Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 28 (1982)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE PRÉSENTATION ADÉLIQUE DE LA SÉRIE SINGULIÈRE ET DU PROBLÈME DE WARING

Autor: Lachaud, Gilles

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-52235

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

UNE PRÉSENTATION ADÉLIQUE DE LA SÉRIE SINGULIÈRE ET DU PROBLÈME DE WARING

par Gilles LACHAUD

INTRODUCTION

Si F est une forme entière à n variables, notons $U_{\mathbf{A}}(t)$, pour $t \in \mathbf{Z}$, l'ensemble des points adéliques de la variété algébrique définie par la relation $F(x) = t$. Lorsque F est la forme de Fermat

$$F(x) = x_1^d + \ldots + x_n^d,$$

G. H. Hardy et J. E. Littlewood ont appelé *Série Singulière* ce que nous écrivons maintenant

$$S_{\mathbf{A}}(t) = \int_{U_{\mathbf{A}}(t)} \phi(x)\, \omega_t(x)$$

où ω_t est la forme de Leray sur $U_{\mathbf{A}}(t)$, et où ϕ est une certaine fonction standard sur $\mathbf{A}^n$.

Lorsque F est une forme quadratique, c'est A. Weil qui a introduit ces intégrales sous cette forme dans [9], pour établir ce qu'il a nommé la *formule de Siegel.* Celle-ci établit un lien entre l'intégrale $S_{\mathbf{A}}(t)$ et le nombre

$$N(t) = \# \{x \in \mathbf{Z}^n \mid F(x) = t\},$$

qui s'écrit aussi

$$N(t) = \sum_{U_{\mathbf{Q}}(t)} \phi(x).$$

Pour les formes de degré supérieur, le théorème de Hardy-Littlewood affirme que si F est la forme de Fermat, on a

$$N(t) \sim S_{\mathbf{A}}(t)$$

lorsque t tend vers l'infini, si $n > 2^d$; ceci implique, puisque $S_{\mathbf{A}}(t)$ tend vers l'infini avec t, que tout nombre entier assez grand est somme de n puissances d'ordre d.

Pour les formes de degré supérieur la série singuliére à été étudiée dans le cadre adélique par T. Ono [7] et J. I. Igusa [5], [6]. Leurs conclusions sont rassemblées dans le chapitre I. On pouvait penser qu'il était possible d'établir dans ce cadre le résultat de Hardy et Littlewood : c'est ce que nous avons fait au chapitre II, en reprenant la *méthode du cercle* adaptée ici au cercle adélique $\mathbf{A}/\mathbf{Q}$ et en utilisant la Formule de Poisson comme le suggèrent naturellement les expressions de $S_{\mathbf{A}}(t)$ et de $N(t)$.

Nous espérons que l'approche que nous présentons ici permettra de traiter le problème de Waring avec plus d'aisance dans le cas des autres corps adéliques, qu'il s'agisse des corps de nombres algébriques ou des corps de fonctions, et aussi dans d'autres cas que celui de la forme de Fermat.

J'ajoute que cet article est résumé dans [11], et que les résultats de [1] utilisés ici sont repris dans le livre [12], qui vient de paraître au moment de la publication de ce volume.

Je tiens à remercier J. P. Serre pour l'intérêt qu'il a montré pour le présent travail, et aussi pour m'avoir communiqué deux lettres que P. Deligne lui a adressées (datées des 14 et 17 novembre 1971); J. J. Sansuc, de qui j'ai appris l'existence du mémoire [10] après la rédaction du présent article; et R. Danset pour sa lecture attentive du manuscrit.

Chapitre I. La transformation de Gauss

1. Définitions. Notons P l'ensemble des nombres premiers, $|x|_p$ la valeur absolue p-adique du nombre $x \in \mathbf{Q}$, et $|x|_0$ sa valeur absolue archimédienne. L'ensemble $\overline{P} = P \cup \{0\}$ est l'ensemble des places de $\mathbf{Q}$. Nous noterons $\mathbf{A}$ l'anneau des adèles de $\mathbf{Q}$.

Pour tout $x \in \mathbf{Q}_p$, écrivons

$$x = \sum_{n \in \mathbf{Z}} x_n p^n \quad \text{avec} \quad x_n \in \{0, 1, ..., p-1\} \tag{1}$$

(somme qui ne comporte qu'un nombre fini de termes d'indice négatif non nuls) et posons

$$< x > = \sum_{n<0} x_n p^n ; \tag{2}$$

on a

$$x = < x > + [x] ,$$

avec $< x > \in \mathbf{Q}$, $0 \leqslant < x > < 1$, $[x] \in \mathbf{Z}_p$.

Le caractère de Tate χ_p de $\mathbf{Q}_p$ est défini par la relation

$$\chi_p(x) = \exp(+2i\pi < x >).$$

D'autre part, si $x \in \mathbf{Q}_0 = \mathbf{R}$, on pose

$$\chi_0(x) = \exp(-2i\pi x).$$

Rappelons que si $p \in P$, l'espace $\mathbf{S}(\mathbf{Q}_p^n)$ est constitué des fonctions localement constantes à support compact sur $\mathbf{Q}_p^n$; si $p = 0$, l'espace $\mathbf{S}(\mathbf{R}^n)$ est l'espace des fonctions C^∞ sur $\mathbf{R}^n$, à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées, et l'espace $\mathbf{S}(\mathbf{A}^n)$ des *fonctions standard* sur $\mathbf{A}^n$ est constitué des combinaisons linéaires de fonctions:

$$\phi(x) = \prod_{p \in \bar{P}} \phi_p(x_p), \tag{3}$$

lorsque $x = (x_p) \in \mathbf{A}$, où $\phi_0 \in \mathbf{S}(\mathbf{R}^n)$, où $\phi_p \in \mathbf{S}(\mathbf{Q}_p^n)$, et où de plus ϕ_p est égale à la fonction caractéristique de $\mathbf{Z}_p^n$ pour tout $p \in P$ sauf un nombre fini d'entre eux.

Si $x = (x_p) \in \mathbf{A}$, on pose

$$\chi(x) = \prod_{p \in \bar{P}} \chi_p(x_p); \tag{4}$$

la fonction χ est le *caractère de Tate (global) de* $\mathbf{A}$.

2. La transformation de Gauss. Soit F une forme entière à n variables et de degré d, c'est-à-dire un polynôme homogène $F \in \mathbf{Z}[X_1, ..., X_n]$ de degré d, et soit ϕ une fonction standard sur $\mathbf{A}^n$. *La transformée de Gauss (pour la forme* F*) de la fonction* $\phi \in \mathbf{S}(\mathbf{A}^n)$ est définie par la relation

$$G_{\mathbf{A}}(\phi, \xi) = \int_{\mathbf{A}^n} \phi(x)\, \chi(\xi F(x))\, dx \tag{5}$$

où la mesure dx sur $\mathbf{A}^n$ est la mesure de Haar telle que

$$dx = \prod_{p \in P} dx_p,$$

en prenant pour dx_0 la mesure de Lebesgue et pour dx_p la mesure de Haar sur $\mathbf{Q}_p^n$ telle que $\mathbf{Z}_p^n$ soit de mesure 1.

Pour montrer que cette intégrale converge, on peut supposer que ϕ est décomposable, c'est-à-dire de la forme donnée dans la relation (3); dans ce cas la fonction $G_{\mathbf{A}}(\phi, \xi)$ est égale à un produit d'intégrales locales:

$$G_{\mathbf{A}}(\phi, \xi) = \prod_{p \in \bar{P}} G_p(\phi_p, \xi_p), \tag{6}$$

avec, pour $p \in \overline{P}$, et $\xi \in \mathbf{Q}_p$,

$$G_p(\phi_p, \xi) = \int_{\mathbf{Q}_p^n} \phi_p(x)\, \chi_p(\xi F(x))\, dx\,. \tag{7}$$

3. Les places ultramétriques. Nous allons étudier les intégrales (7) dans le cas où p est un nombre premier, et où ϕ_p est la fonction caractéristique de $\mathbf{Z}_p^n$; on posera alors $G_p(\phi_p, \xi) = G_p(\xi)$ pour $\xi \in \mathbf{Q}_p$; si $|\xi - \eta| \leqslant 1$, alors $G_p(\xi) = G_p(\eta)$.

Si $q = p^e$ avec $e \geqslant 1$, et si $z \in \mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$, on définit la *somme de Gauss* de F en z par la relation

$$\gamma_q(F, z) = \gamma_q(z) = q^{-n} \Sigma\ \chi_q(z\tilde{F}(x))\,, \tag{8}$$

où x parcourt l'ensemble $(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^n$, où on a noté $\tilde{F}$ la réduction modulo q de F, et où on a posé

$$\tilde{\chi}_q(\tilde{x}) = \chi_p(q^{-1}x)$$

pour $x \in \mathbf{Z}_p$, en notant $\tilde{x}$ l'image de x dans $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$. Il est clair que $|\gamma_q(z)| \leqslant 1$, et que $\gamma_q(0) = 1$. Nous renvoyons à [7], Ch. I, § 2 et § 3, pour la démonstration du résultat suivant:

Théorème 1.1. *Avec les notations précédentes, supposons* $\xi \in \mathbf{Z}_p$ *et* $q = p^e$ *avec* $e \geqslant 1$; *on a alors*

$$G_p(q^{-1}\xi) = \gamma_q(\tilde{\xi})\,.$$

Posons maintenant, si K est un corps et si F est une forme à coefficients dans K:

$$\Delta_K(F) = \{x \in K^n \mid dF(x) = 0\}\,.$$

La relation d'Euler implique que si le degré de F est premier à la caractéristique de K, l'ensemble algébrique $\Delta_K(F)$ est inclus dans le cône d'équation $F = 0$.

