

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 29 (1983)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: GROUPE DE WITT D'UNE ALGÈBRE AVEC INVOLUTION
Autor: Cibils, Claude
Kapitel: §3. Présentation du groupe de Witt hermitien d'un corps gauche
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-52971>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 11.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Remarque. Le choix d'un $b \in \text{Hom}_A(U_i, U_i^*)$ de la proposition 7 pour obtenir une involution sur D_i est en fait irrelevant : deux choix différents peuvent donner lieu à des involutions non isomorphes mais aux mêmes groupes de Witt, puisque tous deux sont isomorphes à $W_\varepsilon(Ae_i)$ si $i \leq s$, à $W_{-\varepsilon}(Ae_i)$ si $s < i \leq r$.

§ 3. PRÉSENTATION DU GROUPE DE WITT HERMITIEN D'UN CORPS GAUCHE

Soit D un corps gauche muni d'une involution qui n'est pas forcément l'identité sur le centre et $WH_\varepsilon(D, -)$ le groupe de Witt des ε -formes hermitiennes. (Définition au § 2.)

Si $a \in D_\varepsilon = \{x \in D \mid \bar{x} = \varepsilon x\}$, $\langle a \rangle$ désigne le D espace vectoriel à gauche de dimension un De , muni de la forme ε -hermitienne $e \cdot e = a$.

Au corollaire 6 nous avons montré que l'homomorphisme de groupes abéliens ϕ défini par :

$$\begin{aligned} \phi : \mathbf{Z}[D_\varepsilon] &\rightarrow WH_\varepsilon(D, -) \\ [a] &\mapsto \langle a \rangle \end{aligned}$$

est surjectif. $\mathbf{Z}[D_\varepsilon]$ désigne le groupe abélien libre sur les éléments de D_ε , notés alors entre crochets.

THÉORÈME 4. *Le noyau de ϕ est égal au sous groupe N de $\mathbf{Z}[D_\varepsilon]$ engendré par*

- 1) $[a] - [\overline{axa}], \forall a \in D_\varepsilon, \forall x \in D$
- 2) $[a] + [-a], \forall a \in D_\varepsilon$
- 3) $[a] + [b] - [a+b] - [a(a+b)^{-1}b],$
 $\forall a, b \in D_\varepsilon$ avec $a + b \neq 0$.

Ce théorème fournit donc une présentation par générateurs et relations de $WH_\varepsilon(D, -)$.

Nous allons d'abord montrer un résultat intermédiaire.

PROPOSITION 8. Le noyau de φ est égal au sous groupe P de $\mathbf{Z}[D_\varepsilon]$ engendré par

- 1) $[a] - [xax], \forall a \in D_\varepsilon, \forall x \in D$
- 2) $[a] + [-a], \forall a \in D_\varepsilon$
- 3) $[a] + [b] - [c] - [d], \forall a, b, c, d \in D_\varepsilon$ tels que
 $\langle a \rangle \perp \langle b \rangle \simeq \langle c \rangle \perp \langle d \rangle$.

Puis nous verrons que $P = N$, ce qui achèvera la preuve du théorème 4.

Il est clair que $P \subset \text{Ker } \varphi$: il suffit de remarquer que $\langle a \rangle \simeq \langle xax \rangle$, et que $\langle a \rangle \perp \langle -a \rangle$ est neutre.

Le fait que $\text{Ker } \varphi \subset P$ repose sur le lemme suivant:

LEMME. Soient $a_1, \dots, a_n \in D_\varepsilon$ et supposons que la forme ε -hermitienne $\langle a_1 \rangle \perp \dots \perp \langle a_n \rangle$ est isotrope (c'est-à-dire il existe un vecteur non nul x avec $x \cdot x = 0$).

Il existe alors $c_1, \dots, c_m \in D_\varepsilon, m < n$, tels que

$$\sum_1^n [a_i] \equiv \sum_1^m [c_j] \pmod{P}.$$

Preuve. Si l'on écrit $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, où e_i est la base de $\langle a_i \rangle$, $x \cdot x = 0$ se traduit par $x_1 a_1 \bar{x}_1 + \dots + x_n a_n \bar{x}_n = 0$.

Éliminons les sommands nuls et renumérotions:

(*): $x_1 a_1 \bar{x}_1 + \dots + x_k a_k \bar{x}_k = 0$, avec $k \geq 2$ puisque $x \neq 0$.

Si $k = 2$, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_1^n [a_i] &= [a_1] - [x_1 a_1 \bar{x}_1] + [x_1 a_1 \bar{x}_1] + [x_2 a_2 \bar{x}_2] \\ &\quad + [a_2] - [x_2 a_2 \bar{x}_2] + \sum_3^n [a_i] \\ &\equiv \sum_3^n [a_i] \pmod{P} \end{aligned}$$

et le lemme est démontré.

