Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 29 (1983)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: GROUPE DE WITT D'UNE ALGÈBRE AVEC INVOLUTION
Autor: Cibils, Claude
Kapitel: §1. RÉDUCTION AU CAS SEMISIMPLE
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-52971

§ 1. Réduction au cas semisimple

Soit A une k algèbre de dimension finie munie d'une involution laissant fixe le corps k (de façon plus précise un k-antiautomorphisme d'ordre deux $a \mapsto \bar{a}$ de A dans A).

Par exemple si G est un groupe fini et kG son algèbre de groupe (i.e. le k-espace vectoriel de base les éléments de G muni de la multiplication induite par celle de G), kG porte l'involution.

$$\overline{\sum_{g \in G} \lambda_g g} = \sum_{g \in G} \lambda_g g^{-1}$$

Si $\varepsilon = \pm 1$, *une forme* ε*-symétrique invariante (ou plus simplement une forme)* est un A module à gauche de génération finie M muni d'une forme bilinéaire, à valeurs dans k, ε-symétrique, non dégénérée et vérifiant $ax \cdot y = x \cdot \bar{a}y$ pour x, $y \in M$ et $a \in A$.

$W_\varepsilon(A)$ désigne le groupe de Witt des formes ε-symétriques invariantes. Il est le quotient du semigroupe (pour la somme orthogonale) des classes d'isomorphie de formes par la relation $M \sim N$ s'il existe X et Y des formes neutres avec $M \perp X \simeq N \perp Y$. ($\simeq$ désigne l'isomorphie de formes, $\perp$ la somme orthogonale, et une forme est *neutre* si elle admet un *métaboliseur*, c'est-à-dire un sous module égal à son orthogonal.)

Remarque. Une autre définition de forme neutre est obtenue en demandant que le métaboliseur soit sommand direct du module. Si l'algèbre est semisimple les deux définitions coïncident, mais sinon le groupe de Witt obtenu avec cette définition diffère sensiblement de celui qui est étudié ici.

rad A désigne l'idéal nilpotent maximal de A. On a donc que rad $A = \overline{\text{rad } A}$ et l'involution de A est aussi définie sur $A/\text{rad } A$.

Notre objectif dans ce paragraphe est de montrer

Théorème 1. $W_\varepsilon(A) = W_\varepsilon(A/\text{rad } A)$.

Pour cela deux résultats bien connus sont nécessaires et joueront un rôle essentiel par la suite:

Proposition 1. *Une forme équivalente à zéro est neutre.*

Preuve. Soit M une forme avec $M \perp H$ neutre de métaboliseur N, ceci pour H une forme neutre de métaboliseur H_0.

On peut rechoisir le métaboliseur de $M \perp H$ de façon à ce qu'il contienne H_0. Prenons L un sous module de $M \perp H$ maximal pour les conditions de contenir

H_0 et d'être contenu dans son orthogonal. Voyons que c'est en fait un métaboliseur :

Considérons $L + (N \cap L^\perp)$, qui est contenu dans son orthogonal. Par maximalité de L, $N \cap L^\perp \subset L$ et donc $L^\perp \subset (N \cap L^\perp)^\perp$. Mais il est clair que $A^\perp \cap B^\perp = (A+B)^\perp$. Ainsi, puisque $N = N^\perp$, nous obtenons $L^\perp \subset (N+L)^{\perp\perp} = N + L$.

Mais si $x = n + p$ est un élément de $L^\perp$ avec $n \in N$ et $p \in L$, on a $n \in L^\perp$, d'où $L^\perp \subset (N \cap L^\perp) + L = L$.

Regardons M_0 la projection de L sur M. Il s'agit d'un métaboliseur pour M :

Le noyau de cette projection est $L \cap H$. Or $L \cap H$ est auto-orthogonal (car L l'est), et contient H_0. Donc $L \cap H = H_0$. Nous avons donc la suite exacte

$$0 \to H_0 \to L \to M_0 \to 0$$

d'où

$$2 \dim M_0 = 2 \dim L - 2 \dim H_0 = \dim(M \perp H) - \dim H = \dim H$$

D'autre part la projection de L sur H est exactement H_0 : en effet, si $(x, a) \in L$, alors $(x, a) \cdot (0, b) = 0$ pour tout $b \in H_0$, puisque $H_0 \subset L$. Ainsi $a \cdot b = 0$ pour tout $b \in H_0$ et $a \in H_0$.

Il est clair maintenant que M_0 est auto-orthogonal : si x et $y \in M_0$ il existe a et $b \in H_0$ tels que (x, a) et $(y, b) \in L$. Donc

$$0 = (x, a) \cdot (y, b) = x \cdot y + a \cdot b = x \cdot y \qquad \square$$

La relation d'équivalence de $W_\varepsilon(A)$ peut maintenant se reécrire

$$M \sim N \Leftrightarrow M \perp (-N) \text{ est neutre.}$$

($-N$ désigne la forme opposée à celle de N, de même module.)

Remarque. Nous aurions pu définir la relation de $W_\varepsilon(A)$ comme nous venons de l'écrire. La proposition 1 est alors indispensable pour montrer la transitivité.

DÉFINITION. Une forme est dite *anisotrope* si tous ses sous modules sont non dégénérés.

PROPOSITION 2. *Il existe une forme anisotrope unique par classe d'équivalence de Witt.*

Preuve. Soit M une forme. Nous allons lui associer une forme équivalente et anisotrope. Si M est déjà anisotrope nous n'avons rien à faire. Sinon, soit N un sous module dégénéré, c'est-à-dire $N \cap N^\perp \neq 0$.

Posons $L = N \cap N^{\perp}$, qui vérifie $L \subset L^{\perp}$.

