

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 28 (1982)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** INTRODUCTION AUX VARIÉTÉS ABÉLIENNES COMPLEXES  
**Autor:** Robert, Alain  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-52234>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

**vide-leer-empty**

# INTRODUCTION AUX VARIÉTÉS ABÉLIENNES COMPLEXES

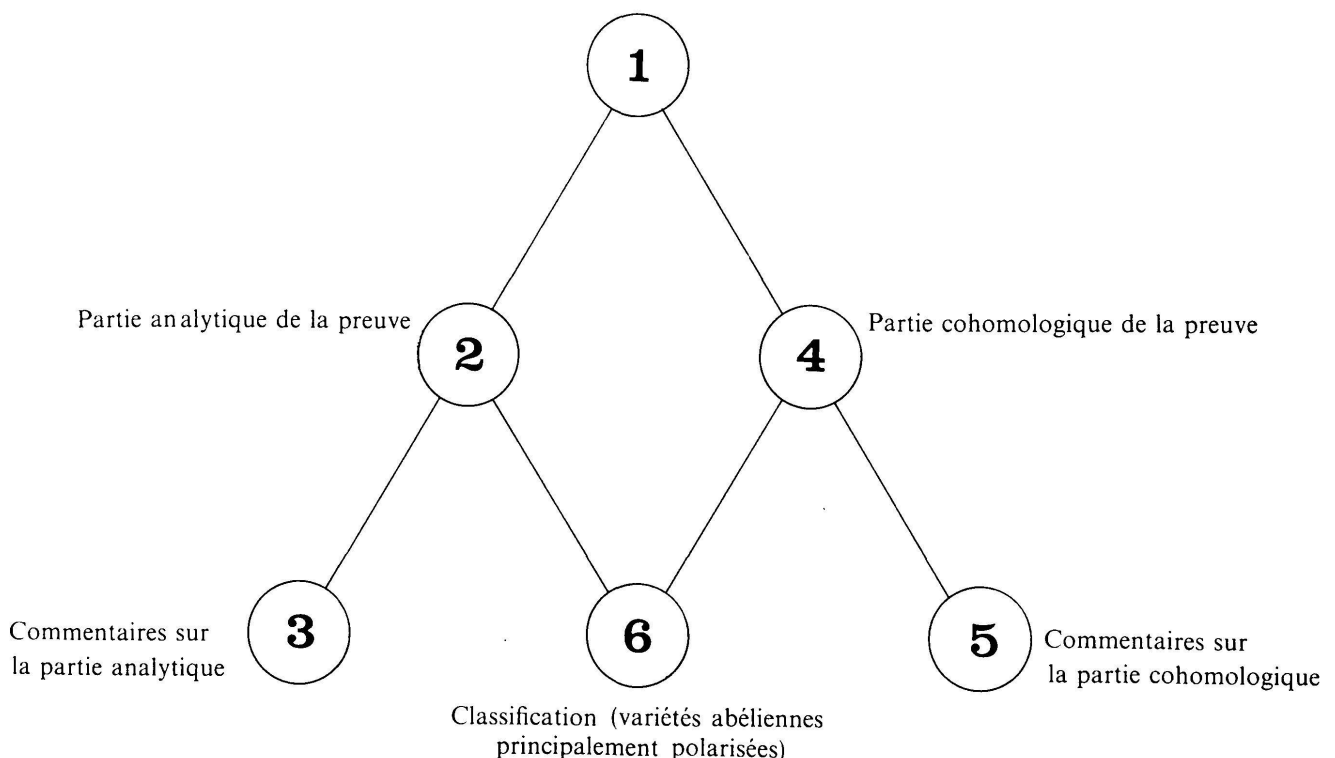
par Alain ROBERT

## INTENTIONS

Donner une démonstration aussi directe que possible du critère de projectivité des tores complexes, tel était mon but dans les quelques exposés présentés à Queen's University (Kingston, Ontario) en septembre 1980. Ces pages en constituent une rédaction améliorée, rédigée dans un cadre « élémentaire ». J'ai néanmoins essayé de donner quelques interprétations « supérieures » des outils utilisés dans deux sections indépendantes (cf. diagramme de dépendance logique des différentes sections). J'y ai ajouté le théorème de classification des variétés abéliennes principalement polarisées (avec sa démonstration).

## TABLE DES MATIÈRES ET DÉPENDANCE LOGIQUE DES SECTIONS

Énoncé du théorème de base



## 1. ENONCÉ DU THÉORÈME DE BASE

Un *réseau* dans un espace vectoriel réel  $V$  de dimension finie est par définition un sous-groupe engendré par une base de  $V$ . Ainsi, si  $L$  est un réseau dans  $V$ ,  $L$  est un sous-groupe discret (fermé) et le quotient  $V/L$  est compact (on dit parfois que  $L$  est discret et *co-compact* dans  $V$ ). Pour tout réseau  $L$ , on a donc  $L \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R} = V$  par définition. Parmi les sous-groupes discrets de  $V$ , les réseaux sont aussi caractérisés par la propriété d'avoir un rang maximal.

Un *tore* (réel) est un groupe (topologique, de Lie) difféomorphe à un quotient  $V/L$  où  $V$  est un espace vectoriel réel de dimension finie et  $L$  un réseau dans  $V$ . Prenant pour base de  $V$  un système de générateurs de  $L$ , on voit que tout tore est difféomorphe à un produit de cercles

$$\begin{cases} \mathbf{R}^n \simeq V & (n = \dim V) \\ \mathbf{Z}^n \simeq L, & V/L \cong \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n = (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^n = (S^1)^n. \end{cases}$$

Pour introduire une structure analytique complexe sur un tore (de dimension réelle paire), on peut supposer que  $V$  possède une structure complexe: cette dernière induira canoniquement une structure complexe sur le quotient. Changeons donc légèrement de notations en supposant que  $V$  est un espace vectoriel complexe de dimension *complexe*  $n$  (donc de dimension réelle double  $2n$  par restriction des scalaires) et  $L$  un réseau de  $V$  (considéré comme espace vectoriel réel, donc de rang  $2n$ ). Le tore  $V/L$  est alors une variété complexe compacte (lisse) de dimension complexe  $n$ . C'est un *tore complexe*.

Bien que deux tores complexes de même dimension soient automatiquement difféomorphes (car difféomorphes à un même produit de cercles), ils ne sont pas analytiquement isomorphes en général. Autrement dit, sur un même tore réel (de dimension paire), il existe plusieurs structures complexes non *équivalentes*. Ce phénomène apparaît déjà en dimension  $n = 1$  (courbes elliptiques). Dans  $\mathbf{C}$ , un réseau est engendré par deux éléments linéairement indépendants sur les réels; après une homothétie (qui ne change pas la structure analytique complexe) on peut supposer que ces générateurs sont 1 et un nombre complexe  $\tau$  de partie imaginaire strictement positive. Notons  $E_\tau = \mathbf{C}/(\mathbf{Z} + \tau\mathbf{Z})$  le tore complexe de dimension 1 correspondant. On peut montrer que  $E_\sigma$  et  $E_\tau$  ne sont analytiquement isomorphes que s'il existe une matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ à coefficients entiers, } ad - bc = 1,$$

avec

$$\sigma = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \text{ (transformation fractionnaire linéaire).}$$

On connaît d'autre part les *variétés projectives*. Ce sont les sous-variétés analytiques fermées d'un espace projectif complexe. Elles sont compactes et tout point non singulier possède un voisinage qui peut être paramétrisé à l'aide de fonctions analytiques. Un théorème de Chow dit même que toute variété projective est une variété algébrique, donc définie par l'annulation simultanée d'un nombre fini de polynômes homogènes.

La question qui fait l'objet principal de ces notes est la suivante: *Quand un tore complexe  $V/L$  peut-il être plongé dans un espace projectif et donc considéré comme variété projective?* Pour être plus précis, on cherche à caractériser les tores complexes  $V/L$  pour lesquels il existe une application analytique injective

$$\theta: V/L \rightarrow \mathbf{P}^m(\mathbf{C})$$

dont la différentielle est injective en tout point (donc localement inversible au voisinage de tout point d'après le théorème des fonctions implicites analytique). Il est surprenant de constater que certains tores complexes ne possèdent pas de tel plongement projectif. On appelle *variété abélienne* un tore complexe qui possède un plongement projectif.

La réponse à la question énoncée plus haut est fournie par le théorème de base suivant.

