**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique

**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

**Band:** 30 (1984)

**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** IDÉAUX DE GERMES D'OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS À UNE VARIABLE

**Autor:** Briançon, J. / Maisonobe, Ph.

**Kapitel:** I. Base standard d'un idéal de D

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-53819

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 22.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

En II.A, nous explicitons complètement les idéaux de $\mathscr{D}$ à singularité régulière homogène. Cela nous permet de donner « les escaliers possibles » ou, ce qui revient au même, de retrouver dans le cas local une inégalité de P. Strömbeck ([S]).

En II.B, nous donnons une démonstration du théorème de structure des $\mathscr{D}$-modules holonomes à singularité régulière (ou des quotients $\mathscr{D}/I$, où $I$ est à singularité régulière) dû à L. Boutet de Monvel ([B.M.]). Nous utilisons pour cela l'idée essentielle qui nous a été apportée par B. Malgrange, d'étudier les classes d'isomorphismes $E(I) \underset{v}{\overset{u}{\rightleftarrows}} F(I)$ ($u$ morphisme canonique et $v$ morphisme de variation). $E(I)$ et $F(I)$ sont formés de fonctions de classe de Nilsson et une fois décomposé le couple $(E(I), F(I))$, il suffit d'appliquer les résultats de I.C.

En II.C, nous donnons la structure possible des solutions d'un seul opérateur différentiel à singularité régulière; plus précisément nous déterminons les classes d'isomorphismes $E(\mathscr{D}P) \underset{v}{\overset{u}{\rightleftarrows}} F(\mathscr{D}P)$ pour un tel opérateur $P$ (ou encore des classes d'isomorphismes des quotients $\mathscr{D}/\mathscr{D}P$).

Nous sommes heureux de remercier F. Pham et J.E. Björk de l'aide et des encouragements qu'ils nous ont prodigués.

## I. Base standard d'un idéal de $\mathscr{D}$

$\mathbf{C}\{x\}$ désigne l'anneau local des séries convergentes d'une variable et $v$ la valuation naturelle sur $\mathbf{C}\{x\}$ : pour $a$ élément non nul de $\mathbf{C}\{x\}$,

$$v(a) = \sup\{n \in \mathbf{N} \mid a \in \mathbf{C}\{x\}x^n\}.$$

$D$ désigne l'opérateur différentiel $\dfrac{d}{dx}$. Dans tout l'article, idéal de $\mathscr{D}$ signifie idéal à gauche.

### I.A. Divisions dans $\mathscr{D}$

Un élément non nul $P$ de $\mathscr{D}$ s'écrit de manière unique

$$P = a_d D^d + a_{d-1} D^{d-1} + \dots + a_0$$

avec $d \in \mathbf{N}$; $(a_d, a_{d-1}, \dots, a_0) \in \mathbf{C}\{x\}^{d+1}$; $a_d \neq 0$.

Nous définissons l'*exposant privilégié* de $P$ :

$$\exp(P) = (v(P), d(P)) \in \mathbf{N}^2$$

$$\begin{cases} v(P) = \text{la valuation naturelle de } a_d \text{ dans } \mathbf{C}\{x\}\,, \\ d(P) = d \text{ le degré de } P\,. \end{cases}$$

Pour $P = a_d D^d + a_{d-1} D^{d-1} + \dots + a_0$ et $Q = b_e D^e + b_{e-1} D^{e-1} + \dots + b_0$, la règle de multiplication dans $\mathscr{D}$ donne (en prenant $d(0) = -\infty$):

$$QP = b_e a_d D^{d+e} + S\,, \qquad d(S) < d + e\,.$$

On en déduit facilement que pour deux éléments $P$ et $Q$ non nuls de $\mathscr{D}$: $\exp(QP) = \exp(Q) + \exp(P)$, et qu'on a l'algorithme de division:

LEMME 1. *Etant donné* $A \in \mathscr{D}$, $P \in \mathscr{D}$ *non nul d'exposant privilégié* $(v, d)$, *il existe un couple unique* $(Q, R)$ *d'éléments de* $\mathscr{D}$ *tel que:*

$$\begin{cases} A = QP + R\,, \\ R = \displaystyle\sum_{\substack{0 \leqslant k < v \\ d(A) \geqslant l \geqslant d}} r_{k,l}\, x^k D^l + S\,, \qquad d(S) < d\,, \qquad r_{k,l} \in \mathbf{C}\,. \end{cases}$$

Introduisons maintenant, pour un idéal à gauche non nul $I$ de $\mathscr{D}$, l'ensemble $\mathrm{Exp}(I)$ des exposants privilégiés des éléments non nuls de $I$, puis:

a) $p$ = le degré minimum des éléments non nuls de $I$,

b) pour $j \geqslant p$, $\alpha_j$ = la valuation minimum des éléments de $I$ de degré $j$.

Du fait que $I$ est un idéal à gauche, en appliquant la règle $\exp(QP) = \exp(Q) + \exp(P)$, on s'aperçoit que $\mathrm{Exp}(I) + \mathbf{N}^2 = \mathrm{Exp}(I)$ et en particulier que la suite $(\alpha_j)_{j \geqslant p}$ est décroissante;

c) $q = \inf\{j \mid \alpha_j = \alpha_{j+1} = \dots\}$.

En regroupant ces définitions on obtient la caractérisation de *l'escalier* $\mathrm{ES}(I)$ *d'un idéal* $I$:

$$\mathrm{ES}(I) = \{(\alpha_p, p); (\alpha_{p+1}, p+1); \dots; (\alpha_q, q)\}\,,$$
$$\mathrm{Exp}(I) = \Big(\bigcup_{p \leqslant j < q} \{(\alpha_j, j) + \mathbf{N} \times \{0\}\}\Big) \cup \{(\alpha_q, q) + \mathbf{N}^2\}\,,$$

(où $\cup$ désigne la réunion disjointe).

Nous appelons *base standard de* $I$ un système $\{F_p, F_{p+1}, \dots, F_q\}$ d'éléments de $I$ tels que $p \leqslant j \leqslant q$, $\exp(F_j) = (\alpha_j, j)$.

PROPOSITION 2 (division par un idéal). *Etant donné un idéal* $I$ *non nul de* $\mathscr{D}$ *d'escalier* $\{(\alpha_p, p); \dots; (\alpha_q, q)\}$ *de base standard* $\{F_p, F_{p+1}, \dots, F_q\}$, *et un élément* $A$ *de* $\mathscr{D}$, *il existe un système unique* $(Q_p, \dots, Q_{q-1}) \in \mathbf{C}\{x\}^{q-p}$, $Q_q \in \mathscr{D}$, $R \in \mathscr{D}$ *tel que:*

$$\begin{cases} A = Q_p F_p + \dots + Q_q F_q + R, \\ R = \sum_{l=p}^{d(A)} \sum_{k=0}^{\alpha_l - 1} r_{k,l}\, x^k D^l + S, \qquad d(S) < p, \qquad r_{k,l} \in \mathbf{C}. \end{cases}$$

*De plus* $A \in I$ *si et seulement si* $R = 0$.

*Preuve.* En ce qui concerne l'existence, on commence par diviser $A$ par $F_q$ suivant le lemme 1, puis en faisant le premier pas de la division du reste obtenu successivement par $F_{q-1}, \dots, F_p$.

Pour l'unicité, on constate que les conditions imposées sur le reste impliquent $\exp(R) \notin \operatorname{Exp}(I)$ pour $R$ non nul; par conséquent: $A \in I \Leftrightarrow R = 0$. Les détails sont laissés au lecteur.

Une base standard de $I$ forme donc un système de générateurs de $I$; comme d'habitude, une base standard plus belle que les autres s'obtient en faisant la division de $x^{\alpha_j} D^j$ par $\{F_p, \dots, F_q\}$: en notant $R_j$ le reste obtenu,

$$\{G_p = x^{\alpha_p} D^p - R_p, \dots, G_q = x^{\alpha_q} D^q - R_q\}$$

est la base standard en question.