Définition 1.2. On dit que la forme F est *fortement non-dégénérée sur* K si $\Delta_K(F) = \{0\}$.

Si la forme F est définie sur $\mathbf{Z}$, on pose $\Delta_p(F) = \Delta_K(F)$ si $K = \mathbf{Q}_p$; on pose aussi $\tilde{\Delta}_p(F) = \Delta_K(F)$ si $K = \mathbf{F}_p$ et si $\tilde{F}$ est la réduction modulo p de F. On pose encore, si F est une forme de degré d,

$$\Sigma(F) = \{p \in P \mid p \mid d \quad \text{ou} \quad \tilde{\Delta}_p(F) \neq 0\}\,;$$

si F est fortement non-dégénérée sur $\mathbf{Q}$, l'ensemble $\Sigma(F)$ est fini. Enfin, pour tout entier $d \geqslant 3$, on pose

$$\Sigma(d) = \{p \in P \mid p \leqslant (d-1)^6\}.$$

THÉORÈME 1.3. *Supposons* $n > d \geqslant 3$, *et la forme* F *fortement non-dégénérée sur* $\mathbf{Q}_p$. *Soit* $\phi \in \mathbf{S}(\mathbf{Q}_p^n)$; *alors si* $\xi \in \mathbf{Q}_p$ *et si* $|\xi|_p > 1$, *on a*

$$|G_p(\phi, \xi)| \leqslant C_p |\xi|^{-(n/d)}$$

avec $C_p = 1$ *si* ϕ *est la fonction caractéristique de* $\mathbf{Z}_p^n$ *et si* $p \notin \Sigma(d) \bigcup \Sigma(F)$.

Donnons quelques indications sur la démonstration de ce résultat. Igusa a établi l'inégalité figurant dans le théorème pour tout p et toute $\phi \in \mathbf{S}(\mathbf{Q}_p^n)$, avec une constante C_p qui peut être éventuellement >1, en utilisant sa théorie des développements asymptotiques et le principe de résolution des singularités, qui est explicite dans le cas des formes fortement non-dégénérées. Nous renvoyons pour cela à [5], Corollary to Theorem 1, et [6], chapter III, § 5, relation (106). D'autre part, si $|\xi|_p = q > 1$ et si ϕ est la fonction caractéristique de $\mathbf{Z}_p$, le théorème 1.1. montre que

$$G_p(\phi, \xi) = G_p(\xi) = q^{-1} \sum_{x \bmod q} \chi_p(\xi F(x));$$

si on pose $<\xi>_p = a/q$, on en déduit, par définition du caractère de Tate, que

$$G_p(\xi) = q^{-1} \sum_{x \bmod q} \exp(2i\pi a\, F(x)/q). \tag{9}$$

Par ailleurs, on dispose du résultat suivant, démontré par Deligne (cf. [2], Théorème 8.4. et [8], Corollaire 6.3.):

THÉORÈME 1.4. *Si* $(a, p) = 1$ *et si* $p \notin \Sigma(F)$, *alors*

$$\left| \sum_{x \bmod p} \exp(2i\pi a F(x)/p) \right| \leqslant (d-1)^n p^{n/2}.$$

Puisque $d \geqslant 3$, on a

$$(d-1)^n p^{n/2} \leqslant C_p p^{n(1-(1/d))},$$

avec $C_p = (d-1)^n p^{-(n/6)}$; on déduit donc du théorème 1.3. et de la relation (9) que l'on a

$$|G_p(\xi)| \leqslant C_p p^{-(n/d)}$$

pour $p \notin \Sigma(F)$, avec $C_p = 1$ si $p \notin \Sigma(d)$. On passe de là au cas où $|\xi|_p = p^e$ avec $e > 1$ par la méthode usuelle de réduction: cf. [5], lemma 1 et lemma 2.

Remarque. Supposons que F soit la *forme de Fermat:*

$$F(x) = x_1^d + \dots + x_n^d$$

Celle-ci est fortement non dégénérée sur $\mathbf{Q}_p$ quel que soit p, et $\tilde{F}$ est fortement non-dégénérée sur $\mathbf{F}_p$ si p ne divise pas d. Pour cette forme, il est possible d'établir l'inégalité du théoreème 1.3. par des moyens « élémentaires ». En effet, posons

$$g_p(\xi) = \int_{\mathbf{Z}_p} \chi_p(x^d \xi)\, dx\,; \tag{10}$$

on a alors

$$G_p(\xi) = g_p(\xi)^n\,; \tag{11}$$

là encore, si $|\xi|_p = q > 1$, on voit que

$$g_p(\xi) = \sum_{x \bmod q} \chi_p(\xi x^d)\,;$$

et si $<\xi>_p = a/q$, il vient donc

$$g_p(\xi) = \sum_{x \bmod q} \exp(2i\pi a x^d/q)\,;$$

et le résultat suivant est aisé à établir (cf. [1], Lemma 12):

PROPOSITION 1.5. *Si* $(a, p) = 1$ *et si* $r = (d, p-1)$, *alors*

$$\left| \sum_{x \bmod p} \exp(2i\pi a x^d/p) \right| \leqslant (r-1)\, p^{1/2}\,.$$

On déduit donc de la proposition 1.5. que si p ne divise pas d, on a la relation

$$|g_p(\xi)| \leqslant C_p\, p^{-(1/d)}$$

lorsque $|\xi|_p = p$, avec $C_p = 1$ si $p \notin \Sigma(d)$; enfin, des calculs élémentaires et la méthode usuelle de réduction (cf. [1], Lemmas 13, 14 et 15) permettent d'établir la

PROPOSITION 1.6. *Avec les notations précédentes, on a*

$$|g_p(\xi)| \leqslant C_p\, |\xi|_p^{-1\,(1/d)}\,,$$

où $C_p = 1$ *si* $p \notin \Sigma(d)$.

Vu la relation (10), la proposition 1.6. implique l'inégalité figurant dans le théorème 1.3. pour la forme de Fermat.

Les résultats précédents impliquent le

COROLLAIRE 1.7. *Si* $n > d$, *alors la fonction* $G_p(\phi, \xi)$ *est intégrable sur* $\mathbf{Q}_p$.

Posons maintenant, pour $\xi \in \mathbf{A}$,

$$Q(\xi) = \prod_{p \in P} \operatorname{Max}(1, |\xi_p|_p), \tag{12}$$

de telle sorte que $Q(\xi)$ ne dépend que de la projection de ξ sur l'espace $\mathbf{A}_f$ des *adèles finis* (rappelons que $\mathbf{A} = \mathbf{R} \times \mathbf{A}_f$). Si $\phi \in \mathbf{S}(\mathbf{A}^n)$, posons

$$G_f(\phi, \xi) = \prod_{p \in P} G_f(\phi_p, \xi_p)$$

pour $\xi \in \mathbf{A}_f$.

COROLLAIRE 1.8. *Supposons* F *fortement non-dégénérée sur* Q_p *pour tout* $p \in P$. *Alors*

$$G_f(\xi) \ll Q(\xi)^{-(n/d)};$$

en particulier, la fonction $G_f(\phi, \xi)$ *est intégrable sur* $\mathbf{A}_f$ lorsque $n > 2d$.

Démonstration. Si $|\xi|_p \leqslant 1$, et si ϕ est la fonction caractéristique de $\mathbf{Z}_p^n$, la relation (7) montre immédiatement que $G_p(\phi, \xi_p) = 1$. Ceci, joint au Théorème 1.3., implique donc que l'on a

$$|G_p(\phi, \xi_p)| \leqslant C_p \operatorname{Max}(1, |\xi|_p)^{-(n/d)}$$

avec $C_p = 1$ pour presque tout $p \in P$; il s'ensuit que

$$|G_f(\xi)| \leqslant \Big(\prod_{p \in P} C_p\Big) Q(\xi)^{-(n/d)}.$$

Pour prouver la dernière assertion du corollaire, écrivons

$$\int_{\mathbf{A}^f} Q(\xi)^{-(n/d)} = \prod_{p \in P} \int_{\mathbf{Q}_p} \operatorname{Max}(1, |\xi|_p)^{-(n/d)} \, d\xi;$$

or

$$\int_{|\xi|_p > 1} |\xi|_p^{-s} \, d\xi_p = (1 - p^{-1})(1 - p^{1-s})^{-1} \, p^{1-s} \leqslant (1 - 2^{1-s}) \, p^{1-s};$$

il s'ensuit que

$$\int_{\mathbf{Q}_p} \operatorname{Max}(1, |\xi|_p)^{-s}\, d\xi \leqslant 1 + Cp^{1-s},$$

avec $C = 1 - 2^{1-s}$, et donc que l'on a

$$\int_{\mathbf{A}_f} Q(\xi)^{-s}\, d\xi \leqslant \prod_{p \in P} (1 + Cp^{1-s}); \tag{13}$$

ce produit infini convergeant si $s > 2$, on voit donc que la fonction G_f est intégrable si $n > 2d$.