*Soient  $V$  un espace vectoriel complexe (de dimension finie),  $L$  un réseau dans  $V$  et  $T = V/L$  le tore complexe correspondant. Pour que  $T$  soit une variété abélienne il faut et il suffit qu'il existe un produit scalaire hilbertien sur  $V$  dont la partie imaginaire est entière sur les couples d'éléments de  $L$ .*

Le théorème précédent appelle plusieurs remarques.

1. En dimension (complexe) 1, la condition du critère est toujours satisfaite. En effet, dans ce cas,  $L$  est engendré par deux nombres complexes non colinéaires  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  et la condition impose seulement que le produit scalaire de  $\lambda_1$  avec  $\lambda_2$  ait une partie imaginaire entière. Si un produit scalaire particulier n'a pas cette propriété, un multiple convenable l'aura. *Donc tout tore complexe de dimension 1 est une variété abélienne.*

2. On peut exprimer la condition d'intégralité du critère par une condition de *rationalité*. Supposons en effet qu'il existe sur  $V$  un produit scalaire dont la partie imaginaire est *rationnelle* sur les couples d'éléments de  $L$ . Prenant une base  $(\lambda_i)$  de  $L$  et un dénominateur commun à l'ensemble fini de nombres

$$\text{Im}(\lambda_i|\lambda_j) = g_{ij}/d \in \mathbf{Q} \quad (g_{ij} \in \mathbf{Z}, d \in \mathbf{Z}),$$

le multiple  $d(v|w)$  du produit scalaire  $(v|w)$  aura la propriété d'intégralité requise.

3. La *suffisance* de la condition énoncée se vérifie par une construction analytique transcendante: à l'aide d'une série de Fourier convergente, on construit la fonction thêta de Riemann à partir de laquelle le plongement projectif résulte facilement. La *nécessité* de la condition exige une connaissance rudimentaire de la cohomologie des espaces projectifs. La méthode de Lefschetz se comprend facilement si on connaît l'interprétation par formes différentielles de cette cohomologie (de Rham, Hodge). La démonstration donnée ci-dessous du théorème de base fournira des renseignements plus précis, notamment en ce qui concerne la dimension  $m$  d'un plongement possible. Dans les deux parties de la démonstration, les séries de Fourier jouent un rôle crucial.

4. Construisons un réseau  $L$  de  $\mathbf{C}^2$  ne satisfaisant pas la condition du théorème de base (le tore complexe correspondant  $\mathbf{C}^2/L$  n'est donc pas une variété abélienne: n'admet pas de plongement projectif). Les quatre couples  $e_1 = (1, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1)$ ,  $e_3 = (ia, ib)$  et  $e_4 = (ic, id)$  forment une base réelle de  $\mathbf{C}^2$  dès que  $a, b, c, d$  sont réels et  $ad - bc \neq 0$ . Dans la  $\mathbf{C}$ -base  $(e_1, e_2)$ , une forme hermitienne  $H$  se représente par une matrice  $(h_{ij})$  hermitienne ( $h_{ii}$  réels,  $h_{21} = \bar{h}_{12}$ ). Si  $E = \text{Im}(H)$  est entière sur  $L \times L$ , on aura

$$E(e_1, e_2) = \text{Im}(h_{12}) = n \in \mathbf{Z},$$

puis

$$\begin{aligned} E(e_3, e_4) &= \text{Im}(\overline{ia, ib}) (h_{ij}) \begin{pmatrix} ic \\ id \end{pmatrix} \\ &= \text{Im}(a, b) (h_{ij}) \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \\ &= (a, b) \begin{pmatrix} 0 & n \\ -n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = (ad - bc)n \in \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

Dès que les nombres  $a, b, c, d$  seront choisis de façon que

$$(*) \quad ad - bc \notin \mathbf{Q}$$

l'entier  $n$  devra être nul. Si (\*) est satisfait, la matrice  $(h_{ij})$  de  $H$  devra être réelle (symétrique). Exprimons encore l'intégralité des parties imaginaires sur les autres produits scalaires lorsque (\*) est satisfait. Prenons d'abord

$$E(e_1, e_3) = ah_{11} + bh_{12} = p \in \mathbf{Z},$$

$$E(e_1, e_4) = ch_{11} + dh_{12} = q \in \mathbf{Z}.$$

Éliminons  $h_{11}$ :

$$(ad - bc)h_{12} = aq - cp.$$

Similairement

$$E(e_2, e_3) = ah_{12} + bh_{22} = r \in \mathbf{Z},$$

$$E(e_2, e_4) = ch_{12} + ch_{22} = s \in \mathbf{Z},$$

puis éliminant  $h_{22}$

$$(ad - bc)h_{12} = dr - bs.$$

Par comparaison, on trouve donc

$$(**) \quad qa + sb - pc - rd = 0.$$

Les nombres réels  $a, b, c, d$  sont donc  $\mathbf{Q}$ -linéairement dépendants. Commencant par choisir  $a, b, c$  réels  $\mathbf{Q}$ -linéairement indépendants, on peut certainement trouver  $d$  réel, différent de  $bc/a$  et  $\mathbf{Q}$ -indépendant de  $a, b, c$ . Amplifiant tous ces nombres par un même facteur réel non nul au besoin, on pourra satisfaire (\*) tout en conservant des nombres  $\mathbf{Q}$ -indépendants. Le réseau correspondant  $L$  n'aura pas la propriété mentionnée dans le théorème de base. Par exemple, on pourrait prendre

$$a = \sqrt{2}, b = \sqrt{3}, c = \sqrt{5}, d = \sqrt{7}.$$

## 2. PARTIE ANALYTIQUE DE LA DÉMONSTRATION

Nous supposons ici que le tore complexe  $V/L$  (notations de la sec. 1) satisfait la condition donnée dans le théorème de base, donc qu'il existe une forme hermitienne  $H$  définie positive sur  $V$  de partie imaginaire entière sur les couples d'éléments de  $L$ , et démontrerons que ce tore admet un plongement projectif complexe. Le produit scalaire hilbertien est donc dénoté par  $H(u, v) = (u|v)$ . Nous conviendrons que ce produit scalaire est  $\mathbf{C}$ -linéaire en la seconde variable (sic)

$$v \mapsto H(u, v) \text{ } \mathbf{C}\text{-linéaire (pour tout } u \in V),$$

$$H(u, \alpha v) = \alpha H(u, v) \text{ (pour tous } u, v \in V \text{ et } \alpha \in \mathbf{C}).$$

Appelons  $B$  la partie réelle de  $H$  et  $E$  la partie imaginaire de  $H$  de sorte que

$$H(u, v) = B(u, v) + iE(u, v)$$

et

$$H(v, u) = \overline{H(u, v)} = B(u, v) - iE(u, v).$$

On voit donc que, par définition de  $B$  et  $E$ ,

$$B(v, u) = B(u, v) \text{ et } E(v, u) = -E(u, v).$$

La forme  $\mathbf{R}$ -bilinéaire  $B$  est symétrique (et définie positive comme  $H$  puisque  $B(u, u) = H(u, u) > 0$  si  $u \neq 0$ ), tandis que la forme  $\mathbf{R}$ -bilinéaire  $E$  est alternée (i.e. antisymétrique). Chacune des deux formes  $B$  ou  $E$  détermine complètement  $H$ . Par exemple, on a

$$H(u, iv) = B(u, iv) + iE(u, iv),$$

et aussi

$$iH(u, v) = iB(u, v) - E(u, v);$$

par comparaison des parties réelles et imaginaires de ces quantités (égales!), on en tire

$$B(u, v) = E(u, iv) \text{ et } E(u, v) = -B(u, iv).$$

La positivité de  $H$  (ou de  $B$ ) se reconnaît donc sur  $E$  de la façon suivante

$$E(u, iu) > 0 \text{ si } u \neq 0.$$

De même,  $H(iu, iv) = H(u, v)$  fournit  $E(iu, iv) = E(u, v)$ . Inversement, partant d'une forme alternée  $E$  satisfaisant  $E(iu, iv) = E(u, v)$ , la définition

$$H(u, v) = E(u, iv) + iE(u, v)$$

fournit une forme hermitienne (vérification par calcul direct!), définie positive lorsque  $E(u, iu) > 0$  pour  $u \neq 0$ . Les propriétés de  $H$  sont donc traduites en les propriétés suivantes de  $E$

$$\left\{ \begin{array}{l} E \text{ est une forme } \mathbf{R}\text{-bilinéaire alternée (à valeurs réelles),} \\ E(iu, iv) = E(u, v) \text{ (} u, v \in V \text{) et } E(u, iu) > 0 \text{ pour } 0 \neq u \in V. \end{array} \right.$$

La forme alternée entière  $E$  sur  $L$  va nous permettre de décomposer ce réseau comme somme directe de deux sous-réseaux sur chacun desquels elle est isotrope.