Lorsque l'on filtre $\mathscr{D}$ par le degré, on note $\operatorname{gr}\mathscr{D} = \mathbf{C}\{x\}[\xi]$ le gradué associé et $\operatorname{gr} I$ l'idéal homogène engendré par les symboles principaux des éléments de $I$; par définition de $\operatorname{Exp}(I)$, $\operatorname{gr} I$ est engendré par les monômes $(x^{\alpha_j}\xi^j)_{p \leqslant j \leqslant q}$. Cela permet en particulier de calculer, en fonction de l'escalier de $I$:

$$\dim_{\mathbf{C}} \frac{\mathbf{C}\{x\}[\xi]}{\operatorname{gr} I + (x, \xi)^n} = \# \{(\alpha, j) \in \mathbf{N}^2 \mid (\alpha, j) \notin \operatorname{Exp}(I) \quad \text{et} \quad \alpha + j < n\}.$$

Ainsi la multiplicité de la variété caractéristique $V(\mathscr{D}/I)$ définie par $\operatorname{gr} I$ au voisinage de 0 dans $\mathbf{C}^2$ est $\alpha_q + p$: il s'agit de la multiplicité de $\mathscr{D}/I$ à l'origine (voir [L]).

## I.B. Relations entre les éléments d'une base standard

$I$ désigne toujours un idéal non nul de $\mathscr{D}$ d'escalier $\{(\alpha_p, p); \dots; (\alpha_q, q)\}$ et $(F_p, \dots, F_q)$ une base standard de $I$ que nous supposons désormais normalisée:

$$d(F_j - x^{\alpha_j} D^j) < j \qquad \text{pour } j = p, \dots, q.$$

Par division de $x^{\alpha_{j-1} - \alpha_j} F_j$ par $\{F_{j-1}, \dots, F_p\}$ nous obtenons les relations

$$\mathscr{R}_j : x^{\alpha_{j-1} - \alpha_j} F_j = (D + u_{j,j-1}) F_{j-1} + u_{j,j-2} F_{j-2} + \dots + u_{j,p} F_p \; (u_{j,k} \in \mathbf{C}\{x\}),$$

pour tout $p + 1 \leqslant j \leqslant q$.

PROPOSITION 3. *Les relations* $(\mathscr{R}_j)_{p+1 \leqslant j \leqslant q}$ *forment une base des relations entre les éléments de la base* $(F_p, ..., F_q)$ *de* $I$ *et on a la résolution libre de* $I$ *comme* $\mathscr{D}$*-module à gauche:*

$$0 \to \mathscr{D}^{q-p} \xrightarrow{\mathscr{R}} \mathscr{D}^{q-p+1} \to I \to 0 .$$

*Preuve.* La matrice $\mathscr{R}$ des relations $(\mathscr{R}_j)_{p+1 \leqslant j \leqslant q}$ est la transposée de la matrice

$$\begin{bmatrix} D + u_{p+1,p} & u_{p+2,p} & \cdots & u_{q,p} \\ -x^{\alpha_p - \alpha_{p+1}} & D + u_{p+2,p+1} & & \vdots \\ 0 & -x^{\alpha_{p+1} - \alpha_{p+2}} & & \vdots \\ & 0 & \cdot & u_{q,q-2} \\ \vdots & \vdots & \cdot & \\ & & & D + u_{q,q-1} \\ 0 & 0 & \cdots & -x^{\alpha_{q-1} - \alpha_q} \end{bmatrix}$$

et ces relations sont donc libres.