4. La place archimédienne. Si $p = 0$, on dispose de résultats analogues à ceux de la section précédente.

Théorème 1.9. *Supposons F fortement non-dégénérée sur $\mathbf{R}$, et soit $\phi_0 \in \mathbf{S}(\mathbf{R}^n)$. Alors on a*

$$|G_0(\phi_o, \xi)| \leqslant C \operatorname{Max}(1, |\xi|)^{-(n/d)}$$

pour tout $\xi \in \mathbf{R}^n$, avec une constante C dépendant de ϕ_0.

Pour démontrer le théorème 1.9., on peut utiliser le prolongement analytique de la distribution F^s, ce qui peut être effectué en résolvant les singularités de la forme F à l'origine ; on renvoie encore à Igusa [5], n° 2 et [6], chapter III, §5, pour une démonstration du théorème 1.9.

Remarque. Dans le cas où F est la forme de Fermat on peut préciser les résultats comme suit.

Supposons que

$$\phi_0(x) = \varphi_0(x_1) \dots \varphi_0(x_n),$$

pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, où φ_0 est une fonction de $\mathbf{S}(\mathbf{R})$ telle que $0 \leqslant \varphi_0 \leqslant 1$, et posons

$$A(\phi_0) = \varphi_0(0)^{-d}.$$

Proposition 1.10. *Avec les notations et hypothèses précédentes, on a*

$$|G_0(\phi_0, \xi)| \leqslant C \operatorname{Max}(A(\phi_0), |\xi|_0)^{-(n/d)}$$

pour tout $\xi \in \mathbf{R}^n$, où la constante C est indépendante de ϕ_0.

Démonstration. Posons

$$g_0(\xi) = \int_{\mathbf{R}} \varphi_0(x) \exp(-2i\pi x^d \xi)\, dx .$$

Alors on a d'une part

$$|g_0(\xi)| \leqslant \int_{\mathbf{R}} \varphi_0(x)\, dx = \hat{\varphi}_0(0), \tag{14}$$

et d'autre part, en posant $t = x^d \xi$,

$$g_0(\xi) = d^{-1} |\xi|_0^{-(1/d)} \int \varphi_0(t^{1/d} \xi^{-(1/d)}) \quad \exp(-2i\pi t)\, t^{(1/d)-1}\, dt ,$$

et l'intégrale de droite est majorée par l'intégrale convergente

$$I = \int \exp(-2i\pi t)\, t^{(1/d)-1}\, dt ,$$

puisque $0 \leqslant \varphi_0 \leqslant 1$. On a donc

$$g_0(\xi) \ll |\xi|_0^{-(1/d)} . \tag{15}$$

les relations (14) et (15) impliquent donc

$$\begin{aligned} g_0(\xi) &\ll \operatorname{Min}\left(\varphi_0(0), |\xi|_0^{-(1/d)}\right) \\ &\ll \operatorname{Max}\left(A(\phi_0), |\xi|\right)^{-(1/d)} \end{aligned}$$

ce qui établit la proposition 1.10, puisque

$$g_0(\xi)^n = G_0(\phi_0, \xi) .$$

Pour résumer les résultats obtenus, nous introduisons les hypothèses suivantes:

(SS 1) *On a* $n > 2d$ *et* $d \geqslant 3$;

(SS 2) *La forme* F *est non-dégénérée sur* $\mathbf{Q}_p$ *pour tout* $p \in \overline{P}$.

En regroupant les résultats obtenus pour les places ultramétriques et pour la place archimédienne, c'est-à-dire le corollaire 1.8. et le théorème 1.9., on parvient au résultat suivant:

THÉORÈME 1.11. *Sous les conditions* (SS 1) *et* (SS 2) *l'intégrale*

$$G_{\mathbf{A}}(\phi, \xi) = \int_{\mathbf{A}^n} \phi(x)\, \chi(\xi F(x))\, dx$$

est convergente pour tout $\xi \in \mathbf{A}$ *et définit une fonction intégrable sur* $\mathbf{A}$.

5. LA SÉRIE SINGULIÈRE. Si $p \in \overline{P}$ et si $t \in \mathbf{Q}_p$ on pose

$$U_p(t) = \{x \in \mathbf{Q}_p^n \mid F(x) = t\};$$

Puisque F est homogène, l'hypersurface $U_p(t)$ est non singulière si $t \neq 0$. Si $x \in U_p(t)$, et si $\partial F/\partial x_k(x) \neq 0$, on pose

$$\omega_k(x) = (-1)^{k-1} (\partial F/\partial x_k)^{-1}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_k} \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

où la notation $\widehat{dx_k}$ signifie que l'on omet dx_k.

Les ω_k se recollent pour former une forme différentielle $\omega_t(x)$ de degré $n-1$ sur $U_p(t)$, et on a

$$\omega_t(x) \wedge dF(x) = dx; \tag{16}$$

la forme différentielle ω_t est appelée la *forme de Leray* de $U_p(t)$.

Si $\phi \in \mathbf{S}(\mathbf{Q}_p^n)$, et si $t \in \mathbf{Q}_p^*$, on pose

$$S_p(\phi, t) = \int_{U_p(t)} \phi(x)\, \omega_t(x). \tag{17}$$

Si ϕ est la fonction caractéristique de $\mathbf{Z}_p^n$, la fonction $S_p(t) = S_p(\phi, t)$ est appelée la *série singulière locale* de F en p.

THÉORÈME 1.12. *Soit* $p \in \overline{P}$; *si* F *est fortement non-dégénérée, la fonction* $S_p(\phi, t)$ *est intégrable sur* Q_p *et on a, pour* $\xi \in \mathbf{Q}_p$,

$$\hat{S}_p(\phi, \xi) = G_p(\phi, \xi);$$

de plus, si $n > d$ *on a*

$$\hat{G}_p(\phi, -t) = S_p(\phi, t)$$

pour $t \in \mathbf{Q}_p^*$ *et* $\phi \in \mathbf{S}(\mathbf{Q}_p^n)$.

Démonstration. La relation (16) implique que si $\phi \in \mathbf{S}(\mathbf{Q}_p^n)$, on a la relation

$$\int_{F(x) \neq 0} \phi(x)\, dx = \int_{\mathbf{Q}_p^*} dt \int_{U_p(t)} \phi(x)\, \omega_t(x)\,; \tag{18}$$

puisque F est fortement non-dégénérée, l'hypersurface $U_p(0)$ est non singulière hors de l'origine, et donc de mesure nulle ; ceci prouve que $S_p(\phi, t)$ est intégrable. D'autre part

$$\begin{aligned}
\hat{S}_p(\phi, \xi) &= \int_{\mathbf{Q}_p^*} S_p(\phi, t)\, \chi_p(\xi t)\, dt \\
&= \int_{\mathbf{Q}_p^*} \chi_p(\xi t) \int_{U_p(t)} \phi_p(x)\, \omega_t(x) \\
&= \int_{F(x) \neq 0} \phi(x)\, \chi_p(\xi F(x))\, dx \\
&= G_p(\phi, \xi)\,,
\end{aligned}$$

puisque $U_p(0)$ est de mesure nulle. Ceci établit la première relation que nous avions en vue. Enfin, le Corollaire 1.7. (si $p \in P$) ou le Théorème 1.9. (si $p = 0$) montrent que la fonction $G_p(\phi, \xi)$ est intégrable sur $\mathbf{Q}_p$ si $n > d$; la première relation que nous avons établie implique donc, via la formule d'inversion de Fourier, que l'on a

$$\hat{G}_p(\phi, -t) = S_p(\phi, t)$$

pour presque tout $t \in \mathbf{Q}_p$; mais le théorème de Lebesgue et le théorème des fonctions implicites montrent que la fonction $S_p(\phi, t)$ est continue si $t \neq 0$ (cf. [6], p. 75) ; ceci établit donc la seconde assertion du théorème 1.12.

Remarque 1.13. A titre d'exercice, et bien que cela ne soit pas utilisé par la suite, montrons comment on peut retrouver, lorsque F est la forme de Fermat, l'expression usuelle de la Série Singulière. La relation

$$S_p(t) = \hat{G}_p(-t)$$

se réécrit

$$\begin{aligned}
S_p(t) &= \int_{\mathbf{Q}_p} G_p(\xi)\, \chi_p(-t\xi)\, d\xi \\
&= 1 + \sum_{e \geqq 1} \int_{p^{-e}\mathbf{Z}^*} G_p(\xi)\, \chi_p(-t\xi)\, d\xi\,,
\end{aligned}$$

puisque $G_p(\xi) = 1$ si $\xi \in \mathbf{Z}_p$ d'après le théorème 1.1.; ce théorème implique encore que l'on peut écrire l'expression précédente sous la forme

$$S_p(t) = 1 + \sum_{e \geqq 1} \int_{Z_p^*} \gamma_{p^e}(\tilde{\eta})\, \chi_p(-tp^{-e}\eta)\, p^e d\eta$$

où $\tilde{\eta}$ est la classe de η modulo $p^e\mathbf{Z}_p$, et où γ_{p^e} est défini par la relation (8); il s'ensuit que l'on a

$$S_p(t) = 1 + \sum_{e \geqq 1} A(p^e), \tag{19}$$

où on a posé, si $q = p^e$,

$$A(q) = \int_{Z_p^*} \gamma_q(\tilde{\eta})\, \chi_p(-t\eta/q)\, q^{-1}\, d\eta .$$

Mais en posant $\eta = a + q\zeta$ avec $a \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^*$ et $\zeta \in \mathbf{Z}_p$, il vient immédiatement

$$A(q) = \sum_{(a,\, q) = 1} \gamma_q(a) \exp(-2i\pi ta/q); \tag{20}$$

si F est la forme de Fermat, on a

$$\gamma_q(a) = \Big(q^{-1} \sum_{x \bmod q} \exp(2i\pi a x^d/q)\Big)^n, \tag{21}$$

et les relations (19), (20) et (21) donnent l'expression de la série singulière locale figurant par exemple dans [4], P.N.II et [1], [3].

