

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 29 (1983)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PROPOS DES ÉQUATIONS ANTIPELLIENNES
Autor: Kaplan, Pierre
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-52984>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 11.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

A PROPOS DES ÉQUATIONS ANTIPELLIENNES

par Pierre KAPLAN

Soit m un entier positif non divisible par un carré. Les équations anti-pelliennes sont les équations

$$(1) \quad T^2 - mU^2 = \delta$$

où δ est un diviseur sans diviseur carré et >1 du discriminant Δ du corps quadratique $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$. Le but de cette note est de donner une nouvelle démonstration du fait suivant :

PROPOSITION. *Le nombre m étant donné, il existe exactement un nombre δ tel que l'équation (1) soit résoluble.*

Nous noterons δ_0 le nombre δ tel que l'équation (1) soit résoluble.

On voit immédiatement que l'équation $X^2 - mY^2 = -1$ est résoluble si, et seulement si, $\delta_0 = m$.

L'importance de cette proposition a été notée par G. Pall [6] et de notre côté, nous l'avons utilisée notamment dans [3], [4] et [5].

La proposition a été jusqu'à présent démontrée à partir de la théorie des formes quadratiques binaires de Gauss de la manière suivante. D'après [2], § 158 ou bien [1], § 153, toute classe de formes de déterminant m et d'ordre 1 ou 2 pour la composition représente exactement deux diviseurs sans diviseurs carrés et ≥ 1 de Δ , donc, en particulier, la classe de $X^2 - mY^2$, qui représente déjà 1, représente un autre de ces diviseurs, δ_0 . Cette démonstration utilise la théorie de la réduction des formes quadratiques binaires indéfinies.

Au contraire, notre démonstration repose uniquement sur la propriété suivante des solutions de l'équation de Pell

$$(2) \quad R^2 - mS^2 = 1 :$$

Si (R_0, S_0) désigne la solution de (2) où R_0 et S_0 sont strictement positifs et minimaux et si (R, S) est une solution de (1) où R et S sont strictement positifs, il existe un entier $k \geq 1$ tel que

$$(3) \quad R + S\sqrt{m} = (R_0 + S_0\sqrt{m})^k.$$

Nous poserons

$$(4) \quad \eta_0 = R_0 + S_0 \sqrt{m}$$

et démontrerons le résultat suivant, qui précise la proposition.

THÉORÈME. Soit m un entier positif non divisible par un carré.

1) Parmi les équations

$$(5) \quad dV^2 - eW^2 = t$$

où t, d, e sont des entiers positifs vérifiant

$$(6) \quad \begin{cases} t = 1 \text{ si } m \not\equiv -1 \pmod{4}, t = 1 \text{ ou } 2 \text{ si } m \equiv -1 \pmod{4}, \\ de = m, dt \neq 1, \end{cases}$$

une et une seule a des solutions entières (V, W) .

2) Soit

$$(5_0) \quad d_0 V^2 - e_0 W^2 = t_0$$

celles des équations (5) qui est résoluble et soit (V_0, W_0) la solution de (5_0) où V_0 et W_0 sont positifs et minimaux. Posons

$$(7) \quad \varepsilon_0 = \frac{V_0 \sqrt{d_0 t_0} + W_0 \sqrt{e_0 t_0}}{t_0}.$$

Alors

$$(8) \quad \varepsilon_0^2 = \eta_0.$$

Remarques.

1) La condition $dt \neq 1$ de (6) signifie que l'équation (5) ne peut être l'équation de Pell (2).

2) On passe de l'équation (5_0) à l'équation (1) résoluble en multipliant par d_0 , c'est-à-dire que $\delta_0 = d_0 t_0$, $T = d_0 V$, $U = W$. Inversement, si

$$T^2 - mU^2 = \delta_0,$$

on a $\delta_0 = d_0 t_0$ où $d_0 \mid m$ et $t_0 = 1$ ou 2. Alors $T = d_0 V$ et divisant par d_0 , on trouve l'équation (5_0) avec $W = U$.

3) Dans [5], lemma 1, p. 360, le théorème est démontré à partir de la proposition et des applications du théorème sont faites.

Démonstration du théorème. Considérant la relation

$$R_0^2 - mS_0^2 = 1 \text{ modulo } 4,$$

on voit que R_0 et S_0 ont des parités différentes et que R_0 est impair si $m \not\equiv -1 \pmod{4}$. Si $m \equiv -1 \pmod{4}$, il arrive que R_0 soit pair, par exemple $2^2 - 3 \cdot 1^2 = 1$, ou bien impair, par exemple $25^2 - 39 \cdot 4^2 = 1$.

Supposons d'abord R_0 impair. L'équation $R_0^2 - mS_0^2 = 1$ s'écrit

$$(9) \quad \frac{R_0 + 1}{2} \frac{R_0 - 1}{2} = m \left(\frac{S_0}{2} \right)^2.$$

Les entiers $\frac{R_0 + 1}{2}$ et $\frac{R_0 - 1}{2}$ étant premiers entre eux, il existe des entiers d_0 et e_0 positifs tels que $d_0 e_0 = m$ et des entiers $V_0 > 0$ et $W_0 > 0$ tels que $V_0 W_0 = \frac{S_0}{2}$, $\frac{R_0 + 1}{2} = d_0 V_0^2$ et $\frac{R_0 - 1}{2} = e_0 W_0^2$, d'où

$$(10) \quad 1 = d_0 V_0^2 - e_0 W_0^2$$

$$(11) \quad R_0 = d_0 V_0^2 + e_0 W_0^2; S_0 = 2V_0 W_0.$$

Comme $W_0 < S_0$, on a $d_0 > 1$.