Le noyau de la forme sur $L^{\perp}$ est $L^{\perp} \cap L^{\perp\perp} = L^{\perp} \cap L = L$.

Ainsi $L^{\perp}/L$ est une forme, qui s'avère être Witt équivalente à M. En effet, un métaboliseur de $M \perp (-L^{\perp}/L)$ est $S = \{(x, [x]), x \in L^{\perp}\}$:

* $(x, [x]) \cdot (y, [y]) = x \cdot y + [x] \cdot [y] = x \cdot y - x \cdot y = 0$
* $\dim S = \dim L^{\perp}$, or

  $\dim(M \perp (-L^{\perp}/L)) = \dim M + \dim L^{\perp} - \dim L = 2 \dim L^{\perp}$

  (puisque $\dim M = \dim \mathrm{L} + \dim L^{\perp}$).

Nous pouvons recommencer le procédé avec $L^{\perp}/L$, puisque $\dim L^{\perp}/L < \dim M$. En un nombre fini d'étapes on aboutit à une forme anisotrope Witt équivalente à M.

Pour montrer l'unicité, soient V et W deux formes anisotropes et équivalentes, c'est-à-dire $V \perp (-W)$ est neutre de métaboliseur N.

Le sous module $N \cap V$ de V est auto-orthogonal et donc nul puisque V est anisotrope. De même pour $N \cap W = 0$.

Soit $\pi_v : N \to V$ l'homomorphisme de projection sur V, qui est injectif puisque $\operatorname{Ker} \pi_v = N \cap W$. Son image, $\pi_v N$, est non dégénérée car elle est sous module de V. Donc

$$V = \pi_v N \perp (\pi_v N)^{\perp}$$

Mais si $x \in (\pi_v N)^{\perp}$, alors $(x, 0) \in N^{\perp} = N$. Donc $x \in N \cap V = 0$. D'où $(\pi_v N)^{\perp} = 0$ et π_v est surjective.

De même π_w est un A isomorphisme.

Considérons la composition $\varphi = \pi_w \pi_v^{-1}$ qui est un A isomorphisme entre V et W. Il s'agit en fait d'une isométrie: en effet, si $\varphi(x) = a$, $\varphi(y) = b$, on a $(x, a) \in N$ et $(y, b) \in N$. Donc $(x, a) \cdot (y, b) = 0$ et $x \cdot y = a \cdot b$. □

THÉORÈME 1. $W_{\varepsilon}(A) = W_{\varepsilon}(A/\operatorname{rad} A)$.

Preuve. Nous allons décrire une flèche canonique

$$F : W_{\varepsilon}(A) \to W_{\varepsilon}(A/\operatorname{rad} A)$$

puis montrer qu'il s'agit d'un isomorphisme de groupes abéliens.

Soit M une forme de $W_{\varepsilon}(A)$ et notons M_a l'unique forme anisotrope qui lui est Witt équivalente.

M_a est somme orthogonale de formes simples: en effet, si U est un sous module simple quelconque de M_a, il est non dégénéré. Donc $M_a = U \perp U^{\perp}$ et $U^{\perp}$ est anisotrope à son tour, car c'est un sous module d'un anisotrope.

M_a est donc de module semisimple, donc annulé par rad A, et nous pouvons poser $F(M) = M_a$.

Pour voir que F est un homomorphisme de groupes, soient M et N deux formes. Nous avons $(M \perp N)_a \sim M_a \perp N_a$ dans $W_\varepsilon(A)$, c'est-à-dire que leur différence est neutre dans $W_\varepsilon(A)$ et donc dans $W_\varepsilon(A/\mathrm{rad}A)$. Ainsi l'équivalence a aussi lieu dans $W_\varepsilon(A/\mathrm{rad}A)$ et $F(M \perp N) = F(M) \perp F(N)$.

F est *injective*: si $F(M) = M_a$ (qui est anisotrope) est neutre, cela implique $M_a = 0$. Or $M \sim M_a = 0$.

F est *surjective*: soit N une forme de $W_\varepsilon(A/\mathrm{rad}A)$ et N_a son représentant anisotrope. N_a est une forme de $W_\varepsilon(A)$ et son image par F est naturellement la classe de N_a qui est celle de N. □

§ 2 Réduction au groupe de Witt hermitien d'un corps gauche

Soit A une k-algèbre semisimple de dimension finie munie d'une involution laissant le corps k fixe.

Sa décomposition en produit d'algèbres simples est obtenue avec un système d'idempotents $\{e_i\}_{i=1 \dots n}$ centraux, orthogonaux, primitifs et complets

$$A = Ae_i \times \dots \times Ae_n .$$

Un tel système est unique.

Or $\{\overline{e_i}\}$ est encore un système d'idempotents comme avant. Quitte à renuméroter, on suppose $\overline{e_i} = e_i$ pour $i = 1, \dots, r$ et $\overline{e_i} = e_j$, $j \neq i$, pour $i = r + 1, \dots, n$.

D'autre part chaque algèbre simple Ae_i possède un seul module simple U_i et cela fournit une liste complète et sans répétitions des A-modules simples.

Remarque. Si Λ est une k-algèbre avec involution, U un Λ module simple, $A = \Lambda/\mathrm{rad}\,\Lambda$ et e_i l'idempotent central pour lequel U est un Ae_i module simple, on a que

$$U \simeq U^* \Leftrightarrow e_i = \overline{e_i}$$

(où $U^* = \mathrm{Hom}_k(U, k)$, qui est un Λ module à gauche via $(a\varphi)(x) = \varphi(ax)$ pour $\varphi \in U^*$, $a \in A$ et $x \in U$).

Il suffit de remarquer que U^* est simple, et c'est en fait le module simple sur $A\overline{e_i}$.