LEMME (Frobenius: Oeuvres complètes, vol. I, p. 493). *Il existe une base* <sup>1)</sup>  $e_1, \dots, e_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n$  de  $L$  telle que

$$\begin{aligned} E(e_i, e_j) &= E(\lambda_i, \lambda_j) = 0, \\ E(e_i, \lambda_j) &= d_i \delta_{ij} \text{ (nul si } i \neq j, = d_i \text{ si } i = j) \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Une telle base sera appelée dorénavant *base symplectique*.

avec des entiers  $d_i$  satisfaisant

$$d_{i+1} \text{ multiple de } d_i \text{ (pour } i \leq n - 1 \text{)}.$$

*Preuve.* Montrons simplement comment on commence la démonstration de ce lemme classique d'algèbre (c'est une forme du théorème des diviseurs élémentaires ou un aspect de la réduction des formes alternées...). Pour chaque  $0 \neq a \in L$  on considère l'idéal  $I_a = \{E(a, b) : b \in L\} \subset \mathbf{Z}$ . Posons  $I_a = d_a \mathbf{Z}$  avec un entier positif  $d_a$  bien déterminé. Définissons alors  $d_1 = \inf_{a \neq 0} d_a = \min_{a \neq 0} d_a \geq 0$ . Si  $d_1 = 0$ , il y a un élément  $a \neq 0$  de  $L$  avec  $I_a = 0$  donc tel que  $E(a, v) = 0$  (pour tout  $v \in V$  par  $\mathbf{R}$ -linéarité) donc tel que  $E(a, ia) = 0$  contredisant la positivité de  $E$  (ou de  $H$ ). On a donc  $d_1 > 0$  et on prend  $e_1, \lambda_1 \in L$  avec  $E(e_1, \lambda_1) = d_1$ . La démonstration continue alors par induction, extrayant le plan hyperbolique engendré par ces deux vecteurs par considération du supplémentaire orthogonal.

Nous dénoterons par  $L_1$  le sous-groupe engendré par les  $e_i$  et par  $L_2$  le sous-groupe engendré par les  $\lambda_i$ . On a donc

$$L = L_1 \oplus L_2, \text{ rang}(L_i) = n, E \text{ triviale sur chaque } L_i.$$

De plus, la forme  $E$  permet d'identifier un élément  $b$  de  $L_2$  à un homomorphisme

$$E(., b) : L_1 \rightarrow \mathbf{Z}, a \mapsto E(a, b).$$

On obtient ainsi un homomorphisme injectif (plongement)

$$E : L_2 \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(L_1, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}\text{-dual de } L_1.$$

Comme la base duale de  $(e_i)$  dans  $\text{Hom}_{\mathbf{Z}}(L_1, \mathbf{Z})$  est constituée des formes  $d_i^{-1} \lambda_i$ , on voit que le plongement précédent a une image d'indice fini égal au produit des  $d_i$  (ce produit est appelé Pfaffien de  $E$ ). En particulier, lorsque tous les  $d_i = 1$ , on dit que  $E$  est *unimodulaire*, dans ce cas  $L_2$  s'identifie au  $\mathbf{Z}$ -dual de  $L_1$  (via  $E$ ).

Pour plonger  $V/L$  dans un espace projectif, il s'agit de construire des fonctions sur cette variété, donc de définir des fonctions  $L$ -périodiques sur  $V$ . Commençons par considérer plus simplement des fonctions  $L_1$ -périodiques, données par des développements de Fourier selon les exponentielles de base relatives à  $L_1$ . Ces considérations d'analyse vont fournir « toutes » les fonctions  $L_1$ -périodiques sur  $V_1 = L_1 \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$  comme séries en les

$$v \mapsto \exp(2\pi i \lambda(v)) \quad (\lambda \in \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(L_1, \mathbf{Z})).$$

Nous considérerons plus particulièrement les exponentielles

$$v \mapsto \exp(2\pi i E(v, \lambda)) \quad (\lambda \in L_2).$$

Ces dernières fournissent une base des fonctions sur  $V_1$ , invariantes par les  $d_i^{-1} e_i$  donc en particulier aussi des fonctions sur le tore réel  $V_1/L_1$ . (Le lecteur qui souhaite simplifier au maximum la démonstration pourra supposer  $E$  unimodulaire dès à présent.) Pour fabriquer des fonctions analytiques sur  $V$ , nous complexifierons simplement  $V_1$  en permettant à  $v$  de varier dans  $V_1 \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ . Il est donc important de savoir que  $V_1$  engendre tout  $V$  sur  $\mathbf{C}$ .

LEMME. On a  $V = V_1 \oplus iV_1$  et donc  $V = V_1 \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ .

*Preuve.* Comme  $V_1$  et  $iV_1$  ont même dimension réelle  $n$ , il suffit de montrer que  $V_1 \cap iV_1 = \{0\}$ . Ceci est clair car si  $u \in V_1 \cap iV_1$ , on a  $u = v_1 = iw_1$  (avec  $v_1$  et  $w_1$  dans  $V_1$ ) qui implique

$$H(u, u) = E(u, iu) = E(v_1, -w_1) = 0$$

par trivialité de  $E$  sur  $L_1$  et donc aussi sur  $V_1$ . On en conclut  $u = 0$ .

Pour étendre holomorphiquement les exponentielles  $\exp(2\pi i E(\cdot, \lambda))$  il suffit de considérer les extensions  $\mathbf{C}$ -linéaires  $f_\lambda(v)$  des  $E(v, \lambda)$  (permettant ainsi à  $v$  de varier dans  $V$  entier, plus seulement dans  $V_1$ ). Une telle extension  $\mathbf{C}$ -linéaire est définie par

$$f_\lambda(v_1 + iv'_1) = E(v_1, \lambda) + iE(v'_1, \lambda),$$

et l'exponentielle holomorphe  $L_1$ -périodique sur  $V$  correspondante

$$V \ni z \mapsto \exp(2\pi i f_\lambda(z)) \quad (\lambda \in L_2 \text{ ou } \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(L_1, \mathbf{Z})).$$

Les séries de Fourier que nous aurons à considérer auront la forme

$$\sum_{\lambda \in L_2} c_\lambda \exp(2\pi i f_\lambda(z))$$

avec des coefficients  $c_\lambda \in \mathbf{C}$  non tous nuls (décroissant suffisamment rapidement à l'infini pour assurer une « bonne » convergence). Les fonctions décrites par de tels développements peuvent être considérées comme fonctions sur  $V/L_1$  (mais pas sur  $V/L$ !).

Pour  $z$  fixé dans  $V$ , le module de  $\exp(2\pi i f_\lambda(z))$  croît en  $\lambda$  comme l'exponentielle d'une fonction linéaire de  $\lambda$ . Pour assurer une convergence rapide de la série de Fourier (convergence simple en  $z$  ou convergence uniforme sur tout compact de  $V$ ), il suffit de prendre des coefficients  $c_\lambda$  dont le module décroît de façon gaussienne (exponentielle d'une forme quadratique définie négative). Or nous avons à notre disposition la forme  $f_\lambda(\lambda)$ . Puisque

$$\text{Im } f_\lambda(\lambda) = E(\lambda'_1, \lambda) = E(\lambda'_1, i\lambda'_1) = H(\lambda'_1, \lambda'_1) \geq 0$$

(nous avons écrit un  $\lambda \in L_2 \subset V = V_1 \oplus iV_1$  sous la forme  $\lambda = \lambda_1 + i\lambda'_1$ , où  $\lambda_1$  et  $\lambda'_1 \in V_1$  et avons utilisé l'isotropie de  $E$  sur  $V_1$ ), il s'agit de prendre

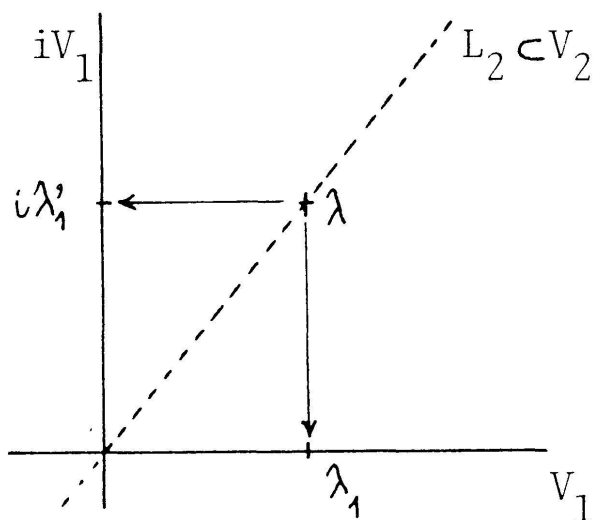
$$c_\lambda = \exp(i\pi f_\lambda(\lambda)) \text{ d'où } |c_\lambda| = \exp - \pi \text{Im } f_\lambda(\lambda) \\ = \exp - \pi H(\lambda'_1, \lambda'_1).$$