Posons maintenant, si $p \in P$ et si $q = p^e$ avec $e \geqslant 1$,

$$M_q(t) = \# \{x \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^n \mid \tilde{F}(x) = t\} .$$

PROPOSITION 1.14. *Avec les notations précédentes, si q est assez grand, on a*

$$S_p(t) = M_q(t)/q^{n-1} .$$

Démonstration. La fonction S_p est localement constante sur $\mathbf{Q}_p^*$ (cf. [6], p. 83); il s'ensuit que pour tout $t \neq 0$, il existe un entier e tel que

$$S_p(s) = S_p(t) \quad \text{si} \quad |s - t| \leqslant p^e = q;$$

soit σ la fonction caractéristique de l'ensemble

$$\{x \leqslant \mathbf{Q}_p^n \mid |F(x) - t| \leqslant q\} .$$

Si ϕ est la fonction caractéristique de $\mathbf{Z}_p^n$, on a alors, en vertu de la relation (18),

$$\int_{\mathbf{Q}_p^n} \sigma(x)\,\phi(x)\,dx = \int_{\mathbf{Q}_p^*} ds \int_{U_p(s)} \sigma(s)\,\phi(x)\,w_s(x)$$

$$= \int_{|s-t|\leqslant q} S_{p_q}(s)\,ds = q^{-1}\,S_p(t);$$

par ailleurs

$$\int_{\mathbf{Q}_p^n} \sigma(x)\,\phi(x)\,dx = \sum_{y \bmod q} \int_{y+q\,\mathbf{Z}_p^n} \sigma(x)\,dx$$

$$= M_q(t) \int_{q\mathbf{Z}_p^n} dx$$

$$= q^{-n}\,M_q(t),$$

et la proposition 1.14. est donc démontrée.

PROPOSITION 1.15. *Supposons* $n > d \geqslant 3$, *et la forme* F *non-dégénérée sur* $\mathbf{Q}_p$. *On a alors pour tout* $t \in \mathbf{Q}_p$:

$$|\,S_p(t) - 1\,| \leqslant C_p^{1-(n/d)},$$

si $p \notin \Sigma(F) \cup \Sigma(d)$, *où* C *ne dépend que de* n *et* d.

Démonstration. Le théorème 1.12. affirme que $S_p(t) = \hat{G}_p(-t)$; et puisque $G_p = 1$ sur $\mathbf{Z}_p$, il s'ensuit que

$$|\,S_p(t) - 1\,| \leqslant \int_{|\xi|_p > 1} |\,G_p(\xi)\,|\,d\xi\,;$$

en invoquant le théorème 1.3., on en déduit que

$$|\,S_p(t) - 1\,| \leqslant \int_{|\xi|_p > 1} |\,\xi\,|^{-(n/d)}\,d\xi$$

$$\leqslant (1-p^{-1})\,(1-p^{1-(n/d)})^{-1}\,p^{1-(n/d)}$$

$$\leqslant (1-2^{1-(n/d)})^{-1}\,p^{1-(n/d)}$$

ce qui prouve la proposition 1.15.

COROLLAIRE 1.16. *Supposons les conditions (SS 1) et (SS 2) satisfaites et soit* ϕ *une fonction décomposable de* $\mathbf{S}(\mathbf{A}_f^n)$;

a) *le produit infini*

$$S_f(\phi, t) = \prod_{p \in P} S_f(\phi_p, t)$$

converge, et

$$S_f(\phi, t) \ll 1;$$

b) *Supposons que* $U_{\mathbf{A}}(t)$ *soit non vide si* t *est assez grand et aussi que la condition suivante soit remplie:*

(SS 3) Pour tout $p \in P$, *la fonction* ϕ_p *est la fonction caractéristique de* $\mathbf{Z}_p^n$.

Alors, si t *est assez grand, on a*

$$S_f(\phi, t) \gg 1.$$

Démonstration. Le a) est une conséquence directe de la proposition 1.15. On déduit aussi de cette proposition que l'on a

$$\prod_{p \notin \Sigma'} S_p(t) \gg 1,$$

où Σ' est le complémentaire d'un ensemble fini. En effet, choisissons s tel que $1 < s < (n/d) - 1$; on a alors

$$1 - Cp^{-1(n/d)} \geqslant 1 - p^{-s}$$

pour tout $p \notin \Sigma(C)$, où $\Sigma(C)$ est un ensemble fini; si on pose

$$\Sigma' = \Sigma(C) \cup \Sigma(d) \cup \Sigma(F),$$

où C est la constante figurant dans l'inégalité de la proposition 1.15., on a

$$\prod_{p \notin \Sigma'} S_p(t) \geqslant \prod_{p \notin \Sigma'} (1 - p^{-s}) \gg 1. \tag{22}$$

Par ailleurs, si $U_{\mathbf{A}}(t) \neq \emptyset$, alors $U_p(t) \neq \emptyset$ pour tout $p \in P$, et on sait que l'ensemble

$$\{x \in (\mathbf{Z}/p^e\mathbf{Z})^n \mid \tilde{F}(x) = t\}$$

est non vide pour tout $e \geqslant 1$ si et seulement si $U_p(t)$ est non vide; la proposition 1.14. montre donc que si $U_{\mathbf{A}}(t) \neq \emptyset$, alors $S_p(t) > c$ pour tout $p \in P$, ce qui prouve que l'on a

$$\prod_{p \in \Sigma'} S_p(t) \gg 1, \tag{23}$$

et les relations (22) et (23) établissent donc la partie b) du corollaire 1.16.

Signalons en passant le résultat suivant (cf. la démonstration du lemme 11 de [1]):

PROPOSITION 1.17. *Si F est la forme de Fermat et si n est un entier pair vérifiant $n \geqslant 4d$, alors $U_{\mathbf{A}}(t)$ est non vide.*

6. LA FORMULE GLOBALE. Le corollaire 1.16. implique que le produit des mesures $(\omega_t)_p$ sur $U_p(t)$, pour $p \in P$, définit une mesure ω_t sur l'ensemble $U_{\mathbf{A}}(t)$ des points adéliques de la variété $F(x) = t$. Si $\phi \in \mathbf{S}(\mathbf{A}^n)$, on pose

$$S_{\mathbf{A}}(\phi, t) = \int_{U_{\mathbf{A}}(t)} \phi(x)\, \omega_t(w)\,;$$

le corollaire 1.16. montre que cette intégrale converge, et les théorèmes 1.11. et 1.12. impliquent le

THÉORÈME 1.18. *Si les conditions (SS 1) et (SS 2) sont satisfaites, on a*

$$S_{\mathbf{A}}(\phi, t) = \hat{G}_{\mathbf{A}}(\phi, -t)\,.$$

Supposons maintenant

(SS 4) *La forme F est anisotrope sur* $\mathbf{R}$.

Sous la condition (SS 4), l'intégrale

$$S_0(t) = \int_{U_0(t)} \omega_t(x)$$

est convergente, et il est clair que l'on a

$$S_0(t) = V_0\, t^{(n/d)-1}$$

avec

$$V_0 = \int_{U_0(1)} \omega_1(x)\,.$$

Posons, pour $t \in \mathbf{Z}$,

$$S_f(t) = \prod_{p \in P} S_p(t)\,,$$

où $S_p(t)$ est la série singulière locale de F en p, et

$$S_{\mathbf{A}}(t) = S_0(t)\, S_f(t)\,;$$

la fonction $S_{\mathbf{A}}(t)$ est appelée *la série singulière globale de la forme* F. Introduisons enfin une dernière condition:

(SS 5) *Il existe* $T > 0$ *telle que la fonction* $\phi_0 \in \mathbf{S}(\mathbf{R}^n)$ *soit égale à 1 sur le compact*

$$\{x \in \mathbf{R}^n \mid F(x) \leqslant T\}\,.$$

Il vient donc immédiatement:

PROPOSITION 1.19. *Sous les conditions (SS 1) à (SS 5), on a*

$$S_{\mathbf{A}}(t) = S_{\mathbf{A}}(\phi, t)$$

si $t \leqslant T$.

