

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 29 (1983)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: DIVISION ALGEBRAS AND THE HAUSDORFF-BANACH-TARSKI PARADOX
Autor: Deligne, Pierre / Sullivan, Dennis
Anhang: Appendix C
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-52976>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 18.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

This shows that D has involutions of the second kind if and only if the class of D_1 in $\text{Br}(k)$ is trivial. This class is the required norm $N_{K/k}(\text{cl}(D))$. In the localization spirit, this can be deduced from the fact that the homothety by $\lambda \in K'^*$ of V' induces on W' the homothety by $N_{K'/k'}(\lambda) \in k'^*$.

APPENDIX C

For $n \geq 3$, examples can be obtained as follows: take $k' = \mathbf{Q}[\zeta]$, with $\zeta = \exp(2\pi i/n)$, and $k = k' \cap \mathbf{R}$. Fix $a, b \in k'^*$ and let D be the k' -algebra generated by X, Y , subject to

$$\begin{aligned} X^n &= a, & Y^n &= b \\ XY &= \zeta YX. \end{aligned}$$

It admits the anti-involution $*$, inducing complex conjugation on k' , defined by $\zeta^* = \zeta^{-1}$, $X^* = X$, $Y^* = Y$. The algebra D is of the type we require, provided it is a division algebra. This happens already with $a, b \in \mathbf{Z}$: take for a a prime congruent to 1 mod n , and for b an integer whose residue mod a has in the cyclic group of order n $(\mathbf{Z}/(a))^*/(\mathbf{Z}/(a))^{*n}$ an image of exact order n . For instance $n = 3$, $a = 7$, $b = 2$. For $n = 2$, one proceeds similarly with $k' = \mathbf{Q}[i]$, $\zeta = -1$, a congruent to 1 mod 4 and b not a square mod a . For instance, $a = 5$, and $b = 2$. In each case, the assumption on a ensures that k' embed in the a -adic completion \mathbf{Q}_a of \mathbf{Q} , and the fact that D is a division algebra can be seen locally at a : $D \otimes_{k'} \mathbf{Q}_a$ is a division algebra with center \mathbf{Q}_a .