Il est clair que  $0 \neq \lambda \in L_2 \Rightarrow \lambda'_1 \neq 0$  et donc  $H(\lambda'_1, \lambda'_1) > 0$  car si  $\lambda'_1$  était nul,  $\lambda = \lambda_1$  appartiendrait à  $V_1$  or  $V_1 \cap V_2 = \{0\}$  ( $V_1$  et  $V_2 = L_2 \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$  sont supplémentaires). Ceci assure la décroissance gaussienne des  $|c_\lambda|$ , la forme

quadratique apparaissant en exposant étant le carré de la norme (euclidienne) associée au produit scalaire  $H$ , via projection de  $L_2$  sur  $iV_1$

$$\|\lambda'_1\|^2 = H(\lambda'_1, \lambda'_1) = H(i\lambda'_1, i\lambda'_1).$$

Le dessin illustre la situation, mais on prendra garde de ne pas croire que  $V_1$  et  $iV_1$  sont orthogonaux ( $v_1$  et  $iv_1$  sont  $\mathbf{C}$ -proportionnels donc non  $H$ -orthogonaux,  $V_1^\perp = \{0\}$  puisque  $V_1$   $\mathbf{C}$ -engendre  $V$ ).



La fonction theta de Riemann est ainsi définie par la série de Fourier

$$\theta(z) = \sum_{L_2} \exp\{i\pi f_\lambda(\lambda) + 2i\pi f_\lambda(z)\} \quad (z \in V).$$

Cette série converge uniformément sur tout compact de  $V$  et définit donc une fonction holomorphe sur  $V$  (invariante par les translations de  $L_1$ ). Pour pouvoir calculer  $\theta(z + \mu)$  avec  $\mu \in L_2$ , nous avons besoin du lemme suivant.

LEMME. On a  $f_\lambda(\mu) = f_\mu(\lambda)$  pour tous  $\lambda, \mu \in L_2$ .

Vérifions l'affirmation du lemme en comparant les parties réelles et imaginaires des deux membres. D'une part

$$\text{Im } f_\lambda(\mu) = f_\lambda(\mu'_1) = E(\mu'_1, \lambda) = E(\mu'_1, i\lambda'_1) \\ = E(i\mu'_1, -\lambda'_1) = E(\lambda'_1, i\mu'_1) = E(\lambda'_1, \mu) = f_\mu(\lambda'_1) = \text{Im } f_\mu(\lambda)$$

(avec des notations  $\mu = \mu_1 + i\mu'_1$  correspondant à la décomposition

$$V = V_1 \oplus iV_1 \supset L_2).$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} f_\lambda(\mu) &= f_\lambda(\mu_1) = E(\mu_1, \lambda) = E(\mu_1, i\lambda'_1) \\ &= E(\mu_1 + i\mu'_1, i\lambda'_1) = E(\mu, i\lambda'_1). \end{aligned}$$

Or  $E$  est isotrope sur  $L_2$ , donc  $E(\mu, \lambda) = 0$  et donc

$$E(\mu, i\lambda'_1) = -E(\mu, \lambda_1) = E(\lambda_1, \mu) = f_\mu(\lambda_1) = \operatorname{Re} f_\mu(\lambda).$$

Nous sommes alors en mesure de démontrer les *équations fonctionnelles*

$$\theta(z + \mu) = \exp\{-i\pi f_\mu(\mu) - 2i\pi f_\mu(z)\} \theta(z) \quad (\mu \in L_2).$$

Par définition

$$\theta(z + \mu) = \sum_{L_2} \exp\{i\pi f_\lambda(\lambda) + 2i\pi f_\lambda(z + \mu)\}.$$

Dans cette somme, effectuons la permutation  $\lambda \mapsto \lambda - \mu$  de l'indice de sommation (puisque  $\mu \in L_2$ , on translate simplement dans  $L_2$ ). Le terme général de la série est donc

$$\exp\{i\pi f_{\lambda-\mu}(\lambda - \mu) + 2i\pi f_{\lambda-\mu}(z + \mu)\}.$$

Calculons simplement l'exposant

$$\begin{aligned} & f_{\lambda-\mu}(\lambda - \mu) + 2f_{\lambda-\mu}(z + \mu) \\ &= f_\lambda(\lambda) - f_\lambda(\mu) - f_\mu(\lambda) + f_\mu(\mu) + 2f_\lambda(\mu) - 2f_\mu(\mu) \\ &+ 2f_\lambda(z) - 2f_\mu(z) = f_\lambda(\lambda) + 2f_\lambda(z) - f_\mu(\mu) - 2f_\mu(z) \end{aligned}$$

par la propriété de symétrie démontrée ci-dessus.

Plus généralement, nous écrirons

$$\theta(z + \lambda) = e_\lambda(z) \theta(z) \quad (\lambda \in L)$$

avec

$$\begin{cases} e_\lambda = 1 & \text{si } \lambda \in L_1 \text{ et} \\ e_\lambda(z) = \exp\{-i\pi f_\lambda(\lambda) - 2i\pi f_\lambda(z)\} & \text{si } \lambda \in L_2. \end{cases}$$

Il n'est d'ailleurs pas difficile de calculer la fonction  $e_\lambda$  en général, c'est-à-dire lorsque  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 \in L_1 + L_2 = L$ . En effet, par  $L_1$ -périodicité de  $\theta$ , on a  $e_\lambda = e_{\lambda_2}$ . Mais

$$\begin{aligned} & \exp -i\pi\{f_{\lambda_1+\lambda_2}(\lambda_1 + \lambda_2) + 2f_{\lambda_1+\lambda_2}(z)\} \\ &= \exp -i\pi f_{\lambda_2}(\lambda_1) \cdot e_{\lambda_2}(z) = \exp -i\pi E(\lambda_1, \lambda_2) \cdot e_{\lambda_2}(z) \end{aligned}$$

d'où

$$e_\lambda(z) = e_{\lambda_2}(z) = e^{i\pi E(\lambda_1, \lambda_2)} e^{-i\pi\{f_\lambda(\lambda) + 2f_\lambda(z)\}}.$$

On retrouve bien le facteur exponentiel ci-dessus lorsque  $\lambda_1 = 0$  (i.e. lorsque  $\lambda = \lambda_2 \in L_2$ ). En général, l'expression est semblable avec le signe

$$e^{i\pi E(\lambda_1, \lambda_2)} = \pm 1 \quad (= +1 \text{ si } \lambda_1 \in 2L_1 !).$$

Considérons l'espace vectoriel  $S_k$  formé des fonctions entières sur  $V$  et satisfaisant les équations fonctionnelles

$$f(z + \lambda) = e_\lambda(z)^k f(z) \quad (\lambda \in L).$$

Il est clair que pour  $k \geq 1$ ,  $\theta^k \in S_k$  de sorte que ces espaces ne sont pas réduits à  $\{0\}$  (les coefficients de Fourier  $c_\lambda$  de  $\theta$  sont non nuls pour  $\lambda \in L_2$  donc  $\theta$  n'est pas identiquement nulle!). Voici comment on peut fabriquer d'autres éléments de  $S_k$ . On observe tout d'abord qu'une translatée de  $\theta$  n'appartient pas souvent (!) à  $S_1$  puisqu'elle satisfait

$$\begin{aligned} \theta_a(z + \lambda) &= \theta(z - a + \lambda) = e^{-i\pi f_\lambda(\lambda) - 2i\pi f_\lambda(z - a)} \theta(z - a), \\ \theta_a(z + \lambda) &= e^{2\pi i f_\lambda(a)} e_\lambda(z) \theta_a(z) \quad (\lambda \in L_2). \end{aligned}$$

Un produit fini de translatées va donc satisfaire

$$\prod_{j=1}^k \theta_{a_j}(z + \lambda) = e^{2\pi i \sum_j f_\lambda(a_j)} \cdot \prod_j \theta_{a_j}(z) \cdot e_\lambda(z)^k$$

et appartenir à  $S_k$  dès que  $\sum a_j = 0$ . Les fonctions (enfin!) permettant de plonger projectivement  $V/L$  seront des quotients  $f/g$  où  $f$  et  $g$  appartiennent à un même  $S_k$ . Ce sont donc des fonctions méromorphes  $L$ -périodiques sur  $V$ . Pour éviter de parler des quotients (donc de pôles...), on peut simplement considérer des applications

$$z \mapsto (f_0(z), \dots, f_m(z)) : V \rightarrow \mathbf{C}^{m+1}$$

pour une famille finie

$$(f_i)_{0 \leq i \leq m} \subset S_k \quad (\text{disons } k \text{ assez grand}).$$

Comme les  $f_i$  satisfont les mêmes équations fonctionnelles, donc sont multipliées par un même facteur lorsqu'on remplace  $z$  par  $z + \lambda$  ( $\lambda \in L$ ), les points  $z$  et  $z + \lambda$  ont les mêmes images projectives et on obtiendra ainsi des applications  $V/L \rightarrow \mathbf{P}^m(\mathbf{C})$  (à condition que les  $f_i$  n'aient pas de zéro commun...). Voici un énoncé plus précis.