CHAPITRE II. LE THÉORÈME DE HARDY-LITTLEWOOD

Dans ce chapitre, on considère la *forme de Fermat*

$$F(x) = x_1^d + \ldots + x_n^d \tag{1}$$

où d est un entier pair; et on va étudier le comportement asymptotique de la suite

$$N(t) = \#\,\{x \in \mathbf{Z}^n \mid F(x) = t\}\,, \tag{2}$$

lorsque $t \in \mathbf{N}$ tend vers l'infini. Le théorème de Hardy-Littlewood (cf. [4], P.N. II) s'énonce *ainsi*:

THÉORÈME 2.1. *Supposons* $d \geqslant 3$ *et* $n > 2^d$.
On a alors

$$N(t) = S_{\mathbf{A}}(t)\left(1 + 0\left(t^{-\theta}\right)\right)$$

lorsque t *tend vers l'infini, avec* $\theta > 0$.

Remarquons que pour établir le théorème 2.1., il suffit de démontrer que l'on a

(3) $$N(t) = S_{\mathbf{A}}(t) + 0\,(t^{(n/d)-1-\theta})\,;$$

on a en effet

(4) $$S_{\mathbf{A}}(t) = S_0(t)\,S_f(t)\,;$$

mais le corollaire 1.16. et la proposition 1.17. impliquent que l'on a

(5) $$1 \ll S_f(t) \ll 1\,,$$

et

(6) $$S_0(t) = V_0(t)^{(n/d)-1}\,;$$

ceci montre que la relation (3) implique le théorème 2.1.

On pose maintenant

$$R = [t^{1/d}] + 1\,,$$

et $\| x \|_0 = \operatorname{Max}(|x_1|_0, ..., |x_n|_0)$ si $x = (x_1, ..., x_n) \in R^n$. On constate que si $\| x \|_0 > R - 1$, alors $F(x) > t$.

Soit χ_R la fonction caractéristique de l'intervalle $| x |_0 < R$ de la droite réelle, et ψ une fonction C^∞ positive sur $\mathbf{R}$, telle que

$$\int_{\mathbf{R}} \psi(x)\,dx = 1\,,$$

et $\psi(x) = 0$ si $| x |_0 \geqslant 1/3$; on pose

(7) $$\varphi_0 = \chi_R * \psi\,,$$

de telle sorte que la fonction φ_0 est C^∞ sur $\mathbf{R}$, que le support de φ_0 est inclus dans l'intervalle $| x |_0 \leqslant R + (1/3)$, et que le support de la dérivée de φ_0 est inclus dans l'ensemble $R - (1/3) \leqslant | x |_0 \leqslant R + (1/3)$. La fonction φ_0 est donc constante et égale à $\varphi_0(0) = 1$ si $| x |_0 \leqslant R - (1/3)$, et nulle si $| x |_0 \geqslant R + (1/3)$.

Pour tout $p \in P$, on note φ_p la fonction caractéristique de $\mathbf{Z}_p$ dans $\mathbf{Q}_p$. Ceci dit, pour $x \in \mathbf{A}$, on pose

(8) $$\varphi(x) = \prod_{p \in P} \varphi_p(x)\,;$$

si $p \in \bar{P}$ et si $x = (x_1, ..., x_n)$, on pose, dans ce chapitre II,

(9) $$\phi_p(x) = \varphi_p(x_1) \dots \varphi_p(x_n)$$

de telle sorte que l'on a, si $x \in \mathbf{A}^n$,

$$\phi(x) = \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n). \tag{10}$$

Avec ces notations, on a

$$N(t) = \# \{x \in \mathbf{Q}^n \mid \phi(x) = 1 \quad \text{et} \quad F(x) = t\}, \tag{11}$$

puisque la condition $\phi(x) = 1$ est équivalente aux deux conditions $x \in \mathbf{Z}_p^n$ pour tout $p \in P$, et $\phi_0(x) = 1$; or si $F(x) = t$, on a $\phi_0(x) = 1$. Pour $\xi \in \mathbf{A}$, nous allons étudier la somme trigonométrique

$$f(\xi) = \sum_{x \in \mathbf{Q}} \varphi(x) \chi(x^d \xi), \tag{12}$$

qui est une somme finie puisqu'elle porte au plus sur les $x \in \mathbf{Z}$ tels que $| x |_0 < R$. Il vient immédiatement

$$f(\xi)^n = \sum_{x \in \mathbf{Q}^n} \phi(x) \chi(\xi F(x)). \tag{13}$$

La fonction $f(\xi)^n$ est l'analogue de la fonction de Gauss de F, en ce sens que dans la relation (13) on somme sur $\mathbf{Q}$ au lieu d'intégrer sur $\mathbf{A}$. En regroupant dans (13) les vecteurs x ayant même image par F, il vient

$$f(\xi)^n = \sum_{t \in \mathbf{Q}} \chi(\xi t) \sum_{F(x) = t} \phi(x);$$

puisque les relations $\phi(x) \neq 0$ et $x \in \mathbf{Q}^n$ impliquent $x \in \mathbf{Z}^n$ et $\phi_0(x) \neq 0$, puisque pour $x \in \mathbf{Z}^n$, on a

$$\phi_0(x) = 1 \quad \text{si} \quad \| x \|_0 \leqslant R - 1$$

et

$$\phi_0(x) = 0 \quad \text{si} \quad \| x \|_0 \geqslant R,$$

et puisqu'enfin si $\| x \|_0 \geqslant R$, on a $F(x) > t$, il s'ensuit que

$$\sum_{F(x) = t} \phi(x) = N(t) \tag{14}$$

si $t \in \mathbf{Z}$; et si $t \notin \mathbf{Z}$ tous les termes de cette somme sont nuls. On a donc

$$f(\xi)^n = \sum_{t \in \mathbf{Z}} N(t) \chi(t\xi), \tag{15}$$

et en utilisant la formule d'inversion de Fourier, qui s'applique bien évidemment ici puisque la somme du second membre de (14) est finie, on parvient au résultat suivant:

PROPOSITION 2.2. *Si* $t \in \mathbf{N}$ *on a, avec les notations précédentes,*

$$N(t) = \int_{\mathbf{A}/\mathbf{Q}} f(\xi)^n \chi(-t\xi)\, d\xi .$$

Posons maintenant, pour $\xi \in \mathbf{A}$,

$$g(\xi) = \int_{\mathbf{A}} \varphi(x)\, \chi(x^d \xi)\, dx . \tag{16}$$

PROPOSITION 2.3. *Si* $n > 2d$ *et* $d \geqslant 3$, *alors*

$$S_{\mathbf{A}}(t) = \int_{\mathbf{A}} g(\xi)^n \chi(-t\xi)\, d\xi .$$

Démonstration. La définition (16) de g et les définitions (8) et (10) de φ et ϕ impliquent que l'on a

$$g(\xi)^n = G_{\mathbf{A}}(\phi, \xi) \tag{17}$$

pour tout $\xi \in \mathbf{A}$; et ici les conditions (SS 1) à (SS 5) du chapitre I sont remplies ; le théorème 1.18. implique que l'on a

$$\int_{\mathbf{A}} g(\xi)^n \chi(-t\xi)\, d\xi = \hat{G}_{\mathbf{A}}(\phi, -t) = S_{\mathbf{A}}(\phi, t)$$

et par la proposition 1.19, on a

$$S_{\mathbf{A}}(\phi, t') = S_{\mathbf{A}}(t')$$

pour $t' \leqslant t$, ce qui démontre la proposition 2.3.

Les propositions 2.2. et 2.3. montrent que la relation (3) se réécrit :

$$\int_{\mathbf{A}/\mathbf{Q}} f(\xi)^n \chi(-t\xi)\, d\xi - \int_{\mathbf{A}} g(\xi)^n \chi(-t\xi)\, d\xi = 0\,(t^{(n/d)-1-\theta}) . \tag{18}$$

Pour établir cette relation, nous allons utiliser une partie M de $\mathbf{A}$, *l'ensemble majeur*, tel que $f(\xi)^n$ et $g(\xi)^n$ soient négligeables hors de M et tel que la différence $f(\xi)^n - g(\xi)^n$ soit négligeable dans M. En fait, si $\delta > 0$, on pose

$$M = \{\xi \in \mathbf{A} \mid \ |\xi|_0 \leqslant R^{-d+\delta} \quad \text{et} \quad Q(\xi) \leqslant R^{\delta}\} \tag{19}$$

où $Q(\xi)$ est défini par la relation (12) du chapitre I.

LEMME 2.4. *Soit* π *la projection de* $\mathbf{A}$ *sur* $\mathbf{A}/\mathbf{Q}$. *Alors si* $0 < A < B$, *la restriction de* π *à l'ensemble*

$$\{\xi \in \mathbf{A} \mid \ |\xi|_0 \leqslant (2B)^{-1} \quad \text{et} \quad Q(\xi) \leqslant A\}$$

est injective.