Soit $A_pF_p + A_{p+1}F_{p+1} + ... + A_qF_q = \underset{\smile}{0}$ une relation; étant donnés deux entiers $k$ et $l$, $k \geqslant 0$, $p \leqslant l \leqslant q + 1$, nous dirons que la relation $\mathscr{A} = (A_p, ..., A_q)$ est dans $\Omega_{k,l}$ si:

$$d(A_j) \leqslant k \quad \text{pour } l \leqslant j \leqslant q ,$$
$$d(A_j) < k \quad \text{pour } p \leqslant j < l .$$

Nous allons montrer par récurrence la propriété $\omega_{k,l}$: toute relation appartenant à $\Omega_{k,l}$ est engendrée par les relations $(\mathscr{R}_j)_{p+1 \leqslant j \leqslant q}$. Par des considérations de degré la propriété $\omega_{0,p}$ est vraie ainsi que l'implication $\omega_{k-1,p} = \omega_{k,q+1} \Rightarrow \omega_{k,q}$.

Il ne reste donc plus qu'à démontrer que $\omega_{k,l+1}$ entraîne $\omega_{k,l}$ pour $p \leqslant l < q$ et $k \geqslant 1$. Or si $\mathscr{A} = (A_p, ..., A_q)$ est une relation appartenant à $\Omega_{k,l}$ on peut écrire $A_l = b\,D^k + A'_l$ avec $b \in \mathbf{C}\{x\}$ et $d(A'_l) < k$; alors $\mathscr{A} - b\,D^{k-1}\,\mathscr{R}_{l+1}$ appartient à $\Omega_{k,l+1}$ ce qui permet d'appliquer l'hypothèse de récurrence.

Nous allons maintenant montrer que $F_p$ et $F_q$ engendrent l'idéal $I$; pour cela nous utilisons un lemme classique (voir [P], lemme 10.3.1, p. 95).

LEMME 4. *Soit* $M$ *un* $\mathscr{D}$*-module à gauche tel que le* $\mathbf{C}\{x\}$*-module sous-jacent soit de type fini; alors* $M$ *est un* $\mathbf{C}\{x\}$*-module libre.*

*Preuve.* La démonstration étant très rapide nous nous permettons de la recopier. Soit $(e_1, ..., e_p)$ un système de générateur de $M$ sur $\mathbf{C}\{x\}$ induisant

une base de l'espace vectoriel $M/(x)M$ (possible par le lemme de Nakayama). Supposons l'existence d'une relation $\sum_{i=1}^{p} u_i e_i = 0$ entre les générateurs à coefficients dans $\mathbf{C}\{x\}$ d'ordre $\omega$ = minimum des valuations des coefficients $u_i$ non nuls; en appliquant $D$ on trouve la relation

$$\sum_{i=1}^{p} (u_i D + u_i')e_i = \sum_{i=1}^{p} u_i' e_i + \sum_{i=1}^{p} u_i(\sum_{k=1}^{p} v_{ik} e_k) = 0$$

(en prenant $D e_i = \sum_{k=1}^{p} v_{ik} e_k$); on peut l'écrire sous la forme

$$\sum_{i=1}^{p} (u_i' + \sum_{j=1}^{p} u_j v_{ji})e_i = 0 .$$

où on s'aperçoit que c'est une relation d'ordre $\omega - 1$. Une relation d'ordre 0 étant impossible, le lemme est démontré.

PROPOSITION 5. *Soit $I$ un idéal non nul de $\mathscr{D}$, d'escalier*

$$\{(\alpha_p, p) ; \dots ; (\alpha_q, q)\} ,$$

*et soit $\{F_p, \dots, F_q\}$ une base standard:*

a) *$q = p$ équivaut à $I$ monogène, et $I = \mathscr{D}F_p$;*

b) *$q > p$ alors $I = \mathscr{D}F_p + \mathscr{D}F_q$.*

*Preuve.* Introduisons le $\mathscr{D}$-module $M = I/(\mathscr{D}F_p + \mathscr{D}F_q)$. En appliquant la proposition 2, tout élément $A$ de $I$ s'écrit

$$A = Q_p F_p + \dots + Q_{q-1} F_{q-1} + Q_q F_q ,$$

où $(Q_p, \dots, Q_{q-1})$ sont dans $\mathbf{C}\{x\}$; $M$ est donc un $\mathbf{C}\{x\}$-module de type fini (engendré par $F_{p+1}, \dots, F_{q-1}$).