**THÉORÈME DE LEFSCHETZ.** *Les espaces  $S_k$  ont une dimension finie et pour  $k \geq 3$ , toute base  $f_0, \dots, f_m$  de  $S_k$  fournit un plongement projectif  $V/L \rightarrow \mathbf{P}^m$ .*

*Démonstration.* Pour ne pas masquer l'idée générale, nous supposons que  $E$  est unimodulaire donc que toutes les exponentielles de base (sur  $V_1$ )  $L_1$ -périodiques sont données par les  $2\pi i E(\cdot, \lambda)$  où  $\lambda$  parcourt  $L_2$ . Toute  $f \in S_k$  possède une restriction à  $V_1$  qui est  $L_1$ -périodique et peut être développée en série de Fourier. Les équations fonctionnelles

$$f(z + \mu) = e_{\mu}(z)^k f(z) \quad (\mu \in L_2)$$

fournissent des identités pour les développements de Fourier

$$\begin{aligned} & \sum_{L_2} a_{\lambda} e^{2\pi i f_{\lambda}(z + \mu)} \\ &= e^{-i\pi k \{f_{\mu}(\mu) + 2f_{\mu}(z)\}} \sum a_{\lambda} e^{2\pi i f_{\lambda}(z)} \\ &= e^{-i\pi k f_{\mu}(\mu)} \sum a_{\lambda} e^{2\pi i f_{\lambda - k\mu}(z)} \\ &= e^{-i\pi k f_{\mu}(\mu)} \sum a_{\lambda + k\mu} e^{2\pi i f_{\lambda}(z)}. \end{aligned}$$

Identifiant les coefficients des exponentielles de base, on trouve

$$a_{\lambda} e^{2\pi i f_{\lambda}(\mu)} = a_{\lambda + k\mu} e^{-i\pi k f_{\mu}(\mu)}$$

d'où

$$a_{\lambda + k\mu} = a_{\lambda} e^{i\pi k f_{\mu}(\mu) + 2i\pi f_{\lambda}(\mu)} = a_{\lambda} e^{i\pi f_{\mu}(2\lambda + k\mu)}$$

(en vertu de la symétrie de l'expression  $f_{\lambda}(\mu)$ , lemme ci-dessus). Connaissant les  $a_{\lambda}$  dans un parallépipède de taille  $k$ , les autres coefficients s'en déduisent inductivement :

$$\begin{aligned} f &\mapsto (a_{\lambda})_{\lambda \in \text{parallépipède de } L_2} \\ S_k &\rightarrow \mathbf{C}^{k^n} \end{aligned}$$

est injective et donc  $\dim S_k \leq k^n$  est finie (on montrera plus loin que cette dimension est exactement  $k^n$ ). Montrons maintenant que lorsque  $k \geq 2$ , les fonctions dans  $S_k$  n'ont pas de zéro commun. Pour cela, soit  $z \in V$  un élément arbitraire. Nous allons construire une  $f \in S_k$  avec  $f(z) \neq 0$ . Comme nous l'avons déjà observé, les produits de translatées de la fonction theta de Riemann permettent de définir des éléments de  $S_k$

$$\theta_{a_1} \theta_{a_2} \dots \theta_{a_k} \in S_k \quad \text{dès que} \quad a_1 + \dots + a_k = 0.$$

Il suffit de choisir les points  $a_i$  de façon que  $\theta_{a_i}(z) \neq 0$ , c'est-à-dire de façon que les  $z - a_i$  n'appartiennent pas à la variété des zéros de  $\theta$ . Ceci est possible car dénotant par  $Z$  cette variété des zéros de  $\theta$  (on peut voir qu'elle n'est pas vide, mais ceci n'est pas requis ici) les conditions  $z - a_i \notin Z$  reviennent à  $a_i \notin z - Z$ . Or  $Z$  n'a pas de point intérieur ( $\theta$  est analytique et non identiquement nulle) et il

en est de même de  $Z - z$  et  $z - Z$  : la réunion de ces fermés n'aura pas non plus de point intérieur et il sera facile de choisir les  $a_i (i \geq 2)$  dans leur complémentaire (ouvert dense) de sorte que  $\sum_{i \geq 2} a_i \notin Z - z$  et on posera simplement  $a_1 = -\sum_{i \geq 2} a_i$ . Il résulte de ce point que pour toute base  $(f_0, \dots, f_m)$  de  $S_k (k \geq 2)$  les  $f_i$  n'ont pas de zéro commun et l'application  $z \mapsto (f_i(z))$  définit une application  $V/L \rightarrow \mathbf{P}^m(\mathbf{C})$ . Il nous reste à montrer que ces applications sont des plongements lorsque  $k \geq 3$ . Ceci se fait en deux temps. On commence par voir que leurs différentielles sont injectives en chaque point (condition d'immersion), puis que les applications sont injectives. Contentons-nous de traiter le cas  $k = 3$  qui fournit le premier plongement. Pour pouvoir calculer la différentielle en question, il est convenable d'introduire des coordonnées dans  $V$ . Rappelons que nous supposons  $L$  (ou  $E$ ) unimodulaire et que nous avons introduit une base

$$e_1, \dots, e_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ de } L$$

avec

$$f_j(e_i) = f_{\lambda_j}(e_i) = E(e_i, \lambda_j) = \delta_{ij}$$

(ne pas confondre ces  $f_j$  — extensions  $\mathbf{C}$ -linéaires des  $E(., \lambda_j)$  — avec les éléments de base de  $S_k$  ... il sera prudent de revenir sous peu à une notation moins ambiguë). Nous avons aussi démontré que les éléments  $e_1, \dots, e_n$  forment une  $\mathbf{C}$ -base de  $V (V = V_1 \oplus iV_1)$ . C'est celle que nous choisirons. Dans cette base, les fonctions coordonnées  $z = \sum z_i e_i \mapsto z_i$  s'identifient aux  $f_i : z_i = f_i(z)$

$$(f_i) : V \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}^n, \quad z \mapsto (z_i).$$

Dénotons maintenant par  $(\theta_i)$  une base de  $S_k$  et considérons l'application analytique

$$\begin{aligned} (\theta_i) : V &\rightarrow \mathbf{C}^{m+1} - \{0\} \rightarrow \mathbf{P}^m(\mathbf{C}) \\ z &\mapsto (\theta_i(z)) \mapsto [\theta_i(z)]. \end{aligned}$$

La propriété d'immersion revient à dire que les vecteurs tangents aux courbes coordonnées sont indépendants entre eux et du vecteur rayon (contracté en un point de l'espace projectif). Nous devons donc démontrer que les vecteurs

$$\begin{aligned} \vec{r} &= (\theta_0(z), \dots, \theta_m(z)), \\ \vec{t}_l &= (\partial\theta_0/\partial z_l, \dots, \partial\theta_m/\partial z_l)(z) \quad (1 \leq l \leq n) \end{aligned}$$

sont  $\mathbb{C}$ -linéairement indépendants. Une relation linéaire entre ces vecteurs peut être écrite

$$\alpha_0 \vec{r} = \sum_{l=1}^n \alpha_l \vec{t}_l,$$

soit, scalairement

$$\alpha_0 \theta_i(z) = \sum \alpha_l \partial \theta_i / \partial z_l(z) \quad (0 \leq i \leq m)$$