Supposons maintenant R_0 pair. L'équation $R_0^2 - mS_0^2 = 1$ s'écrit

$$(9') \quad (R_0 + 1)(R_0 - 1) = mS_0^2.$$

Les entiers impairs $R_0 + 1$ et $R_0 - 1$ ont pour différence 2, donc sont premiers entre eux, donc il existe des entiers d_0 et e_0 positifs tels que $d_0 e_0 = m$ et des entiers V_0 et W_0 positifs tels que $V_0 W_0 = S_0$, $R_0 + 1 = d_0 V_0^2$ et $R_0 - 1 = e_0 W_0^2$, d'où

$$(10') \quad 2 = d_0 V_0^2 - e_0 W_0^2$$

$$(11') \quad 2R_0 = d_0 V_0^2 + e_0 W_0^2; S_0 = V_0 W_0.$$

Posons $t = 1$ si R_0 est impair, $t = 2$ si R_0 est pair.

Alors les relations (11) si R_0 est impair, (11') si R_0 est pair montrent que ε_0 défini par (7) vérifie (8).

Nous avons donc trouvé l'équation (5₀) ayant des solutions, à savoir (10) si R_0 est impair, (10') si R_0 est pair. Notons que cette relation (5₀) entraîne

$$(12) \quad \varepsilon_0^{-1} = \frac{V_0 \sqrt{d_0 t_0} - W_0 \sqrt{e_0 t_0}}{t_0}.$$

Pour achever la démonstration du théorème, nous allons montrer que si une équation (5) vérifiant (6) a une solution positive (V, W) , alors $t = t_0$, $d = d_0$, $e = e_0$, $V \geq V_0$ et $W \geq W_0$. Posons

$$(13) \quad R = \frac{dV^2 + eW^2}{t}, S = \frac{2VW}{t}, \varepsilon = \frac{V\sqrt{dt} + W\sqrt{et}}{t}.$$

On vérifie que $\varepsilon^2 = R + S\sqrt{m}$ et que $R^2 - mS^2 = 1$.

D'après (3) et (8), il existe un entier $k \geq 1$ tel que $\varepsilon^2 = \eta_0^k = \varepsilon_0^{2k}$, donc, comme ε et ε_0 sont des nombres réels positifs, on a

$$(14) \quad \varepsilon = \varepsilon_0^k.$$

Développant ε_0^k en tenant compte de ce que $\varepsilon_0^2 = R_0 + S_0\sqrt{m}$ et aussi de (12), on voit qu'il existe des entiers positifs t_1, d_1, e_1, V_1 et W_1 tels que

$$(15) \quad \varepsilon = \frac{V_1\sqrt{d_1t_1} + W_1\sqrt{e_1t_1}}{t_1}; \quad \varepsilon^{-1} = \frac{V_1\sqrt{d_1t_1} - W_1\sqrt{e_1t_1}}{t_1}$$

avec

$$(16) \quad (t_1, d_1, e_1) = \begin{cases} (1, 1, m) & \text{si } k \text{ est pair} \\ (t_0, d_0, e_0) & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

Les équations (5) et (13) montrent que

$$(17) \quad \varepsilon^{-1} = \frac{V\sqrt{dt} - W\sqrt{et}}{t}.$$

De (13), (15) et (17) résulte en particulier que

$$\frac{V_1}{t_1}\sqrt{d_1t_1} = \frac{V}{t}\sqrt{dt}.$$

Ceci n'est possible que si d_1t_1 est le carré d'un entier.

Si $m \not\equiv -1 \pmod{4}$, d_1 est un carré, donc, comme ni d ni d_1 n'a de diviseur carré, $d = d_1$, et, comme $d \neq 1$, (16) montre que $d = d_0$, $e = e_0$ et k est impair.

Si $m \equiv -1 \pmod{4}$, d et d_1 sont impairs, donc $t = t_1$, donc d_1 est un carré, donc ici encore $d = d_1$. Comme $dt \neq 1$, (16) montre que $t = t_0$, $d = d_0$, $e = e_0$ et k est impair.

Donc $\varepsilon = \varepsilon_0^k$ avec k impair ≥ 1 , ce qui entraîne, puisque $\varepsilon_0 > 1$

$$\varepsilon = \frac{V\sqrt{d_0t_0} + W\sqrt{e_0t_0}}{t_0} \geq \frac{V_0\sqrt{d_0t_0} + W_0\sqrt{e_0t_0}}{t_0} = \varepsilon_0.$$

Comme (V, W) et (V_0, W_0) sont deux solutions positives de la même équation (5₀), on a $V \geq V_0$ et $W \geq W_0$. Ceci achève la démonstration du théorème.

RÉFÉRENCES

- [1] DIRICHLET, P. G. L. und R. DEDEKIND. *Vorlesungen über Zahlentheorie*. Chelsea Publishing Company, New York (1968).
- [2] GAUSS, C. F. *Disquisitiones Arithmeticae, Arithmetische Untersuchungen*. Chelsea (1965).
- [3] KAPLAN, P. Sur le 2-groupe des classes d'idéaux des corps quadratiques. *J. Reine Angew. Math.* 283/284 (1976), 313-363.
- [4] KAPLAN, P. and K. S. WILLIAMS. An Artin character and representations of primes by binary quadratic forms. *Manuscripta Mathematica*, 33 (1981), 339-356.
- [5] HALTER-KOCH, F., P. KAPLAN and K. S. WILLIAMS. An Artin character and representations of primes by binary quadratic forms II. *Manuscripta Mathematica*, 37 (1982), 357-381.
- [6] PALL, G. Discriminantal divisors of binary quadratic forms. *Journal of Number Theory*, 1 (1969), 525-533.

(Reçu le 20 janvier 1983)

Pierre Kaplan

Université de Nancy I
France

vide-leer-empty