

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 29 (1983)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: GROUPE DE WITT D'UNE ALGÈBRE AVEC INVOLUTION
Autor: Cibils, Claude
Kapitel: §2 Réduction au groupe de Witt hermitien d'un corps gauche
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-52971>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 11.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

M_a est donc de module semisimple, donc annulé par $\text{rad } A$, et nous pouvons poser $F(M) = M_a$.

Pour voir que F est un homomorphisme de groupes, soient M et N deux formes. Nous avons $(M \perp N)_a \sim M_a \perp N_a$ dans $W_e(A)$, c'est-à-dire que leur différence est neutre dans $W_e(A)$ et donc dans $W_e(A/\text{rad } A)$. Ainsi l'équivalence a aussi lieu dans $W_e(A/\text{rad } A)$ et $F(M \perp N) = F(M) \perp F(N)$.

F est *injective*: si $F(M) = M_a$ (qui est anisotrope) est neutre, cela implique $M_a = 0$. Or $M \sim M_a = 0$.

F est *surjective*: soit N une forme de $W_e(A/\text{rad } A)$ et N_a son représentant anisotrope. N_a est une forme de $W_e(A)$ et son image par F est naturellement la classe de N_a qui est celle de N . \square

§ 2 RÉDUCTION AU GROUPE DE WITT HERMITIEN D'UN CORPS GAUCHE

Soit A une k -algèbre semisimple de dimension finie munie d'une involution laissant le corps k fixe.

Sa décomposition en produit d'algèbres simples est obtenue avec un système d'idempotents $\{e_i\}_{i=1 \dots n}$ centraux, orthogonaux, primitifs et complets

$$A = Ae_1 \times \dots \times Ae_n.$$

Un tel système est unique.

Or $\{\bar{e}_i\}$ est encore un système d'idempotents comme avant. Quitte à renumérotter, on suppose $\bar{e}_i = e_i$ pour $i = 1, \dots, r$ et $\bar{e}_i = e_j$, $j \neq i$, pour $i = r + 1, \dots, n$.

D'autre part chaque algèbre simple Ae_i possède un seul module simple U_i et cela fournit une liste complète et sans répétitions des A -modules simples.

Remarque. Si \wedge est une k -algèbre avec involution, U un \wedge module simple, $A = \wedge/\text{rad } \wedge$ et e_i l'idempotent central pour lequel U est un Ae_i module simple, on a que

$$U \simeq U^* \Leftrightarrow e_i = \bar{e}_i$$

(où $U^* = \text{Hom}_k(U, k)$, qui est un \wedge module à gauche via $(a\varphi)(x) = \varphi(ax)$ pour $\varphi \in U^*$, $a \in A$ et $x \in U$).

Il suffit de remarquer que U^* est simple, et c'est en fait le module simple sur $A\bar{e}_i$.

LEMME. Pour $1 \leq i \leq r$, on a

$$W_{\epsilon}(Ae_i) \hookrightarrow W_{\epsilon}(A),$$

où Ae_i porte l'involution de A , c'est-à-dire $\overline{ae_i} = \overline{e_i} \overline{a} = e_i \overline{a} = \overline{a} e_i$.

Preuve. Une forme de $W_{\epsilon}(Ae_i)$ est U_i -isotypique. Si elle est neutre dans $W_{\epsilon}(A)$, elle admet un sous module égal à son orthogonal. Mais ce sous module d'un module semisimple est sommand direct et donc lui-même U_i -isotypique.

Cette forme est neutre dans $W_{\epsilon}(Ae_i)$, ce qui montre l'injectivité.

PROPOSITION 3. $W_{\epsilon}(A) = \bigoplus_{i=1}^r W_{\epsilon}(Ae_i)$.

Preuve. Pour voir que $W_{\epsilon}(A)$ est la somme des sous groupes $W_{\epsilon}(Ae_i)$ considérons le représentant anisotrope d'une forme.

Celui-ci est somme orthogonale de formes simples dont les modules se trouvent parmi $\{U, \dots, Ur\}$: en effet, si U un module simple est muni d'une forme, elle fournit un isomorphisme de U avec U^* .