Démonstration. Si ξ et ξ' sont dans $\mathbf{A}$, on a les relations:

$$Q(\xi+\xi') \leqslant \operatorname{Max}\big(Q(\xi), Q(\xi')\big), \tag{20}$$

$$Q(-\xi) = Q(\xi). \tag{21}$$

Si ξ et ξ' sont dans l'ensemble décrit dans le lemme, on a donc

$$Q(\xi-\xi') \leqslant A \quad \text{et} \quad |\xi - \xi'|_0 \leqslant B^{-1}$$

d'où s'ensuit

$$|\xi - \xi'|_0 \, Q(\xi-\xi') \leqslant AB^{-1} < 1 .$$

Or si $\eta \in \mathbf{Q}^*$, on a

$$|\eta|_0 \, Q(\eta) \geqslant 1 ;$$

il s'ensuit que si $\xi - \xi' \in \mathbf{Q}$, alors $\xi = \xi'$.

On notera $\overline{M}$ l'image de l'ensemble majeur M (défini par la relation (19)) par l'application π; le lemme 2.4. montre que π est une bijection de M sur $\overline{M}$. On appelle $\overline{M}$ *l'arc majeur* de $\mathbf{A}/\mathbf{Q}$, et on pose

$$\overline{m} = (\mathbf{A}/\mathbf{Q}) - \overline{M} ; \tag{22}$$

l'ensemble $\overline{m}$ est *l'arc mineur*. Le résultat le plus délicat dans la démonstration du théorème de Hardy-Littlewood est l'évaluation de $f(\xi)^n$ sur $\overline{m}$. On va établir le résultat suivant:

THÉORÈME 2.5. *Supposons* $n > 2D$ *et* $\delta < 1$. *On a alors*

$$\int_{\overline{m}} |f(\xi)|^n \, d\xi \ll R^{n-d-\theta_1} ,$$

avec $\theta_1 > 0$.

La démonstration du théorème 2.5. repose sur des résultats d'approximation diophantienne. Le premier est simple:

LEMME 2.6. *Quel que soit* $N > 0$, *la restriction de* π *à l'ensemble*

$$D(N) = \{\xi \in \mathbf{A} \mid \ |\xi|_0 \, Q(\xi) < N^{-1} \quad \text{et} \quad Q(\xi) \leqslant N\} \tag{23}$$

est surjective.

En effet, soit $\xi \in \mathbf{A}$; il existe un $x_0 \in \mathbf{Q}$ tel que $\xi_1 = x_0 - \xi \in \mathbf{Z}_p$ pour tout p, i.e. $Q(\xi_1) \leqslant 1$. Par ailleurs, le théorème d'approximation de Dirichlet implique qu'il existe $x_1 \in \mathbf{Q}$ tel que

$$|\xi_1 - x_1|_0 \leqslant Q(x_1)^{-1} N^{-1} \quad \text{et} \quad Q(x_1) \leqslant N .$$

Posons $\xi_2 = \xi_1 - x_1$; on a $Q(\xi_2) \leqslant \operatorname{Max}(Q(\xi_1), Q(x_1)) \leqslant \operatorname{Max}(1, N) \leqslant N$ et il s'ensuit donc que $\xi_2 \in D(N)$.

Le deuxième résultat est plus subtil : c'est *l'inégalité de Weyl :*

LEMME 2.7. *Soit* K *un polynôme à coefficients réels, de degré* d *et de coefficient du terme de plus haut degré égal à* α *:*

$$K(x) = \alpha x^d + \alpha_1 x^{d-1} + \ldots,$$

et supposons que le nombre α *admette une approximation par un nombre rationnel* a/Q *tel que*

$$(a, Q) = 1, \ Q \geqslant 1, \ |\alpha - \frac{a}{Q}| \leqslant \frac{1}{Q^2} .$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, *on a*

$$|\sum_{|x|_0 \leqq R} \exp(2i\pi K(x))| \leqslant C R^{1+\varepsilon} (R^{-(1D)} + Q^{-(1/D)} + (R^d/Q)^{-(1/D)}, \tag{24}$$

avec $D = 2^{d-1}$ *et où* C *ne dépend que de* d *et* ε.

Pour une démonstration de ce résultat, nous renvoyons le lecteur à [1], lemma 1. Si $\xi = (\xi_p) \in \mathbf{A}$, posons

$$\{\xi\} = -\xi_0 + \sum_{p \in P} < \xi_p > ,$$

où le nombre rationnel $< \xi_p >$ est défini par la relation (2) du Chapitre I. On a

$$\sum_{p \in P} < \xi_p > = \frac{a(\xi)}{Q(\xi)}, \tag{25}$$

où l'entier $Q(\xi)$ est défini comme d'habitude par la relation (12) du Chapitre I, et où les entiers $a(\xi)$ et $Q(\xi)$ sont premiers entre eux. De plus

$$f(\xi) = \sum_{|x| < R} \chi(x^d \xi) = \sum_{|x| < R} \exp(2i\pi x^d \{\xi\}) . \tag{26}$$

Supposons maintenant que l'image $\pi(\xi)$ de ξ dans $\mathbf{A}/\mathbf{Q}$ soit dans $\overline{m}$; puisque la fonction f est invariante sous $\mathbf{Q}$, le lemme 2.6. permet de supposer que l'on a

$$(27) \qquad |\xi|_0 \, Q(\xi) < R^{-d+\delta} \quad \text{et} \quad Q(\xi) \leqslant R^{d-\delta}.$$

Mais la relation (25) implique

$$\left| \{\xi\} - \frac{a(\xi)}{Q(\xi)} \right| = |\xi|_0 ;$$

on déduit donc des deux relations précédentes que

$$\left| \{\xi\} - \frac{a(\xi)}{Q(\xi)} \right| \leqslant \frac{1}{Q(\xi) R^{d-\delta}} \leqslant \frac{1}{Q(\xi)^2},$$

et on peut appliquer le lemme 2.7. de Weyl avec $K(x) = x^d \{\xi\}$; le membre de gauche de la relation (24) n'est autre que l'expression (26) de $f(\xi)$; si nous examinons le membre de droite de la relation (24) avec les valeurs qui lui sont données maintenant, on voit que

$$R^d/Q(\xi) \gg R^\delta$$

par la relation (27); et on a aussi

$$Q(\xi) > R^\delta ;$$

en effet la relation (27) implique que $|\xi|_0 < R^{-d+\delta}$; si on avait en outre $Q(\xi) \leqslant R^\delta$ alors $\pi(\xi)$ serait dans $\overline{M}$ ce qui est contraire à l'hypothèse. On a donc finalement, si $\delta < 1$,

$$(27.1) \qquad f(\xi) \ll R^{1+\varepsilon-(\delta/D)}.$$

Le troisième résultat que nous allons utiliser est l'*inégalité de Hua :*

LEMME. *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *on a*

$$(27.2) \qquad \int_{\mathbf{A}/\mathbf{Q}} |f(\xi)|^{2D} \, d\xi \ll R^{2D-d+\varepsilon}.$$

Démonstration. Soit $\hat{Z}$ l'ensemble produit de tous les $\mathbf{Z}_p$, pour $p \in P$. L'ensemble

$$D^+ =]0, 1[\times \hat{\mathbf{Z}}$$

est un domaine fondamental de $\mathbf{A}/\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{A}$, autrement dit la restriction de la projection π à D^+ est injective et pour toute fonction g continue sur $\mathbf{A}/\mathbf{Q}$, on a

$$\int_{\mathbf{A}/\mathbf{Q}} g(\xi) \, d\xi = \int_0^1 \int_{\hat{\mathbf{Z}}} g(\xi_0, \xi_f) \, d\xi_0 \, d\xi_f .$$

Si $\xi \in D^+$, et si $x \in \mathbf{Z}$, on a

$$\chi(x^d\xi) = \chi_0(x^d\xi_0),$$

ce qui implique

$$f(\xi) = f_0(\xi_0),$$

où on a posé, pour $\xi_0 \in \mathbf{R}$,

$$f_0(\xi_0) = \sum_{|x| \leqslant R} \chi_0(x^d\xi_0).$$

On a donc

$$\int_{\mathbf{A}/\mathbf{Q}} |f(\xi)|^{2D}\, d\xi = \int_0^1 |f_0(\xi_0)|^{2D}\, d\xi_0,$$

et pour prouver (27.2) il suffit de montrer que l'intégrale du membre de droite de la relation précédente est majorée par $R^{2D-d+\varepsilon}$, ce qui est l'inégalité de Hua comme énoncée et démontrée dans [1], lemma 2.

Pour démontrer le théorème 2.5., il suffit de remarquer que

$$\int_{\mathbf{A}/\mathbf{Q}} |f(\xi)|^n\, d\xi \leqslant \sup_{\xi \in \mathbf{A}/\mathbf{Q}} |f(\xi)|^{n-2D} \int_{\mathbf{A}/\mathbf{Q}} |f(\xi)|^{2D}\, d\xi;$$

en utilisant (27.1) et (27.2), on voit que le membre de droite de cette expression est majoré par R^T, avec

$$T = (n-2D)\big(1 + \varepsilon - (\delta/D)\big) + 2D - d + \varepsilon;$$

on a donc

$$T = n - d - \theta_1,$$

avec

$$\theta_1 = (\delta/D)(n-2D) - \varepsilon(n-2D-1),$$

donc θ_1 est positif dès que $n > 2D$, ce qui établit le théorème 2.5.

Posons maintenant $g(\xi)^n = G(\xi)$, conformément à la relation (17).

