Introduction

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **30 (1984)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

L'Enseignement Mathématique, t. 30 (1984), p. 7-38

IDÉAUX DE GERMES D'OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS À UNE VARIABLE

par J. BRIANÇON et Ph. MAISONOBE

INTRODUCTION

Notre but dans ce travail est de décrire de la manière la plus explicite possible les idéaux (à gauche) de l'anneau $\mathscr{D}$ des germes d'opérateurs différentiels analytiques d'une variable complexe. Notre apport repose pour l'essentiel sur le procédé, élémentaire s'il en est, de la division. La plupart des résultats présentés ici étaient déjà connus; nous les démontrons de façon simple en y apportant parfois quelques précisions.

En I.A, nous montrons comment recopier [Br] pour faire des divisions dans $\mathscr{D}$ et introduisons un système particulier $(F_p, ..., F_q)$ de générateurs d'un idéal I de $\mathscr{D}$, appelé base standard de I. Soit $P = a_d(x)D^d + ... + a_0(x)$ un élément de $\mathscr{D}$ de degré d; appelons valuation de P, la valuation naturelle de $a_d(x)$ dans $\mathbf{C}\{x\}$; disons seulement que F_p (resp. F_q) est un élément de I de degré (resp. valuation) minimal quelconque parmi ceux de valuation (resp. degré) minimale.

En I.B, nous explicitons les relations entre les éléments d'une base standard, ce qui nous permet de donner une présentation de I sous la forme

$$0 \to \mathscr{D}^{q-p} \to \mathscr{D}^{q-p+1} \to I \to 0 .$$

En « divisant », on montre $I = \mathscr{D}F_p + \mathscr{D}F_q$. Nous trouvons donc deux générateurs promis par l'utilisation du théorème de J.T. Stafford ([Bj]; chap. I, th. 8.18).

En I.C, nous examinons les questions sous l'angle des systèmes d'équations différentielles. On y établit que les solutions analytiques de I, $E(I)$, (resp. microfonctions, $F(I)$) dans un disque coupé sont données par les solutions de l'opérateur F_p (resp. F_q). Les théorèmes de Cauchy et de l'indice de Malgrange ([M_1] et [M_3]) nous permettent d'en déterminer le nombre. Toujours en « divisant », on montre alors que ces deux types de solutions déterminent l'idéal: si un opérateur P s'annule sur $E(I)$ et $F(I)$, il appartient à l'idéal I.

En II.A, nous explicitons complètement les idéaux de $\mathcal{D}$ à singularité régulière homogène. Cela nous permet de donner « les escaliers possibles » ou, ce qui revient au même, de retrouver dans le cas local une inégalité de P. Strömbeck ([S]).

En II.B, nous donnons une démonstration du théorème de structure des $\mathcal{D}$-modules holonomes à singularité régulière (ou des quotients $\mathcal{D}/I$, où I est à singularité régulière) dû à L. Boutet de Monvel ([B.M.]). Nous utilisons pour cela l'idée essentielle qui nous a été apportée par B. Malgrange, d'étudier les classes d'isomorphismes $E(I) \underset{v}{\overset{u}{\rightleftarrows}} F(I)$ (u morphisme canonique et v morphisme de variation). $E(I)$ et $F(I)$ sont formés de fonctions de classe de Nilsson et une fois décomposé le couple $\big(E(I), F(I)\big)$, il suffit d'appliquer les résultats de I.C.

En II.C, nous donnons la structure possible des solutions d'un seul opérateur différentiel à singularité régulière; plus précisément nous déterminons les classes d'isomorphismes $E(\mathcal{D}P) \underset{v}{\overset{u}{\rightleftarrows}} F(\mathcal{D}P)$ pour un tel opérateur P (ou encore des classes d'isomorphismes des quotients $\mathcal{D}/\mathcal{D}P$).

Nous sommes heureux de remercier F. Pham et J.E. Björk de l'aide et des encouragements qu'ils nous ont prodigués.

I. Base standard d'un idéal de $\mathcal{D}$

$\mathbf{C}\{x\}$ désigne l'anneau local des séries convergentes d'une variable et v la valuation naturelle sur $\mathbf{C}\{x\}$: pour a élément non nul de $\mathbf{C}\{x\}$,

$$v(a) = \sup\{n \in \mathbf{N} \mid a \in \mathbf{C}\{x\}x^n\}\,.$$

D désigne l'opérateur différentiel $\dfrac{d}{dx}$. Dans tout l'article, idéal de $\mathcal{D}$ signifie idéal à gauche.

I.A. Divisions dans $\mathcal{D}$

Un élément non nul P de $\mathcal{D}$ s'écrit de manière unique

$$P = a_d D^d + a_{d-1} D^{d-1} + \dots + a_0$$

avec $d \in \mathbf{N}$; $(a_d, a_{d-1}, \dots, a_0) \in \mathbf{C}\{x\}^{d+1}$; $a_d \neq 0$.

Nous définissons l'*exposant privilégié* de P :

$$\exp(P) = \big(v(P), d(P)\big) \in \mathbf{N}^2$$