D'autre part, pour tout élément $A$ de $I$, il existe un entier $\alpha$ et $B \in \mathscr{D}$ tels que $x^\alpha A = B F_p$: il suffit pour cela de diviser $x^\alpha A$ par $F_p$ (lemme 1) et de se souvenir de la définition de l'escalier de $I$.

Ainsi $M = 0$ d'après le lemme 4.

## I.C. SOLUTIONS ANALYTIQUES ET MICRO-FONCTIONS

Notons, pour $\varepsilon > 0$:

$D_\varepsilon = \{x \in \mathbf{C} \mid |x| < \varepsilon\}$,

$\dot{D}_\varepsilon = \{x \in \mathbf{C} \mid 0 < |x| < \varepsilon\}$,

$\tilde{D}_\varepsilon = \{x \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Re}(x) < \mathrm{Log}\varepsilon\}$ le revêtement universel du disque pointé muni de sa projection $\pi : \tilde{D}_\varepsilon \to \dot{D}_\varepsilon : \pi(y) = e^y$.

On considère les espaces de fonctions analytiques $\mathcal{O}(D_\varepsilon) \subset \mathcal{O}(\dot{D}_\varepsilon)$ comme sous-espaces (par $\pi^*$) de l'espace des fonctions analytiques multiforme $\mathcal{O}(\tilde{D}_\varepsilon)$ sur $\dot{D}_\varepsilon$.

Les opérateurs différentiels à coefficients analytiques dans $D_\varepsilon$ opèrent de manière naturelle sur $\mathcal{O}(D_\varepsilon)$, $\mathcal{O}(\dot{D}_\varepsilon)$ et $\mathcal{O}(\tilde{D}_\varepsilon)$:

$$\begin{cases} a(x) \cdot f(y) = a(e^y) f(y), \\ D \cdot f(y) = f'(y) e^{-y}. \end{cases}$$

Et cette action commute avec la monodromie:

$$M \cdot f(y) = f(y + 2i\pi),$$

monodromie laissant fixe les éléments de $\mathcal{O}(\dot{D}_\varepsilon)$.

Enfin on peut définir le morphisme de variation $v$: $\mathcal{O}(\tilde{D}_\varepsilon)/\mathcal{O}(D_\varepsilon) \to \mathcal{O}(\tilde{D}_\varepsilon)$ par:

$$v \cdot f(y) = (M - id) \cdot f(y) = f(y + 2i\pi) - f(y).$$

En définitive, en passant à la limite inductive pour $\varepsilon \to 0$, on construit un couple de $\mathcal{D}$-modules:

$$\mathcal{A} = \varinjlim \mathcal{O}(\tilde{D}_\varepsilon),$$

$$\mathcal{M} = \varinjlim \mathcal{O}(\tilde{D}_\varepsilon)/\mathcal{O}(D_\varepsilon)$$

muni des applications **C**-linéaires:

$$\mathcal{A} \underset{v}{\overset{u}{\rightleftarrows}} \mathcal{M}$$

$$\begin{cases} u \text{ application canonique de passage au quotient}, \\ v \text{ morphisme de variation}, \end{cases}$$

qui commutent avec les actions $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{A}$ et $\mathcal{M}$. De plus $v \circ u + id$ et $u \circ v + id$ sont les morphismes de monodromie sur $\mathcal{A}$ et $\mathcal{M}$ respectivement.

On appelle solution analytique d'un idéal $I$ de $\mathcal{D}$ un élément $f$ de $\mathcal{A}$ annulé par les opérateurs appartenant à $I$, et on note $E(I) \subset \mathcal{A}$ le sous-espace vectoriel des solutions analytiques de $I$; on définit de même le sous-espace $F(I) \subset \mathcal{M}$ des solutions micro-fonctions de $I$. En un mot, on obtient le couple

$$E(I) \underset{v}{\overset{u}{\rightleftarrows}} F(I)$$

des solutions de $I$.