THÉORÈME 2.8. *Lorsque* t *tend vers l'infini et si* $n > 2d$, *on a*

$$\int_{\mathbf{A}-M} |G(\xi)|\, d\xi \ll R^{n-d-\theta_2},$$

avec $\theta_2 > 0$.

Démonstration. Si $\xi \in \mathbf{A} - M$, on a

$$|\xi_0| > R^{-d+\delta} \quad \text{ou} \quad Q(\xi) > R^{\delta};$$

On a donc

$$\int_{\mathbf{A}-M} G(\xi)\, d\xi \leqslant I_0(R)\, J_f + I_f(R)\, J_0(R)\,, \tag{28}$$

avec

$$I_0(R) = \int_{|\xi_0| > R^{-d+\delta}} |\, G_0(\xi_0)\,|\, d\xi_0\,,$$

$$J_f = \int_{\mathbf{A}_f} |\, G_f(\xi_f)\,|\, d\xi_f\,,$$

$$I_f(R) = \int_{Q(\xi) > R^{\delta}} |\, G(\xi_f)\,|\, d\xi_f\,,$$

et

$$J_0(R) = \int_{\mathbf{R}} |\, G_0(\xi_0)\,|\, d\xi_0\,.$$

Rappelons que la fonction G_0 dépend de R puisqu'elle dépend de ϕ_0 ; les relations (7) et (9) montrent que $\phi_0(\xi_0) \leqslant 1$, et que l'on a

$$\phi_0(0) \ll R^n\,.$$

La proposition 1.10. montre que l'on a

$$|\, G_0(\xi_0)\,| \ll \operatorname{Max}(R^{-d}, |\,\xi\,|)^{-(n/d)} \tag{29}$$

et il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\int_{R} |\, G_0(\xi_0)\,|\, d\xi_0 &\ll \int_{|\xi| < R^{-d}} R^n\, d\xi + \int_{|\xi| > R^{-d}} |\,\xi\,|^{-(n/d)}\, d\xi \\ &\ll R^{n-d} + (R^{-d})^{1-(n/d)} \\ &\ll R^{n-d}\,.\end{aligned}$$

D'autre part, la proposition 1.8. implique l'inégalité

$$I_f(R) \ll \int_{Q(\xi) > R} Q(\xi)^{-(n/d)}\, d\xi_f\,;$$

si nous écrivons $n/d = c + \varepsilon$ avec $c > 2$ et $\varepsilon > 0$, il vient

$$I_f(R) \ll R^{-\varepsilon\delta} \int_{\mathbf{A}_f} Q(\xi)^{-c}\, d\xi_f$$

et la relation (13) du chapitre I montre que l'intégrale figurant dans le membre de droite converge; on a donc

$$I_f(R)\, J_0(R) \ll R^{n-d-\varepsilon\delta}. \tag{30}$$

D'autre part, et en faisant usage de la relation (29), il vient

$$I_0(R) \ll \int_{|\xi|_0 > R-d+\delta} |\xi|_0^{-(n/d)}\, d\xi,$$

et donc

$$I_0(R) \ll R^{(d-\delta)((n/d-1)} = R^{n-d-\varepsilon'} \tag{31}$$

avec $\varepsilon' > 0$; et puisque, toujours par la proposition 1.8., l'intégrale J_f est convergente, les relations (28), (30) et (31) établissent l'estimation énoncée dans le théorème 2.8.

THÉORÈME 2.9. *Pour tout* $\xi \in M$, *on a*

$$f(\xi) - g(\xi) \ll Q(\xi)\, R^{\delta}.$$

Démonstration. Posons

$$h(x, \xi) = \varphi(x)\, \chi(x^d \xi),$$

où φ est définie par la relation (8), de telle sorte que

$$f(\xi) = \sum_{x \in \mathbf{Q}} h(x, \xi)$$

et

$$g(\xi) = \int_{\mathbf{A}} h(x, \xi)\, dx.$$

Posons aussi

$$\hat{h}(y, \xi) = \int_{\mathbf{A}} h(x, \xi)\, \chi(xy)\, dx.$$

Alors on peut appliquer à la fonction $h_\xi(x) = h(x, \xi)$ la formule de Poisson, et il vient

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \sum_{x \in \mathbf{Q}} h(x, \xi) \\ &= \sum_{y \in \mathbf{Q}} \hat{h}(y, \xi), \end{aligned}$$

et donc

$$f(\xi) = g(\xi) + \sum_{y \neq 0} \hat{h}(y, \xi). \tag{32}$$

Si $\xi \in \mathbf{A}$ posons $q_p(\xi) = \operatorname{Max}(1, |\xi_p|_p)$.

Les fonctions h et $\hat{h}$ sont décomposables; nous noterons h_p (resp $\hat{h}_p$) leurs facteurs locaux.

LEMME 2.10. *La fonction* $y \to \hat{h}_p(y, \xi)$, *définie sur* $\mathbf{Q}_p$, *est constante modulo* $\mathbf{Z}_p$ *et à support dans* $q_p(\xi)^{-1}\mathbf{Z}_p$.

Démonstration. Posons $q_p(\xi) = q$. Puisque $q \geqslant 1$, si $|x_1 - x_2| \leqslant q^{-1}$, alors x_1 et x_2 sont tous deux dans $\mathbf{Z}_p$ ou tous deux en dehors, et on a

$$\varphi_p(x_1) = \varphi_p(x_2).$$

Si x_1 et x_2 ne sont pas dans $\mathbf{Z}_p$, on a

$$g_p(x_1, \xi) = g_p(x_2, \xi) = 0.$$

Si x_1 et x_2 sont dans $\mathbf{Z}_p$, on a

$$|x_1^d - x_2^d|_p \leqslant |x_1 - x_2|_p,$$

et donc

$$|x_1^d\xi - x_2^d\xi|_p \leqslant |x_1 - x_2|_p |\xi|_p;$$

si

$$|x_1 - x_2| \leqslant q^{-1},$$

on a donc

$$|x_1^d\xi - x_2^d\xi|_p \leqslant 1,$$

et il s'ensuit que $\chi_p(x_1^d\xi) = \chi_p(x_2^d\xi)$ et par conséquent $h_p(x_1, \xi) = h_p(x_2, \xi)$. La fonction $x \to h_p(x, \xi)$ est donc constante modulo $q\,\mathbf{Z}_p$ et à support dans $\mathbf{Z}_p$; le lemme s'ensuit immédiatement par dualité.

LEMME 2.11. *Si* $u \in S(R)$, *on pose*

$$\|u\|_1^2 = \int_0^1 \Big|\sum_{x \in \mathbf{Z}} u(x+t)\Big|^2 dt. \tag{33}$$

Alors

$$\sum_{y \neq 0} |\hat{u}(y)| \leqslant (1/2\sqrt{3})\, \|u'\|_1. \tag{34}$$

Démonstration. En appliquant l'égalité de Parseval-Bessel à la fonction périodique

$$u^*(t) = \sum_{x \in \mathbf{Z}} u(x+t),$$

on obtient

$$\sum_{y \in \mathbf{Z}} |\hat{u}(y)|^2 = \int_0^1 |u^*(t)|^2 \, dt = \| u \|_1^2,$$

et en remplaçant u par sa dérivée u', il vient

$$4\pi^2 \sum_{y \neq 0} |y\hat{u}(y)|^2 = \| u' \|_1^2 .$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux suites $|y\hat{u}(y)|$ et $|1/y|$, où y parcourt $\mathbf{Z} - \{0\}$, on en déduit

$$[\sum_{y \neq 0} |\hat{u}(y)|]^2 \leqslant (\pi^2/3)(1/4\pi^2) \| u' \|_1^2,$$

d'où le lemme 2.11.

LEMME 2.12. *Avec les notations précédentes, si* $0 < a < R$ *et* $\xi_0 \in \mathbf{R}$ *on a*

$$\sum_{y \neq 0} \hat{h}_0(y/a, \xi_0) \ll aR^d |\xi_0| .$$

Démonstration. Nous allons tout d'abord établir le résultat suivant. Soit $u \in C_c(\mathbf{R})$; on suppose que $\operatorname{Supp} u \subset [-R, +R]$ et on pose $M(u') = \sup_{\mathbf{R}} |u'(x)|$. Alors

$$(1/a) \sum_{y \neq 0} |\hat{u}(y/a)| \leqslant (1/\sqrt{3}) R M(u') . \tag{35}$$

En effet appliquons le lemme 2.11 à la fonction $v(t) = u(at)$; puisque $\hat{v}(y) = (1/a)\hat{u}(y/a)$ on a

$$(1/a) \sum_{y \neq 0} |\hat{u}(y/a)| \leqslant (1/2\sqrt{3}) \| v' \|_1 .$$

Mais puisque $u(x) = 0$ si $|x| > R$, la fonction $v'(x+t) = au'(ax+at)$ est nulle si $|x| > (R/a) + 1$, donc a fortiori si $|x| > 2R/a$ et

$$\sum |v'(x+t)| \leqslant \sum_{|x| \leqslant 2R/a} aM(u') = 2RM(u'),$$

d'où $\| v' \|_1 \leqslant 2RM(u')$ et la relation (35).