Supposons par récurrence que le lemme est vrai chaque fois que l'isotropie nous fournit une relation (*) de longueur $k - 1$.

Nous avons $x_1 a_1 \bar{x}_1 + \dots + x_k a_k \bar{x}_k = 0$.

Posons $b_1 = x_1 a_1 \bar{x}_1 + x_2 a_2 \bar{x}_2$. Si $b_1 = 0$, l'hypothèse de récurrence dit que le lemme est vrai. Si $b_1 \neq 0$, considérons la forme ε hermitienne

$$\langle b_1 \rangle \perp \langle a_3 \rangle \perp \dots \perp \langle a_n \rangle .$$

Elle est isotrope avec $b_1 + x_3 a_3 \bar{x}_3 + \dots + x_k a_k \bar{x}_k = 0$.

Par récurrence, $[b_1] + [a_3] + \dots + [a_n] \equiv \sum_1^m [c_j] \pmod{P}$, $m < n - 1$.

Or il existe $b_2 \in D_\varepsilon$ avec

$$\langle a_1 \rangle \perp \langle a_2 \rangle \simeq \langle b_1 \rangle \perp \langle b_2 \rangle ,$$

puisque $\langle b_1 \rangle$ est un sous espace vectoriel non dégénéré (engendré par $x_1 e_1 + x_2 e_2$) de $\langle a_1 \rangle \perp \langle a_2 \rangle$. Il suffit de prendre son orthogonal pour obtenir $\langle b_2 \rangle$.

Donc

$$[a_1] + [a_2] + \sum_3^n [a_i] \equiv [b_1] + [b_2] + \sum_3^n [a_i] \pmod{P} ,$$

grâce aux générateurs de type 3) de P .

Mais

$$[b_1] + [b_2] + \sum_3^n [a_i] \equiv [b_2] + \sum_3^m [c_j] \pmod{P} ,$$

et $m + 1 < n$, puisque l'on avait $m < n - 1$. □

Montrons maintenant $\text{Ker } \varphi \subset P$, ce qui prouve la proposition 8.

Si $\lambda = \sum_i n_i [a_i] \in \text{Ker } \varphi$, écrivons

$$\lambda = \sum_k [U_k] + \sum_j -[V_j] \equiv \sum_k [U_k] + \sum_j [-V_j] \pmod{P} .$$

Il suffit donc de montrer que si $\sum_1^n [a_i] \in \text{Ker } \varphi$, alors $\sum_1^n [a_i] \equiv 0 \pmod{P}$.

$\bigoplus_1^n \langle a_i \rangle$ est neutre, en particulier isotrope. Le lemme dit que

$$\sum_1^n [a_i] \equiv \sum_1^m [c_j] \pmod{P}$$

et avec $m < n$.

Mais $\sum_1^m [c_j]$ est aussi dans le noyau de φ , puisque $P \subset \text{Ker } \varphi$. Le procédé peut être recommencé, avec les longueurs des expressions diminuant vraiment à chaque application.

D'où $\sum_1^n [a_i] \equiv 0 \pmod{P}$. □

Il nous reste à voir que $N = P$ pour obtenir le théorème 4.

Pour montrer que $N \subset P$, il suffit de voir que les générateurs de type 3) de N sont dans P . En fait ce sont directement des générateurs de type 3) de P , c'est-à-dire :

Assertion. $\langle a \rangle \perp \langle b \rangle \simeq \langle a + b \rangle \perp \langle a(a+b)^{-1}b \rangle$,
 $\forall a, b \in D_\varepsilon$, avec $a + b \neq 0$.

Preuve. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & bc \\ -1 & ac \end{pmatrix}$, où $c = (a+b)^{-1}$. Son inverse est $A' = \begin{pmatrix} ac & -bc \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. En effet,

$$AA' = \begin{pmatrix} ac + bc & 0 \\ 0 & bc + ac \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A réalise donc une surjection entre deux D -espaces de dimension 2, A est donc aussi injective et $A'A = Id$. Vérifions le quand même :

$$A'A = \begin{pmatrix} ac + bc & bcac - acbc \\ 0 & bc + ac \end{pmatrix}$$

Il est effectivement vrai que $bca - acb = 0$, pour tout $a, b \in D$ avec $a + b \neq 0$ et $c = (a+b)^{-1}$:

$$\begin{aligned} bca - acb &= bca + bcb - bcb - acb \\ &= b(ca + cb) - (bc + ac)b \\ &= b - b = 0. \end{aligned}$$