(il est bon de se souvenir que le point  $z \in V$  est fixé). La même relation linéaire devra avoir lieu dans tout l'espace  $S_3$  engendré par les  $\theta_i$ :

$$\alpha_0 \Theta(z) = \sum \alpha_l \partial \Theta / \partial z_l(z) \quad \text{pour toute } \Theta \in S_3.$$

Nous allons exprimer cette relation linéaire pour les fonctions particulières

$$\Theta = \Theta_{ab} = \theta_{a+b} \theta_{-a} \theta_{-b} \in S_3$$

produit de translatées de la fonction theta de Riemann. Le point  $z$  étant encore fixé, on aura identiquement en  $a$  et  $b$

$$\alpha_0 \Theta_{ab}(z) = \sum \alpha_l \partial \Theta_{ab} / \partial z_l(z).$$

Introduisons la fonction méromorphe

$$\psi = \sum \alpha_l \partial(\log \theta) / \partial z_l.$$

Par définition,

$$\psi(z+a) = \sum \alpha_l \frac{\partial \log \theta(z+a)}{\partial z_l} = \sum \alpha_l \frac{\partial \log \theta_{-a}}{\partial z_l}(z)$$

et

$$\begin{aligned} & \psi(z+a) + \psi(z+b) + \psi(z-a-b) \\ &= \sum \alpha_l \frac{\partial \log \Theta_{ab}}{\partial z_l}(z) = \sum \alpha_l \frac{\partial \Theta_{ab}}{\partial z_l}(z) \Big/ \Theta_{ab}(z) \\ &= \alpha_0 \Theta_{ab}(z) / \Theta_{ab}(z) = \alpha_0 \text{ indépendant de } a \text{ et } b! \end{aligned}$$

Mais pour tout  $a$ , on peut choisir  $b$  de façon que ni  $z+b$  ni  $z-a-b$  n'appartiennent à l'ensemble des pôles de  $\psi$  et l'égalité juste prouvée montre que  $\psi(z+a) \neq \infty$ . Ceci prouve que  $\psi$  est entière ( $a$  était arbitraire). D'autre part, la dérivation logarithmique des identités fonctionnelles satisfaites par  $\theta$

$$\theta(z+\lambda) = \exp \{ -i\pi f_\lambda(\lambda) - 2i\pi f_\lambda(z) \} \cdot \theta(z) \quad (\lambda \in L_2)$$

donne

$$\frac{\partial \log \theta}{\partial z_l}(z + \lambda) = -2i\pi \frac{\partial f_\lambda}{\partial z_l} + \frac{\partial \log \theta}{\partial z_l}(z)$$

d'où

$$\psi(z + \lambda) = -2i\pi \sum \alpha_l \frac{\partial f_\lambda}{\partial z_l} + \psi(z).$$

Les fonctions  $f_\lambda$  étant linéaires, les  $\partial f_\lambda / \partial z_l$  sont des constantes et

$$\partial \psi / \partial z_j \text{ est } L_2\text{-périodique (et } L_1\text{-périodique aussi!)}.$$

Ces fonctions entières  $\partial \psi / \partial z_j$  sont donc bornées (elles s'identifient à des fonctions sur l'espace compact  $V/L$ ) et le théorème de Liouville indique qu'elles sont constantes

$$\partial \psi / \partial z_j = c_j \text{ (constante).}$$

Ainsi,  $\psi$  est linéaire affine. Puisqu'elle est holomorphe, elle est  $\mathbf{C}$ -linéaire affine et par  $L_1$ -périodicité (ce sous-groupe est engendré par une  $\mathbf{C}$ -base de  $V$ ) elle est même constante (les  $c_j$  sont nuls):

$$\psi(z + \lambda) = \psi(z) \text{ (en particulier pour } \lambda \in L_2)$$

d'où

$$\sum \alpha_l \partial f_\lambda / \partial z_l = 0.$$

Mais lorsque  $\lambda$  parcourt une base de  $L_2$ , disons la base  $(\lambda_j)$ , les  $f_\lambda$  correspondantes forment un système des coordonnées complexes sur  $V$  (ce sont les fonctions  $f_j$  introduites précédemment) et la matrice  $(\partial f_\lambda / \partial z_l)$  est non singulière (c'est la matrice identité avec le choix indiqué). Donc les  $\alpha_l$  sont tous nuls et la relation linéaire envisagée entre  $\vec{r}$  et les  $\vec{t}_l$  est triviale, prouvant leur indépendance linéaire. Il ne reste plus qu'à démontrer l'injectivité de

$$\begin{aligned} (\theta_i): V/L &\rightarrow \mathbf{P}^m(\mathbf{C}) \\ z \bmod L &\mapsto [\theta_i(z)]. \end{aligned}$$

Prenons  $z'$  et  $z'' \in V$  avec  $[\theta_i(z')] = [\theta_i(z'')]$ . Il existe donc un scalaire  $0 \neq \alpha \in \mathbf{C}$  tel que

$$\theta_i(z') = \alpha \theta_i(z'') \quad (0 \leq i \leq m)$$

d'où aussi

$$\Theta(z') = \alpha \Theta(z'') \quad \text{pour toute } \Theta \in S_3$$

(puisque les  $\theta_i$  engendrent  $S_3$ ). Revenant aux produits de translatées de la fonction theta de Riemann  $\Theta_{ab}$  utilisés dans la partie précédente de la démonstration, on aura

$$\frac{\theta(z' + a)\theta(z' + b)\theta(z' - a - b)}{\theta(z'' + a)\theta(z'' + b)\theta(z'' - a - b)} = \alpha.$$

Pour chaque  $a$  fixé dans  $V$ , on peut trouver  $b \in V$  de façon que

$$z' + b, z'' + b, z' - a - b, z'' - a - b$$

n'appartiennent pas à la variété des zéros  $Z$  de  $\theta$  (il s'agit d'éviter quatre translatés de  $\pm Z$  qui sont fermés sans point intérieur). L'identité ci-dessus montre alors que la fonction — a priori méromorphe —

$$a \mapsto \theta(z' + a)/\theta(z'' + a)$$

est entière et sans zéro. On peut l'écrire comme exponentielle d'une fonction entière :

$$\theta(z' + a)/\theta(z'' + a) = e^{\psi(a)}.$$

La  $L_1$ -périodicité de  $\theta$  montre que

$$e^{\psi(a+\lambda)} = e^{\psi(a)} \quad (\lambda \in L_1),$$

et donc

$$\psi(a + \lambda) = \psi(a) + 2\pi i n_\lambda \quad (\lambda \in L_1).$$

Prenant ensuite  $\lambda \in L_2$

$$\theta(z' + a + \lambda) = e_\lambda(z' + a)\theta(z' + a) \quad (\lambda \in L_2)$$

et une relation analogue avec  $z''$  au lieu de  $z'$ . On en tire

$$\begin{aligned} e^{\psi(a+\lambda)} &= e^{\psi(a)} e^{-i\pi\{f_\lambda(\lambda) + 2f_\lambda(z' + a) - f_\lambda(\lambda) - 2f_\lambda(z'' + a)\}} \\ &= e^{\psi(a)} e^{2i\pi f_\lambda(z'' - z')} \end{aligned}$$

puis

$$\psi(a + \lambda) = \psi(a) + 2i\pi f_\lambda(z'' - z') + 2i\pi m_\lambda \quad (\lambda \in L_2).$$

Ainsi,  $\psi(a + \lambda) - \psi(a)$  est indépendant de  $a$  pour tout  $\lambda \in L$  et la considération des dérivées partielles  $\partial\psi/\partial a_i$  comme ci-dessus, fournit

$$\partial\psi/\partial a_i \text{ entière, } L\text{-périodique (donc bornée)}$$

et donc constante, de sorte que  $\psi$  est  $\mathbf{C}$ -linéaire affine. On écrira

$$\psi(a) = 2i\pi \sum v_i a_i + v.$$

Substituant cette expression dans les relations trouvées pour  $\psi(a + \lambda)$  et prenant  $\lambda = \lambda_j \in L_2$  (correspondant aux éléments de la base duale de  $(e_i) \subset L_1$ ), on voit

$$\psi(a + \lambda_j) = \psi(a) + 2i\pi(z'' - z'_j) + 2i\pi m_j \quad (m_j = m_{\lambda_j}).$$

Mais la linéarité de  $\psi$  donne directement

$$\psi(a + \lambda_j) - \psi(a) = 2i\pi \sum v_l f_l(\lambda_j).$$

Par comparaison, on trouve donc

$$f_j(z'' - z' + \sum m_l e_l) = z'' - z'_j + m_j = \sum v_l f_l(\lambda_j) = \sum v_l f_j(\lambda_l).$$

Cette égalité de composantes fournit l'égalité vectorielle

$$z'' - z' = \sum v_l \lambda_l - \sum m_l e_l$$

avec

$$\lambda_l \in L_2, m_l e_l \in L_1$$

et la démonstration sera terminée dès qu'on aura remarqué que les  $v_l$  sont des entiers

$$(z'' - z' \in L_1 + L_2 = L \Rightarrow z'' = z' \in V/L).$$

Or on a vu en cours de route

$$\psi(a + \lambda) = \psi(a) + 2i\pi n_\lambda \quad (n_\lambda \in \mathbf{Z} \text{ lorsque } \lambda \in L)$$

et en substituant l'expression linéaire affine de  $\psi$

$$\psi(a) = 2i\pi \sum v_l a_l + v$$

on trouve sans peine  $v_l = n_l \in \mathbf{Z}$ .

q.e.d.