Pour voir que la somme est directe, supposons que $V_1 \perp \dots \perp V_r$ est neutre, où V_i est une forme de $W_{\epsilon}(Ae_i)$ pour $i = 1 \dots r$. On a donc

$$-V_j \sim V_1 \perp \dots \perp V_{j-1} \perp V_{j+1} \perp \dots \perp V_r$$

pour tout j entre 1 et r .

La construction de la proposition 2 fournit pour

$$V_1 \perp \dots \perp V_{j-1} \perp V_{j+1} \perp \dots \perp V_r$$

un représentant anisotrope sans aucun sommand de module isomorphe à U_j .

Tandis que pour $-V_j$ nous obtenons un représentant anisotrope qui est U_j -isotypique.

Par l'unicité, ces deux représentants sont isomorphes en tant que formes, en particulier en tant que A modules. S'ils ne sont pas nuls, le théorème de Krull Schmidt est mis en défaut.

Les deux anisotropes sont donc nuls et $-V_j \sim 0$, donc $V_j \sim 0$ pour tout j entre 1 et r . \square

Le calcul du groupe de Witt se réduit donc au cas d'une algèbre simple avec involution.

Soit donc A une k -algèbre simple de dimension finie, munie d'une involution qui laisse le corps k fixe.

Soit U son unique A module simple et $D = \text{End}_A U$ qui est un corps gauche, extension finie de k . (En fait $A \simeq M_n(D)$ pour n le nombre de sommands isomorphes à U dans une décomposition de A .)

Nous allons fabriquer une involution pour D à partir de celle de A , puis montrer :

THÉORÈME 2. $W_\varepsilon(A) \simeq WH_{\varepsilon\varepsilon_b}(D, \bar{})$.

($\varepsilon_b = \pm 1$ sera précisé plus loin.)

Si D est un corps gauche muni d'une involution $\bar{}$, $WH_\varepsilon(D, \bar{})$ désigne le groupe obtenu en faisant le quotient du semigroupe des classes d'isomorphie de formes ε -hermitiennes sur des D -espaces vectoriels à gauche de dimension finie, à valeurs dans D et non dégénérées, par la relation :

$M \sim N$ s'il existe des formes ε -hermitiennes neutres X et Y avec $M \perp X \simeq N \perp Y$.

(Une forme ε -hermitienne est *neutre* si elle admet un sous espace vectoriel égal à son orthogonal, i.e. un métaboliseur.)

On obtient tout de suite les deux propositions clés, pour lesquelles les démonstrations des propositions 2 et 3 restent valables dans ce contexte :

PROPOSITION 4. *Une forme ε -hermitienne Witt équivalente à zéro est neutre.*

DÉFINITION. Une forme ε -hermitienne est *anisotrope* si pour tout $x \neq 0$, $x \cdot x \neq 0$.

PROPOSITION 5. *Il existe une forme ε -hermitienne anisotrope unique par classe d'équivalence de Witt.*

Il est clair qu'une forme anisotrope est somme orthogonale de sous formes hermitiennes de dimension 1, qui engendrent donc $WH_\varepsilon(D, \bar{})$.

Mais une forme ε -hermitienne de dimension 1 est déterminée par un élément de $D_\varepsilon = \{x \in D \text{ avec } \bar{x} = \varepsilon x\}$.

Nous avons donc montré le

COROLLAIRE 6. $WH_\varepsilon(D, \bar{})$ admet comme générateurs de groupe abélien les éléments de D_ε .

Construisons maintenant une involution sur le corps gauche d'endomorphismes du simple, puis nous pourrons prouver le théorème 2.

PROPOSITION 7. *Si A est une k -algèbre simple munie d'une involution, le corps gauche d'endomorphismes D de l'unique module simple U porte une involution, qui coïncide avec celle de A sur le centre.*

Preuve. Soit $U^* = \text{Hom}_k(U, k)$ qui est un A module à gauche via $(af)(x) = f(\bar{a}x)$. Il s'agit d'un A module simple non nul et donc isomorphe à U , puisque U est le seul A -module simple (à isomorphie près).