Cette matrice A réalise l'isomorphisme entre les deux formes ε -hermitiennes :

$$A^t \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \overline{A} = \begin{pmatrix} a + b & 0 \\ 0 & acb \end{pmatrix}$$

Vérification. $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & cb \\ -1 & ca \end{pmatrix}$ puisque $\overline{bc} = \overline{c} \overline{b} = \varepsilon^2 cb = cb$.

$$A^t B \overline{A} = \begin{pmatrix} a + b & acb - bca \\ bca - acb & bcacb + acbca \end{pmatrix}$$

En utilisant le fait que $acb = bca$, on obtient bien $\begin{pmatrix} a + b & 0 \\ 0 & acb \end{pmatrix}$. □

Il s'agit maintenant de montrer que $P \subset N$, problème qui se réduit à montrer que, si $\langle a \rangle \perp \langle b \rangle \simeq \langle c \rangle \perp \langle d \rangle$, l'expression $[a] + [b] - [c] - [d]$ est nulle modulo N .

Preuve. c est une valeur de la forme $\langle a \rangle \perp \langle b \rangle$. Il existe donc x et y non simultanément nuls tels que $c = x a \bar{x} + y b \bar{y}$.

Cas 1. Si $x \neq 0$ et $y \neq 0$. Nous avons que

$$\langle a \rangle \perp \langle b \rangle \perp \langle -c \rangle \perp \langle -d \rangle$$

est neutre. Donc

$$\langle a \rangle \perp \langle b \rangle \perp \langle -x a \bar{x} - y b \bar{y} \rangle \perp \langle -d \rangle$$

est neutre. Mais

$$\langle a \rangle \simeq \langle x a \bar{x} \rangle \text{ et } \langle b \rangle \simeq \langle y b \bar{y} \rangle$$

Ainsi

(*): $\langle x a \bar{x} \rangle \perp \langle y b \bar{y} \rangle \perp \langle -x a \bar{x} - y b \bar{y} \rangle \perp \langle -d \rangle$ est neutre.

D'autre part, l'assertion que nous venons prouver nous dit que

$$\langle x a \bar{x} \rangle \perp \langle y b \bar{y} \rangle \simeq \langle x a \bar{x} + y b \bar{y} \rangle \perp \langle x a \bar{x} (x a \bar{x} + y b \bar{y})^{-1} y b \bar{y} \rangle.$$

(Ce dernier sommand orthogonal sera noté $\langle g \rangle$.)

En rajoutant $\langle -x a \bar{x} - y b \bar{y} \rangle$ des deux côtés on obtient

$$\begin{aligned} \langle x a \bar{x} \rangle \perp \langle y b \bar{y} \rangle \perp \langle -x a \bar{x} - y b \bar{y} \rangle &\simeq \langle x a \bar{x} + y b \bar{y} \rangle \perp \\ &\langle -x a \bar{x} - y b \bar{y} \rangle \perp \langle g \rangle \end{aligned}$$

Or $\langle x a \bar{x} + y b \bar{y} \rangle \perp \langle -x a \bar{x} - y b \bar{y} \rangle$ est neutre. Par la définition même de l'équivalence de $WH_e(D, -)$ on obtient

$$\langle x a \bar{x} \rangle \perp \langle y b \bar{y} \rangle \perp \langle -x a \bar{x} - y b \bar{y} \rangle \sim \langle g \rangle.$$

En revenant maintenant à (*) on trouve: $\langle g \rangle \perp \langle -d \rangle$ est neutre. Ce qui veut dire qu'il existe un vecteur non nul $ue_1 + ve_2$ avec $(ue_1 + ve_2) \cdot (ue_1 + ve_2) = 0$, c'est-à-dire que

$$u \bar{g} u - v \bar{d} v = 0 \Rightarrow d = v^{-1} u \bar{g} u v^{-1} = s \bar{g} s$$

pour $s = v^{-1} u$.

Nous pouvons maintenant prouver que

$$[a] + [b] - [c] - [d] \equiv 0 \pmod{N}:$$

$$\begin{aligned} [a] + [b] - [c] - [d] &\equiv [x a \bar{x}] + [y b \bar{y}] - [x a \bar{x} + y b \bar{y}] - [d] \\ &\equiv [g] - [d] \equiv [g] - [s \bar{g} s] \equiv 0 \pmod{N}. \end{aligned}$$