### 3. COMMENTAIRES CONCERNANT LA PARTIE ANALYTIQUE DE LA DÉMONSTRATION

Pour démontrer le théorème de plongement, nous avons considéré les espaces vectoriels  $S_k$  formés des fonctions entières  $f$  sur  $V$  satisfaisant les équations fonctionnelles

$$f(z + \lambda) = e_\lambda(z)^k f(z) \quad (\lambda \in L).$$

Rappelons aussi que les facteurs exponentiels  $e_\lambda(z)$  sont déterminés par

$$\begin{cases} e_\lambda = 1 & \lambda \in L_1, \\ e_\lambda(z) = \exp -i\pi f_\lambda(\lambda + 2z) & \lambda \in L_2. \end{cases}$$

En particulier, l'espace  $S_0$  est formé de fonctions entières  $L$ -périodiques, donc constantes d'après le théorème de Liouville:  $S_0 = \mathbf{C}$ . On peut aussi observer que le produit d'une fonction de  $S_k$  par une fonction de  $S_l$  est une fonction de  $S_{k+l}$ , ce qui suggère de considérer l'anneau gradué

$$S = \bigoplus_{k \geq 0} S_k = \mathbf{C} \oplus S_1 \oplus S_2 \oplus \dots$$

des fonctions theta. Par exemple, la multiplication par la fonction theta de Riemann  $\theta \in S_1$  induit des applications injectives  $S_k \rightarrow S_{k+1}$ . Comme on a déjà vu que ces espaces  $S_k$  ont des dimensions finies, les  $\dim(S_k)$  forment une suite croissante. Plus précisément

**PROPOSITION.** *On a  $\dim(S_k) = Pf(E)^n k^n$  ( $E$  étant la forme alternée sur le réseau  $L$  de rang  $2n$  dans l'espace vectoriel  $V$  de dimension complexe  $n$ ).*

En particulier

$$\begin{aligned} Pf(E) &= \dim(S_1) \quad \text{et} \\ \dim(S_k) &= k^n \quad \text{si } E \text{ est unimodulaire.} \end{aligned}$$

*Démonstration.* Nous supposons à nouveau  $E$  unimodulaire sur  $L$  (le cas général s'en déduisant facilement). Nous avons vu que les coefficients de Fourier  $a_\lambda (\lambda \in L_2)$  d'une  $f \in S_k$  satisfont aux relations de récurrence

$$a_{\lambda+k\mu} = a_\lambda e^{i\pi f_\mu(2\lambda+k\mu)} \quad (\mu \in L_2).$$

Si  $\lambda_0$  est un élément fixé de  $L_2$ , la relation de récurrence précédente impose

$$a_\lambda = a_{\lambda_0} e^{i\pi f_\nu(2\lambda_0+k\nu)} \quad \text{si } \lambda = \lambda_0 + k\nu \in \lambda_0 + kL_2.$$

Prenons  $a_{\lambda_0} = 1$  et montrons que la suite de coefficients de Fourier

$$\begin{cases} a_\lambda = e^{i\pi f_\nu(2\lambda_0+k\nu)} & \text{pour } \lambda = \lambda_0 + k\nu \in \lambda_0 + kL_2 \\ a_\lambda = 0 & \text{pour } \lambda \notin \lambda_0 + kL_2 \end{cases}$$

définit bien une fonction  $f = \theta_{\lambda_0} \in S_k$  pour  $\lambda_0 \in L_2$ . Lorsque  $\lambda_0$  parcourt un système de représentants de  $L_2 \bmod kL_2$ , on obtient évidemment des éléments linéairement indépendants de  $S_k$  (les supports des suites de coefficients de Fourier  $\lambda \mapsto a_\lambda$  correspondants forment une partition de  $L_2$ , donc sont disjoints).

Ces éléments forment une base de  $S_k$  d'où

$$\begin{aligned} \dim(S_k) &= [L_2 : kL_2] = [\mathbf{Z}^n : k\mathbf{Z}^n] \\ &= \det(k \cdot id_n) = k^n. \end{aligned}$$

Pour justifier l'affirmation, il s'agit de montrer que la suite de coefficients de Fourier attachée à un choix de  $\lambda_0 \in L_2$  satisfait effectivement la relation de récurrence caractérisant les équations fonctionnelles valables dans  $S_k$ , puis que la série de Fourier correspondante converge bien vers une fonction entière. Le premier point se vérifie par calcul : prenons  $\lambda = \lambda_0 + kv \in \lambda_0 + kL_2$  et  $\mu \in L_2$

$$a_{\lambda+k\mu} = a_{\lambda_0+k(v+\mu)} = \exp\{i\pi f_{v+\mu}(2\lambda_0 + k(v+\mu))\}.$$

L'exposant vaut (au facteur  $i\pi$  près)

$$\begin{aligned} & f_v(2\lambda_0 + kv) + \underbrace{f_v(k\mu)}_{f_\mu(kv)} + f_\mu(2\lambda_0 + k(v+\mu)) \\ &= f_v(2\lambda_0 + kv) + f_\mu(2\lambda_0 + 2kv + k\mu) \\ &= f_v(2\lambda_0 + kv) + f_\mu(2\lambda + k\mu) \end{aligned}$$

d'où bien

$$a_{\lambda+k\mu} = a_\lambda e^{i\pi f_\mu(2\lambda+k\mu)}.$$

La décroissance rapide de ces coefficients

$$a_{\lambda_0+kv} = e^{2i\pi f_{\lambda_0}(v)} e^{i\pi k f_v(v)}$$

est aussi claire puisque le module du premier terme croît comme l'exponentielle d'une fonction linéaire de  $v$  et le deuxième décroît comme une gaussienne (en  $v \in L_2$ ). La convergence en  $z$ , uniforme sur tout compact de  $V$  est alors assurée et la somme de la série de Fourier holomorphe dans  $V$  entier. On peut dire plus simplement que l'on construit une fonction  $\theta_0$  en prenant  $\lambda_0 = 0$  (par une suite de coefficients de Fourier particulièrement simples  $a_\lambda, \lambda \in kL_2$ ) et que nous obtenons les autres éléments de base de  $S_k$  par une translation convenablement tordue de ces coefficients sur les autres classes mod  $kL_2$  de  $L_2$ . Il est alors clair que le même principe s'applique dans le cas non unimodulaire en prenant les classes de  $kL_2$  dans  $\text{Hom}_{\mathbf{Z}}(L_1, \mathbf{Z})$  et on trouve la formule de dimension annoncée.