Considérons $L = \text{Hom}_A(U, U^*)$, qui est donc un k -espace vectoriel non nul. Le groupe cyclique d'ordre 2, $\{1, t\}$, agit sur L :

$$\text{si } b \in L, \quad (tb)(x)_{(y)} = b(y)_{(x)}$$

L est donc un kC_2 module non nul. Si la caractéristique de k n'est pas deux, kC_2 est une algèbre semisimple et ne possède que deux modules simples T et A non isomorphes, tous deux de dimension 1 : pour T, t agit comme 1 ; pour A, t agit comme -1 .

Ainsi $L = n_T T \oplus n_A A$, avec au moins un des deux naturels n_T ou n_A non nul.

Il existe donc un $b \in L, b \neq 0$ (et donc b est un isomorphisme), avec $tb = \varepsilon_b b$ où $\varepsilon_b = \pm 1$. Ce qui veut dire

$$b(x)_{(y)} = \varepsilon_b b(y)_{(x)}$$

Si la caractéristique de k est deux, kC_2 ne possède qu'un seul module simple qui est T . L n'est pas nécessairement un kC_2 module semisimple mais contient un sous kC_2 module simple. (Ainsi que tout module de génération finie sur une algèbre de k -dimension finie.)

Il existe donc $b \in L, b \neq 0$, avec $tb = b$.

En conclusion, et quelle que soit la caractéristique, il existe toujours $b \in L, b \neq 0$, avec

$$b(x)_{(y)} = \varepsilon_b b(y)_{(x)}, \quad \text{avec } \varepsilon_b = \pm 1$$

Remarque. Si possible b sera choisi de telle façon que $\varepsilon_b = 1$. Mais il se peut que L ne soit constitué que de formes antisymétriques (i.e. $n_A = 0$), auquel cas $\varepsilon_b = -1$.

L'involution de D se construit une fois le choix d'un tel b effectué :

Soit $f \in \text{End}_A(U) = D$. f^* désigne le A -endomorphisme de U^* défini par $f^*(\varphi) = \varphi \circ f$, si $\varphi \in U^*$.

Posons $\bar{f} = b^{-1} f^* b$. (\bar{f} est l'unique A endomorphisme de U tel que $b(fx, y) = b(x, \bar{f}y)$, pour tout $x, y \in U$).

Assertion. $f \mapsto \bar{f}$ est une involution de D qui coïncide avec celle de A sur son centre.

Pour le vérifier il est commode d'identifier U avec U^{**} au moyen du A -isomorphisme qui à chaque $u \in U$ associe « l'évaluation en u » de U^{**} .

Ainsi $f^{**} = f$ et $b^* = \varepsilon_b b$.

$$\bar{\bar{f}} = b^{-1}(b^{-1}f^*b)^*b = \varepsilon_b^2 f = f.$$

$$\overline{fg} = b^{-1}(fg)^*b = b^{-1}g^*f^*b = b^{-1}g^*b b^{-1}f^*b = \bar{g}\bar{f}.$$

Soit a un élément du centre de A et λ_a l'homothétie de rapport a qui est centrale dans D . Nous avons

$$\overline{\lambda_a} = b^{-1}(\lambda_a)^*b = b^{-1}\lambda_{\bar{a}}b = \lambda_{\bar{a}}.$$

En particulier k est laissé fixe par l'involution que nous venons de définir sur D . \square

Nous pouvons maintenant aborder le

THÉORÈME 2. *Soit A une k algèbre simple de dimension finie, munie d'une involution, D le corps gauche muni de l'involution $\bar{f} = b^{-1}f^*b$, où b est choisi dans $\text{Hom}_A(U, U^*)$ avec $b^* = \varepsilon_b b$. Alors $W_\varepsilon(A) \simeq WH_{\varepsilon\varepsilon_b}(D, -)$.*

Preuve. Nous allons construire une flèche de groupes

$$F : W_\varepsilon(A) \rightarrow WH_{\varepsilon\varepsilon_b}(D, -)$$

puis montrer qu'elle est injective et surjective.