PROPOSITION 6. *Soit $I$ un idéal non nul de $\mathscr{D}$, d'escalier*

$$\{(\alpha_p, p) ; \dots ; (\alpha_q, q)\}, \quad \{F_p, \dots, F_q\}$$

*une base standard de $I$, $E(I)$ et $F(I)$ les espaces de solutions analytiques et micro-fonctions de $I$:*

a) $\dim E(I) = p$ *et les solutions analytiques de $I$ sont les solutions analytiques de $F_p$.*

b) $\dim F(I) = \alpha_q$ *et les solutions micro-fonctions de $I$ sont les solutions micro-fonctions de $F_q$.*

c) *Etant données une base $(f_1, \dots, f_p)$ de $E(I)$ et une base*

$$(<g_1>, \dots, <g_{\alpha_q}>)$$

*de $F(I)$, le morphisme canonique*

$$\mathscr{D}/I \xrightarrow{\eta} \mathscr{D}\left[(f_1, \dots, f_p), (<g_1>, \dots, <g_{\alpha_q}>)\right] \subset \mathscr{A}^p \oplus \mathscr{M}^{\alpha_q}$$

*est un isomorphisme de $\mathscr{D}$-modules.*

*Preuve.* a) Par les théorèmes classiques sur les équations différentielles, nous savons que l'espace des solutions analytiques de $F_p$ est de dimension $p$; il nous suffit donc de montrer que toute solution analytique de $F_p$ est solution de $F_q$ (proposition 5). Par division (lemme 1) nous savons qu'il existe $\alpha$ entier et $Q \in \mathscr{D}$ tel que $x^\alpha F_q = Q F_p$; on en déduit que $F_p \cdot f = 0$ implique $x^\alpha F_q \cdot f = 0$ donc $F_q \cdot f = 0$ pour $f \in \mathscr{A}$.

b) Les relations entre les éléments de la base standard (proposition 3) peuvent s'écrire:

$$D \begin{bmatrix} F_p \\ F_{p+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \\ F_{q-1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} F_p \\ F_{p+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \\ F_{q-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ x^{\alpha_{q-1}-\alpha_q} F_q \end{bmatrix}$$

où $A$ est la matrice à coefficients analytiques:

$$\begin{bmatrix} -u_{p+1,p} & x^{\alpha_p-\alpha_{p+1}} & 0 & & 0 \\ -u_{p+2,p} & & \cdot & & 0 \\ \vdots & & & \cdot & \\ & & & & x^{\alpha_{q-2}-\alpha_{q-1}} \\ -u_{q,p} & \cdots & & & -u_{q,q-1} \end{bmatrix}$$

si $< g >$ est une solution micro-fonction de $F_q$, $F_q\, g$ est analytique et :

$$D \begin{bmatrix} F_p \cdot g \\ \vdots \\ F_{q-1} \cdot g \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} F_p \cdot g \\ \vdots \\ F_{q-1} \cdot g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x^{\alpha_{q-1}-\alpha_q} F_q \cdot g \end{bmatrix}$$

Ce qui signifie que $(F_p \cdot g, ..., F_{q-1} \cdot g)$ est solution du système différentiel analytique au voisinage de 0; donc $F_p \cdot g$ est analytique et $F_p < g > = 0$. C'est-à-dire que toute solution micro-fonction de $F_q$ est solution micro-fonction de $I$.

Il nous reste à montrer que la dimension de l'espace des solutions micro-fonctions de $F_q = x^{\alpha_q} D^q + ...$ est $\alpha_q$; on a le diagramme commutatif suivant, dans lequel les lignes et les colonnes sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & K \arrow[d] & E(F_q) \arrow[d] & F(F_q) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathbf{C}\{x\} \arrow[r] \arrow[d, "F_q \cdot"'] & \mathscr{A} \arrow[r] \arrow[d, "F_q \cdot"'] & \mathscr{M} \arrow[r] \arrow[d, "F_q \cdot"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{C}\{x\} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{A} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{M} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & L \arrow[d] & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