Cas 2. Si $y = 0$. De toute façon $\langle a \rangle \perp \langle b \rangle \perp \langle -c \rangle \perp \langle -d \rangle$ est neutre, donc

$$\langle a \rangle \perp \langle b \rangle \perp \langle -xax \rangle \perp \langle -d \rangle$$

est neutre. Or $\langle a \rangle \perp \langle -xax \rangle$ est neutre, donc $\langle b \rangle \perp \langle -d \rangle$ est neutre et nous venons de voir que dans ce cas il existe s avec $d = s\bar{b}s$. D'où

$$[a] + [b] - [c] - [d] \equiv 0 \pmod{N}.$$

Cas 3. Si $x = 0$, qui se traite comme le cas 2. □

Exemple. Soit D l'algèbre de quaternions sur un corps k de caractéristique différente de deux, engendré par les éléments i et j vérifiant $i^2 = \alpha$, $j^2 = \beta$, $ij = -ji$ où α et β sont des éléments de k qui ne sont pas des carrés,

$$D = k \oplus ki \oplus kj \oplus kij.$$

Nous voulons de plus que D soit un corps gauche, c'est-à-dire que la forme bilinéaire de matrice diagonale $\langle 1, -\alpha, -\beta, \alpha\beta \rangle$ ne représente pas 0.

Soit $\bar{}$ l'involution standard de D : $\bar{i} = -i$, $\bar{j} = -j$. Cette involution est d'ailleurs définie sans référence à la base de quaternions de D choisie: soit $I = \{z \in D \mid z^2 \in k \text{ et } z \notin k\}$, l'ensemble des imaginaires purs. L'involution standard change le signe des imaginaires purs et laisse fixe k .

Il est facile de voir que toute autre involution $\hat{}$ s'obtient de la façon suivante: soit $a \in I$ et complétons le en une base de quaternions, c'est-à-dire en un $b \in I$ avec $ab = -ba$. L'involution est donnée par $\hat{a} = -a$, $\hat{b} = b$. Deux involutions ainsi construites avec a et $a' \in I$ sont isomorphes si et seulement si les sous corps commutatifs maximaux $k + ka$ et $k + ka'$ sont isomorphes.

Comme le remarque D. W. LEWIS, A note on hermitian and quadratic forms, *Bull. Lond. Math. Soc.*, 11 (1979), les formes hermitiennes sur D pour $\hat{}$ sont en bijection avec les formes antihermitiennes sur D pour l'involution standard. (La bijection est donnée par la multiplication par a .) Cela fournit un isomorphisme $WH_{-1}(D, \hat{}) \simeq WH_{+1}(D, \bar{})$. De même $WH_{+1}(D, \hat{}) \simeq WH_{-1}(D, \bar{})$.

La présentation de $WH_{\epsilon}(D, \bar{})$ peut être précisée pour D un corps de quaternions:

$$WH_{+1}(D, \bar{}) = \mathbf{Z}[k]/N_1$$

où N_1 est le sous groupe de $\mathbf{Z}[k]$ engendré par

- 1) $[a] - [ax\bar{x}], \forall a \in k, \forall x \in D$
- 2) $[a] + [-a], \forall a \in k$
- 3) $[a] + [b] - [a + b] - [ab(a + b)],$
 $\forall a, b \in k$ avec $a + b \neq 0$.

$$WH_{-1}(D, -) = \mathbf{Z}[I]/N_{-1}$$

où N_{-1} est le sous groupe de $\mathbf{Z}[I]$ engendré par

- 1) $[a] - [xax], \forall a \in I, \forall x \in D$
- 2) $[a] + [-a], \forall a \in I$
- 3) $[a] + [b] - [a + b] - [a(a + b)^{-1}b],$
 $\forall a, b \in I$ avec $a + b \neq 0$.

Lorsque $D = H$ le corps des quaternions sur les réels, ($k = \mathbf{R}, i^2 = j^2 = -1$), il est clair que $WH_{+1}(H, -) = \mathbf{Z}$. (La relation 2 identifie les deux générateurs de $\mathbf{Z}[\mathbf{R}/\mathbf{R}^2]$.)

Pour obtenir $WH_{-1}(H, -)$ il suffit de remarquer que xix décrit tous les imaginaires purs lorsque x parcourt H . Un calcul simple montre que cela revient à trouver deux nombres complexes dont la différence des normes et le produit sont fixés, ce qui est toujours possible.

Ainsi le nombre de générateurs de $WH_{-1}(H, -)$ est réduit à un, et la relation 2) dit qu'il est d'ordre 2. $WH_{-1}(H, -) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Si maintenant k est un corps local de caractéristique différente de deux, il est connu qu'il existe un seul corps de quaternions D sur k et que $\{x\bar{x}, x \in D\} = k$. Nous en tirons immédiatement que $WH_{+1}(D, -) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

(Reçu le 3 juin 1982)

Claude Cibils

Section de Mathématique
 Université de Genève
 Case 124
 CH-1211 Genève 24

Vide-leer-empty