Soit M une forme de $W_\varepsilon(A)$. On note par c aussi bien la forme que le A isomorphisme $c : M \rightarrow M^*$ auquel elle donne lieu. ($c^* = \varepsilon c$.)

$\text{Hom}_A(U, M)$ est un D espace vectoriel à gauche via $f \cdot \varphi = \varphi \circ \bar{f}$, si $f \in D$ et $\varphi \in \text{Hom}_A(U, M)$. Considérons la forme :

$$\begin{aligned} \text{Hom}_A(U, M) \times \text{Hom}_A(U, M) &\rightarrow \text{End}_A U = D \\ (\varphi, \psi) &\mapsto \varphi \cdot \psi = b^{-1}\varphi^*c\psi \end{aligned}$$

Elle est $\varepsilon\varepsilon_b$ hermitienne :

$$\begin{aligned} \overline{\psi \cdot \varphi} &= b^{-1}(b^{-1}\psi^*c\varphi)^*b = b^{-1}\varphi^*c^*\psi b^{*-1}b \\ &= \varepsilon\varepsilon_b b^{-1}\varphi^*c\psi = \varepsilon\varepsilon_b \varphi \cdot \psi \end{aligned}$$

Elle est sesquilinearéaire en la deuxième variable :

$$\varphi \cdot f \psi = \varphi \cdot \psi \circ \bar{f} = b^{-1}\varphi^*c\psi \bar{f} = (\varphi \cdot \psi) \bar{f}$$

Elle est non dégénérée : si $\varphi \cdot \psi = 0$ pour tout ψ , alors $\varphi^*c\psi = 0$ pour tout ψ . Mais $\varphi^*c\psi = c(\varphi(-), \psi(-))$. Puisque M est U -isotypique, choisissons une décomposition $M = U \oplus \dots \oplus U$. Prenons pour ψ chacune des inclusions de U auxquelles, cette décomposition donne lieu. Nous obtenons $c(\varphi(-), m) = 0$, $\forall m \in M$, d'où $\varphi = 0$.

Posons donc $FM = \text{Hom}_A(U, M)$ muni de cette forme. Il nous faut voir que si M est neutre, FM l'est aussi :

Soit N le métaboliseur de M . $\text{Hom}_A(U, N)$ est donc un sous D espace vectoriel de dimension moitié celle de FM , et en fait est autorthogonal : en effet, $\varphi^* c \psi = c(\varphi(-), \psi(-))$, et si φ et ψ sont à valeurs dans N , alors $\varphi \cdot \psi = 0$.

F est injective : supposons que FM est neutre de métaboliseur X . Or les sous espaces de $\text{Hom}_A(U, M)$ sont tous de la forme $\text{Hom}_A(U, N)$ pour N un sous A module de M . C'est donc le cas pour X et le N obtenu est de k -dimension moitié celle de M . Il est en fait autorthogonal, ce qui montrera que M est neutre : nous savons que $\varphi^* c \psi = c(\varphi(-), \psi(-)) = 0$, pour tous φ et $\psi \in \text{Hom}_A(U, N)$. N est U -isotypique, choisissons une décomposition $N = U \oplus \dots \oplus U$. En prenant pour φ et ψ les inclusions de U obtenues avec cette décomposition, on obtient que $c(n_1, n_2) = 0$, pour tout $n_1, n_2 \in N$.

F est surjective : nous avons vu (corollaire 6) que les éléments de $D_{\varepsilon \varepsilon_b} = \{x \in D \mid tq \bar{x} = \varepsilon \varepsilon_b x\}$ engendrent $WH_{\varepsilon \varepsilon_b}(D, \bar{})$.

Soit donc $a \in D_{\varepsilon \varepsilon_b}$.