D'après le théorème de l'indice de B. Malgrange ([$M_1$] et [$M_3$]) dim $K$ $-$ dim $L = q - \alpha_q$, et on a vu au point a) que dim $E(F_q) = q$; le lemme du serpent fournit alors dim $F(F_q) = \alpha_q$.

c) Si $P \in \mathscr{D}$ non nul donne par passage au quotient par $I$ un élément du noyau de $\eta$, $P$ a au moins $p$ solutions analytiques indépendantes et $\alpha_q$ solutions micro-fonctions indépendantes; d'après les parties a) et b) appliquées à $\mathscr{D}P$, l'exposant privilégié de $P$ est dans $(\alpha_q, p) + \mathbf{N}^2$. En divisant par $F_q$ on voit alors que Ker $\eta$ est un $\mathbf{C}\{x\}$-module de type fini; d'autre part, il existe un entier $\alpha$ tel que $x^\alpha P$ soit multiple de $F_p$. Le lemme 4 implique Ker $\eta = 0$.

On obtient comme corollaire l'inégalité de Bernstein sur la dimension de la variété caractéristique d'un $\mathscr{D}$-module, dans notre cas bien particulier:

COROLLAIRE 7. *Si $I$ est un idéal de $\mathscr{D}$ tel que $p = \dim E(I) = 0$ et $\alpha_q = \dim F(I) = 0$, alors $I = \mathscr{D}$.*

COROLLAIRE 8. *Si $I_1, I_2, ..., I_r$ sont des idéaux de $\mathscr{D}$ vérifiant*

$$E = E(I_1) + ... + E(I_r) = E(I_1) \oplus E(I_2) ... \oplus E(I_r),$$
$$F = F(I_1) + ... + F(I_r) = F(I_1) \oplus F(I_2) ... \oplus F(I_r),$$

*alors l'injection canonique*

$$\frac{\mathscr{D}}{I_1 \cap I_2 ... \cap I_r} \to \frac{\mathscr{D}}{I_1} \oplus \frac{\mathscr{D}}{I_2} ... \oplus \frac{\mathscr{D}}{I_r}$$

*est un isomorphisme et* $E(I_1 \cap I_2 ... \cap I_r) = E$, $F(I_1 \cap I_2 ... \cap I_r) = F$.

*Preuve.* Par induction on est ramené à démontrer le corollaire pour $r = 2$; on remarque que $E(I_1 + I_2) = E(I_1) \cap E(I_2) = 0$ et $F(I_1 + I_2) = F(I_1) \cap F(I_2) = 0$ par hypothèse; d'après le corollaire 7, $I_1 + I_2 = \mathscr{D}$ et de la suite exacte

$$0 \to \frac{\mathscr{D}}{I_1 \cap I_2} \to \frac{\mathscr{D}}{I_1} \oplus \frac{\mathscr{D}}{I_2} \to \frac{\mathscr{D}}{I_1 + I_2} \to 0$$

on tire l'isomorphisme cherché.

D'autre part on a toujours $E(I_1 \cap I_2) \supset E(I_1) + E(I_2)$ et $F(I_1 \cap I_2) \supset F(I_1) + F(I_2)$. Choisissons $A_1 \in I_1$ et $A_2 \in I_2$ tels que $1 = A_1 + A_2$; alors pour tout $\varphi \in E(I_1 \cap I_2)$, $\varphi = A_1\varphi + A_2\varphi$. Si $P_1$ est dans $I_1$, $P_1 A_2 = P_1 - P_1 A_1$ appartient à $I_1 \cap I_2$ et donc $P_1 A_2 \varphi = 0$ ce qui prouve que $A_2\varphi \in E(I_1)$. On montrerait de même que $A_1\varphi \in E(I_2)$ et en conséquence que $E(I_1 \cap I_2) = E(I_1) + E(I_2)$. Le raisonnement est identique pour $F(I_1 \cap I_2) = F(I_1) + F(I_2)$.