « queue d'aronde » de $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$. La courbe de bifurcation dans \mathbf{R}^2 a deux composantes dont l'une est la « caustique » $x_2^2 - x_1^3 = 0$, l'autre étant le « lieu de Maxwell » $x_2 = 0$. Au-dessus de l'in-

térieur de la caustique (zone hachurée (1) sur la figure 6) les trois nappes de \mathcal{S} sont réelles, alors qu'au-dessus de la zone non hachurée deux de ces nappes deviennent imaginaires conjuguées, en s'échangeant entre elles à la traversée du lieu de Maxwell

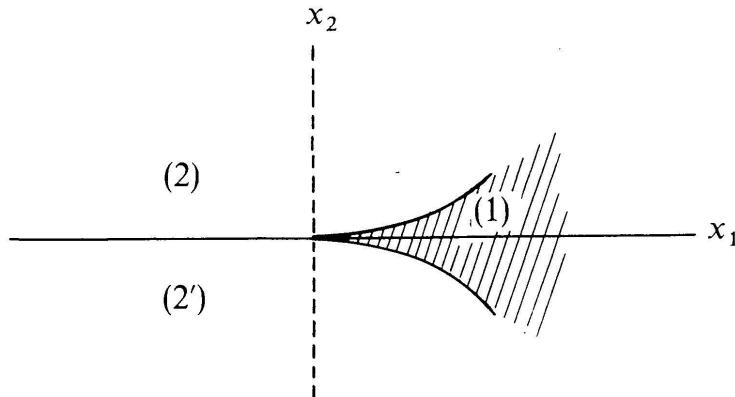


FIGURE 6

On voit ainsi que $\mathcal{S}' \cap (\mathbf{R}^2 \times \mathbf{C}^+)$ a deux composantes connexes (nappes imaginaires positives au-dessus des zones (2) et (2'), se raccordant transversalement le long de la courbe de self-intersection de la queue d'aronde). L'espace des solutions microfonctions de Sato est donc donné par 2 équations $sp_{(2)} = 0$ et $sp_{(2')} = 0$ dans l'espace à 3 dimensions des microsolutions. Ces deux équations sont linéairement indépendantes, car elles correspondent aux deux composantes locales du système \mathcal{M} au voisinage de la courbe de self-intersection de la queue d'aronde (au voisinage de cette courbe \mathcal{M} est une somme directe de deux systèmes simples). Par conséquent l'espace des solutions microfonctions de Sato est à une dimension.

Remarque : En fait les deux exemples ci-dessus sont des systèmes à caractéristique simple (comme tous les systèmes de Gauss-Manin de déploiements versels de fonctions : cf. [14] Microloc., §7), et l'on dispose d'arguments plus élégants pour montrer que l'espace des solutions microfonctions de Sato est *toujours à 1 dimension pour de tels systèmes* (une « transformation de contact quantifiée » permet de ramener tous ces systèmes à la forme simple 2.3).

La méthode illustrée ci-dessus a cependant l'avantage de s'appliquer aussi bien aux systèmes dont la variété caractéristique n'est pas lisse.

RÉFÉRENCES

- [1] BALIAN, R. and C. BLOCH. Solution of the Schrödinger Equation in Terms of Classical Paths. *Ann. of Physics* 85 (1974), 514-545.
- [2] BJÖRK, J. E. *Rings of differential operators*. North-Holland Math. Library, vol. 21 (1979).
- [3] —— The reconstruction theorem. (Exposé au Séminaire Goulaouic-Schwartz, nov. 1981).
- [4] CUONG, N. T. Appendice C de l'article de N. T. Dai, N. H. Duc, F. Pham, *Bull. Soc. Math. France, Mémoire n° 6* (1981).
- [5] ECALLE, J. *Les fonctions résurgentes*. Publ. Math., Univ. Paris-Sud (1981).
- [6] KASHIWARA, M. and T. KAWAI. On holonomic systems of microdifferential equations III. *Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ.* 17, 3 (1981), 813-979.
- [7] KASHIWARA, M. and T. KAWAI. Second microlocalization and asymptotic expansions. In *Complex Analysis, Microlocal Calculus & Relativistic Quantum Theory*, Les Houches (1979), Lecture Notes in Physics, n° 126.
- [8] KASHIWARA, M., T. KAWAI and T. OSHIMA. A study of Feynman integrals by microdifferential equations. *Commun. Math. Phys.* 60 (1978), 97-130.
- [9] KASHIWARA, M. and T. OSHIMA. Systems of differential equations with regular singularities... *Ann. of Math.* 106 (1977), 145-200.
- [10] KASHIWARA, M. and P. SCHAPIRA. Microhyperbolic systems. *Acta. Math.* 142 (1979), 1-55.
- [11] MALGRANGE, B. Déformations de systèmes différentiels et microdifférentiels. (A paraître au Séminaire E.N.S., 1979-80).
- [12] —— Rapport sur Les théorèmes d'indice de Boutet de Monvel et Kashiwara. (A paraître dans les C.R. du Coll. « Analyse et Topologie sur les espaces singuliers » (Luminy 1981), coll. Astérisque).
- [13] PHAM, F. Caustiques, phase stationnaire et microfonctions. *Acta Math. Vietnamica* 2, 2 (1977), 35-101.
- [14] —— *Singularités des systèmes différentiels de Gauss-Manin*. Progress in Math., 2, Birkhäuser, 1980.
- [15] —— Déploiements de singularités de systèmes holonomes. *C.R. Acad. Sci.* 289, série A (1979), 133.
- [16] —— Calcul microdifférentiel complexe et méthode semi-classique. (Exposé à la 36^e rencontre entre physiciens théoriciens et mathématiciens, R.C.P. n° 25, I.R.M.A. Strasbourg, 1983).
- [17] SATO, M., T. KAWAI and M. KASHIWARA. Hyperfunctions and pseudodifferential equations. *Lectures Notes in Math.* 287 (1973), 265-529.
- [18] VOROS, A. The return of the quartic oscillator. Preprint, C.E.N. Saclay, 1981, soumis aux *Ann. Inst. Poincaré (Série A)*.
- [19] —— Problème spectral de Sturm-Liouville: le cas de l'oscillateur quartique. *Séminaire Bourbaki* 35^e année (1982/83), n° 602.

(Reçu le 31 mai 1983)

Frédéric Pham

Département de Mathématiques
 I.M.S.P., Parc Valrose
 06034 Nice Cedex
 France