Ceci dit, on a

$$(d/dx)\, h(x, \xi_0) = \chi_0(x^d \xi_0)\left(\varphi_0'(x) + 2i\pi d x^{d-1} \xi_0 \varphi_0(x)\right);$$

or on peut choisir ψ de telle sorte que $0 \leqslant \psi(x) \leqslant 1$, et alors

$$\varphi_0(x) = \psi * \chi_R(x)$$

vérifie aussi $0 \leqslant \varphi_0(x) \leqslant 1$; et puisque

$$\varphi_0'(x) = \psi(x+R) - \psi(x-R),$$

on a $|\varphi_0'(x)| \leqslant 2$. En tenant compte du fait que

$$\varphi_0(x) = 0 \quad \text{si} \quad |x| > R + (1/3),$$

il vient donc finalement

$$M\big((d/dx)\, h_0(x, \xi_0)\big) \leqslant CR^{d-1} |\xi|_0, \tag{36}$$

où la constante C ne dépend ni de R ni de ξ_0. En appliquant à $h_0(x, \xi_0)$ la relation (35) et compte tenu de (36), on obtient le résultat du lemme 2.12.

Démonstration du théorème 2.9. La relation (32) implique

$$|f(\xi) - g(\xi)| \leqslant \sum_{y \in \mathbf{Q}^*} |\hat{h}(y, \xi)|,$$

et le lemme 2.10 montre que la somme de droite ne porte en réalité que sur les $y \in \mathbf{Q}^*$ tels que $q_p(\xi)\, y \in \mathbf{Z}_p$ pour tout $p \in P$, donc tels que $Q(\xi)\, y \in \mathbf{Z}$; par ailleurs, puisque

$$\hat{h}_p(y, \xi_p) = \int_{\mathbf{Z}_p} \chi_p(x^d \xi + xy)\, dx, \tag{37}$$

on a $|\hat{h}_p(y, \xi_p)| \leqslant 1$ et donc

$$|\hat{h}(y, \xi)| \leqslant |\hat{h}_0(y, \xi_0)|;$$

il s'ensuit

$$|f(\xi) - g(\xi)| \leqslant \sum_{y \in \mathbf{Z} - \{0\}} \hat{h}_0\big(y/Q(\xi), \xi_0\big);$$

utilisant le lemme 2.12 pour majorer le membre de droite, il vient

$$f(\xi) - g(\xi) \ll R^d |\xi_0|\, Q(\xi),$$

et comme $|\xi_0| \leqslant R^{-d+\delta}$ si $\xi \in M$, le théorème 2.9 est démontré.

THÉORÈME 2.13. *Si* $\delta < d/(2d+1)$, *et si* $n \geqslant 4d$, *on a*

$$\int_M f(\xi)^n \chi(-t\xi)\, d\xi = \int_M g(\xi)^n \chi(-t\xi)\, d\xi + O(R^{n-d-\theta_3}),$$

avec $\theta_3 > 0$.

Démonstration. La proposition 1.6 montre que

$$g_f(\xi) \ll Q(\xi)^{-1/d};$$

par ailleurs

$$g_0(\xi_0) \ll R;$$

on a donc

$$g(\xi) \ll R\,Q(\xi)^{-1/d}. \tag{38}$$

Remarquons maintenant que si $\delta < d/(2d+1)$ et $\xi \in M$, on a

$$R^\delta Q(\xi) \leqslant R\,Q(\xi)^{-1/d}: \tag{39}$$

en effet la relation $Q(\xi) < R^\delta$ implique, puisque $\delta\big(1 + (1/d)\big) < 1 - \delta$,

$$Q(\xi)^{1+(1/d)} \leqslant R^{1-\delta}.$$

Posons

$$K(\xi) = f(\xi)^n - g(\xi)^n;$$

si $\xi \in M$ on a l'inégalité

$$K(\xi) \ll R^{n-1+\delta}\,Q(\xi)^{-\nu} \tag{40}$$

avec $\nu > 2$, comme on va le voir. Si on pose

$$k(\xi) = f(\xi) - g(\xi),$$

il vient, par la formule du binôme,

$$K(\xi) \ll \operatorname{Max}\big(|\,k(\xi)^p\,g(\xi)^{n-p}\,|\big) \qquad (1 \leqslant p \leqslant n),$$

mais le théorème 2.9. affirme que

$$k(\xi) \ll R^\delta\,Q(\xi);$$

les inégalités (38) et (39) montrent donc que l'on a

$$k(\xi)^p\,g(\xi)^{n-p} \ll R^{n-1+\delta}\,Q(\xi)^{1-((n-1)/d)};$$

or si $n \geqslant 3d + 2$, on a

$$1 - \big((n-1)/d\big) < -2,$$

ce qui établit (40) puisque $3d + 2 \leqslant 4d$ dès que $d \geqslant 2$.

Pour démontrer le théorème 2.13. il suffit donc d'estimer l'intégrale de K sur M; mais la relation (40) et la définition de M impliquent

$$\int_M K(\xi)\,d\xi \ll \int_{|\xi_0| < R^{-d+\delta}} R^{n-1+\delta} \int_{Q(\xi) < R^\delta} Q(\xi)^{-\nu}\,d\xi_f;$$

puisque $\nu > 2$, l'intégrale

$$\int_{\mathbf{A}_f} Q(\xi)^{-\nu}\, d\xi_f$$

est convergente et on a donc

$$\int_M K(\xi)\, d\xi \ll R^{n-d+1-2\delta}$$

ce qui établit le théorème 2.13. avec $\theta_3 = 1 - 2\delta$.
Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 2.1. Rappelons que l'on a posé $D = 2^{d-1}$. Supposons donc $n > 2D$, et dans la définition (19) de l'ensemble majeur, choisissons δ tel que

$$\delta < d/(2d+1)\,.$$

D'autre part soit θ un nombre « suffisamment petit ». La proposition 2.2. affirme que

$$N(t) = \int_{\mathbf{A}/\mathbf{Q}} f(\xi)^n\, \chi(-t\xi)\, d\xi\,;$$

nous avons vu dans le théorème 2.5. que lorsque $n > 2D$, on a

$$\int_m |f(\xi)|^n\, d\xi \ll R^{n-d-\theta}$$

et dans le théorème 2.13., que si $n > 4d$,

$$\int_{\bar{M}} f(\xi)^n\, \chi(-t\xi)\, d\xi = \int_M g(\xi)^n\, \chi(-t\xi)\, d\xi + 0\,(R^{n-d-\theta})\,.$$

Les trois relations précédentes impliquent donc que l'on a

$$N(t) = \int_M g(\xi)^n\, \chi(-t\xi)\, d\xi + 0\,(R^{n-d-\theta})\,.$$

Rappelons que $g(\xi)^n = G(\xi)$ et que si $n > 2d$, et $d \geqslant 3$, on a

$$\int_{\mathbf{A}-M} |G(\xi)|\, d\xi \ll R^{n-d-\theta}$$

par le théorème 2.8., et

$$S_{\mathbf{A}}(t) = \int_{\mathbf{A}} G(\xi)\, \chi(-t\xi)\, d\xi$$

par la proposition 2.3. Puisque $R^d \sim t$, on tire des trois relations précédentes que sous les hypothèses faites (et en changeant θ en θ/d), on a

$$N(t) = S_{\mathbf{A}}(t) + 0\,(t^{(n/d)-1-\theta})$$

qui n'est autre que la relation (3) et le théorème 2.1. est établi.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DAVENPORT, H. *Analytic methods for diophantine equations and approximations.* Campus Publishers, Ann Arbor, 1962.

[2] DELIGNE, P. La conjecture de Weil I. *Publ. Math. I.H.E.S. 43* (1974), 273-307.

[3] ELLISON, W. J. Waring's Problem. *Amer. Math. Monthly 78* (1971), 10-36.

[4] HARDY, G. H. and J. E. LITTLEWOOD. Some problems of "Partitio Numerorum", I, II, IV, VI. In the *Collected Works of G. H. Hardy, vol. 1*, 405-505, Oxford, Oxford University Press, 1966.

[5] IGUSA, J. I. On a certain Poisson Formula. *Nagoya Math. J. 53* (1974), 211-233.

[6] —— *Lectures on forms of higher Degree.* Tata Institute of Fundamental Research Lectures No. 59, Berlin, Springer 1978.

[7] ONO, T. Gauss Transforms and Zeta Functions. *Ann. of Math. 91* (1970), 332-361.

[8] SERRE, J. P. Majorations de Sommes exponentielles. *Journées Arithmétiques de Caen, Astérisque 41-42* (1977), 111-126

[9] WEIL, A. Sur la formule de Siegel dans la théorie des groupes classiques. *Acta Math. 113* (1965), 1-87; In: *Œuvres Scientifiques, vol. III*, Berlin, Springer 1979.

[10] MARS, J. G. M. Sur l'approximation du nombre de solutions de certaines équations diophantiennes. *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. (4), 6* (1973), 357-388.

[11] LACHAUD, G. An adelic proof of the Hardy-Littlewood theorem on Waring's problem. *Journées Arithmétiques in Exeter*, London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge University Press, 1982.

[12] VAUGHAN, R. C. *The Hardy-Littlewood method.* Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, 1981.

(Reçu le 13 mars 1981, révisé le 5 mars 1982)

Gilles Lachaud
Université de Nice
7, Avenue Bieckert
F-06000 Nice

vide-leer-empty