Considérons la forme $U \xrightarrow{ba} U^*$ qui est ε -symétrique :

$$(ba)^* = a^* b^* = \varepsilon_b \bar{ba} b^{-1} b = \varepsilon_b^2 \varepsilon ba = \varepsilon ba.$$

L'image de sa classe dans $W_\varepsilon(A)$ par F est une forme sur $\text{End}_A U$ dont la valeur sur (Id_u, Id_u) est $b^{-1} Id_u^* ba Id_u = a$.

Les générateurs de $WH_{\varepsilon \varepsilon_b}(D, \bar{})$ sont atteints par F qui est donc surjective. \square

En mettant bout à bout les résultats obtenus, nous pouvons énoncer le résultat global suivant :

THÉORÈME 3. *Soit A une k -algèbre de dimension finie, munie d'une involution. Soit U_1, \dots, U_n une liste complète et sans répétitions des A modules simples (à isomorphie près), numérotés de telle façon que*

- 1) $U_i \simeq U_i^*$ pour $i \leq r \leq n$, et $U_j \neq U_j^*$ si $j > r$.
- 2) Pour $i \leq s \leq r$, $\text{Hom}_A(U_i, U_i^*)$ contient le kC_2 module trivial (c.f. proposition 7) et ne le contient pas pour $i > s$. C'est-à-dire que pour $s < i \leq r$, $\text{Hom}_A(U_i, U_i^*)$ est constitué entièrement de morphismes antisymétriques.

Soient D_1, \dots, D_r les corps gauches d'endomorphismes de U_1, \dots, U_r munis d'une involution fabriquée comme à la proposition 7. Alors

$$W_\varepsilon(A) = \bigoplus_{i=1}^s WH_\varepsilon(D_i, \bar{}) \bigoplus \bigoplus_{j=s+1}^r WH_{-\varepsilon}(D_j, \bar{}).$$

Remarque. Le choix d'un $b \in \text{Hom}_A(U_i, U_i^*)$ de la proposition 7 pour obtenir une involution sur D_i est en fait irrelevant : deux choix différents peuvent donner lieu à des involutions non isomorphes mais aux mêmes groupes de Witt, puisque tous deux sont isomorphes à $W_\varepsilon(Ae_i)$ si $i \leq s$, à $W_{-\varepsilon}(Ae_i)$ si $s < i \leq r$.

§ 3. PRÉSENTATION DU GROUPE DE WITT HERMITIEN D'UN CORPS GAUCHE

Soit D un corps gauche muni d'une involution qui n'est pas forcément l'identité sur le centre et $WH_\varepsilon(D, \bar{})$ le groupe de Witt des ε -formes hermitiennes. (Définition au § 2.)

Si $a \in D_\varepsilon^\cdot = \{x \in D^\cdot \mid \bar{x} = \varepsilon x\}$, $\langle a \rangle$ désigne le D espace vectoriel à gauche de dimension un De , muni de la forme ε -hermitienne $e \cdot e = a$.

Au corollaire 6 nous avons montré que l'homomorphisme de groupes abéliens φ défini par :

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbf{Z}[D_\varepsilon^\cdot] &\rightarrow WH_\varepsilon(D, \bar{}) \\ [a] &\mapsto \langle a \rangle\end{aligned}$$

est surjectif. $\mathbf{Z}[D_\varepsilon^\cdot]$ désigne le groupe abélien libre sur les éléments de D_ε^\cdot , notés alors entre crochets.

THÉORÈME 4. *Le noyau de φ est égal au sous groupe N de $\mathbf{Z}[D_\varepsilon^\cdot]$ engendré par*

- 1) $[a] - [xax\bar{x}], \forall a \in D_\varepsilon^\cdot, \forall x \in D^\cdot$
- 2) $[a] + [-a], \forall a \in D_\varepsilon^\cdot$
- 3) $[a] + [b] - [a+b] - [a(a+b)^{-1}b],$
 $\forall a, b \in D_\varepsilon^\cdot$ avec $a + b \neq 0$.

Ce théorème fournit donc une présentation par générateurs et relations de $WH_\varepsilon(D, \bar{})$.

Nous allons d'abord montrer un résultat intermédiaire.