Les espaces  $S_k$  s'interprètent aussi comme espaces de sections holomorphes de fibrés (holomorphes de rang 1) sur  $V/L$ . Le système  $(e_\lambda)_{\lambda \in L}$  est un *cocycle* de  $L$  à valeurs dans l'espace des fonctions entières ne s'annulant pas sur  $V$ . On entend par là qu'on a des relations

$$e_{\lambda+\lambda'}(z) = e_\lambda(z+\lambda') e_{\lambda'}(z) \quad (\lambda, \lambda' \in L).$$

On obtient ces relations en écrivant les équations fonctionnelles satisfaites par

$$\theta(z + \lambda + \lambda') = \theta(z' + \lambda) = e_\lambda(z')\theta(z') \quad (z' = z + \lambda').$$

Le membre de gauche est par définition  $e_{\lambda + \lambda'}(z)\theta(z)$  et celui de droite  $e_\lambda(z')e_{\lambda'}(z)\theta(z)$ . Puisque  $\theta$  n'est pas identiquement nulle, on peut simplifier par cette fonction obtenant les relations de cocycle par prolongement analytique à partir de l'ouvert non vide où  $\theta \neq 0$ . Les systèmes  $(e_\lambda^k)_{\lambda \in L}$  sont naturellement aussi des cocycles de  $L$ . Montrons comment on définit un fibré holomorphe de rang 1 à partir d'un cocycle. Prenons par exemple le cocycle  $(e_\lambda)$ . Sur le fibré trivial  $V \times \mathbf{C} \rightarrow V$ , le groupe discret  $L$  agit (de façon équivariante) par

$$\lambda \cdot (z, t) = (z + \lambda, e_\lambda(z)t) \quad (\lambda \in L, z \in V, t \in \mathbf{C})$$

(l'action sur la base étant simplement donnée par les translations). L'espace des orbites

$$[z, t] = \text{orbite de } (z, t)$$

est un fibré sur  $V/L$ :

$$\begin{array}{ccc} V \times \mathbf{C} & \rightarrow & V \times_L \mathbf{C} \ni [z, t] = [z + \lambda, e_\lambda(z)t] \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \rightarrow & V/L \ni \dot{z} (= z + \lambda). \end{array}$$

Ses sections sont les applications de la forme  $z \mapsto [z, \theta(z)]$ . Par définition de la relation d'équivalence

$$[z, \theta(z)] = [z + \lambda, e_\lambda(z)\theta(z)]$$

et ce point s'exprime aussi par  $[z + \lambda, \theta(z + \lambda)]$  d'où les relations fonctionnelles satisfaites par  $\theta$ . La continuité (resp. l'holomorphie) d'une telle section s'exprime par la continuité (resp. l'holomorphie) de  $\theta$  sur  $V$ . A chaque cocycle de  $L$  à valeurs dans l'espace des fonctions entières ne s'annulant pas sur  $V$ , on associe ainsi un fibré inversible, i.e. un élément de  $H^1(V/L, \mathcal{O}^\times)$  (ce groupe abélien est en général noté additivement, mais lorsqu'on interprète ses éléments comme des fibrés inversibles, la loi de groupe est donnée par le produit tensoriel des fibrés : l'inverse d'un fibré s'identifiant au fibré dual). La construction précédente fournit un homomorphisme

$$H^1(L, \Gamma(V, \pi^*\mathcal{O}^\times)) \rightarrow H^1(V/L, \mathcal{O}^\times).$$

Ici,  $\mathcal{O}^\times$  représente le faisceau des fonctions holomorphes ne s'annulant pas sur  $V/L$ ,  $\pi: V \rightarrow V/L$  est la projection canonique de sorte que l'image inverse  $\pi^*\mathcal{O}^\times$

est le faisceau des fonctions holomorphes ne s'annulant pas sur  $V$ , ayant pour sections globales les éléments de

$$\Gamma(V, \pi^* \mathcal{O}^\times) = H^0(V, \pi^* \mathcal{O}^\times) = \{f: V \rightarrow \mathbf{C}^\times \text{ entière}\}.$$

Plus généralement, Grothendieck définit des flèches

$$H^p(G, \Gamma(X, \pi^* \mathcal{F})) \rightarrow H^p(G \backslash X, \mathcal{F})$$

dans le cas d'un groupe discret  $G$  agissant (continument, librement et proprement) sur un espace topologique (pas trop mauvais)... (cf. Mumford [1] p. 22 qui se réfère à Grothendieck [1], spécialement p. 195).

Lorsqu'on interprète ainsi  $S_k$  comme espace de sections du fibré  $\mathcal{L}^k$  correspondant au cocycle  $(e_\lambda^k)_{\lambda \in L}$

$$S_k = \Gamma(V/L, \mathcal{L}^k) = H^0(V/L, \mathcal{L}^k),$$

la finitude de la dimension de  $S_k$  résulte d'un théorème de Kodaira. Le vanishing theorem de Kodaira donne d'ailleurs aussi

$$H^i(V/L, \mathcal{L}) = 0 \quad \text{pour } i > 0$$

( $\mathcal{L}$  est un fibré positif et la classe canonique  $K_{V/L}$  est nulle puisque  $V/L$  est parallélisable de sorte qu'il existe des formes différentielles invariantes par translation, de diviseur vide). Il en résulte que la caractéristique d'Euler-Poincaré holomorphe

$$\sum (-1)^i \dim H^i(V/L, \mathcal{L}) = \dim H^0(V/L, \mathcal{L})$$

se réduit à la dimension de  $S_1$ . Le théorème de Riemann-Roch permet de retrouver cette dimension à partir de la première classe de Chern de  $\mathcal{L}$ . Ces remarques ont pour but de montrer comment les principales étapes de la démonstration analytique s'insèrent dans un contexte général.

Passons à quelques commentaires concernant le cas  $n = 1$ ,  $L$  étant ainsi un réseau de la droite complexe  $\mathbf{C}$ . Le théorème de plongement à l'aide des fonctions  $\theta$  de  $S_3$  se réalise dans un espace projectif de dimension  $m = \dim(S_3) - 1 = 3^n - 1$  (la dimension de  $S_k$  est donnée par la proposition ci-dessus), donc de dimension 2 lorsque  $n = 1$ . On obtient ainsi les modèles de  $\mathbf{C}/L$  comme courbes projectives planes. Il est plus facile dans ce cas de travailler avec les fonctions de Weierstrass  $p$  et  $p'$ . Rappelons simplement que  $p$  est définie comme somme d'une série de fonctions méromorphes

$$p(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{0 \neq \lambda \in L} \left\{ \frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right\}.$$

Il est clair par construction que l'ensemble des pôles de  $p$  est  $L$ -invariant (en dimension  $n > 1$ , les diviseurs ont une dimension  $> 0$  et il n'est guère possible de sommer les translatées d'une fonction méromorphe sur  $V$  pour obtenir une fonction méromorphe sur  $V/L$ ). En particulier,  $p$  a un pôle double en chaque point du réseau  $L$ . Sa dérivée  $p'$  a un pôle triple en ces mêmes points. On peut voir que  $p$  est un quotient de deux fonctions theta de  $S_2$  et que  $p'$  est un quotient de deux fonctions de  $S_3$ . Une base de  $S_2$  a d'ailleurs deux éléments et fournit une application projective sur  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ , donc sur la sphère de Riemann. Cette application identifie les points  $z$  et  $-z$  et est un revêtement (les quatre points de  $\frac{1}{2}L/L$  étant ramifiés).

Toujours dans le cas  $n = 1$ , montrons comment la fonction theta de Riemann s'apparente aux fonctions theta de Jacobi. La série

$$\sum_{-\infty}^{\infty} q^{n^2} \quad (q \in \mathbf{C})$$

converge pour  $|q| < 1$ . Son carré est

$$\sum q^{n^2+m^2} = \sum_{N \geq 0} c_N q^N$$

où  $c_N$  dénote le nombre de couples  $(n, m) \in \mathbf{Z}^2$  avec  $n^2 + m^2 = N$ . De même, la puissance quatrième de  $\sum q^{n^2}$  est la fonction génératrice du nombre de représentations d'un entier positif comme somme de quatre carrés parfaits. Pour calculer ces fonctions, Jacobi a posé  $q = e^{i\pi\tau}$  ( $\text{Im } \tau > 0 \Rightarrow |q| < 1$ )

$$\theta(\tau) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{i\pi n^2 \tau}.$$

Plus généralement, il étudie les fonctions

$$\theta_3(z, \tau) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{i\pi n^2 \tau} e^{2i\pi n z}$$

dont la précédente est la valeur en  $z = 0$  (theta nullwert). La série de Fourier de Riemann est donc exactement de ce type:  $L = \mathbf{Z} \oplus \tau\mathbf{Z}$ ,  $L_1 = \mathbf{Z}$ ,  $L_2 = \tau\mathbf{Z}$ .

#### 4. PARTIE COHOMOLOGIQUE DE LA DÉMONSTRATION

Nous allons démontrer ici que si le tore complexe  $V/L$  est une variété abélienne, il existe un produit scalaire hilbertien sur  $V$  de partie imaginaire entière sur les couples d'éléments de  $L$ . L'idée de la démonstration est simple. Partant d'un plongement projectif

$$i: V/L \rightarrow \mathbf{P}^m,$$

l'image en cohomologie d'un générateur  $c_1$  de  $H^2(\mathbf{P}^m)$  fournit une classe de cohomologie  $i^*(c_1)$  de degré 2 du tore. Prenant l'interprétation de de Rham des groupes de cohomologie, il y a dans la classe  $i^*(c_1)$  une unique 2-forme différentielle *harmonique* (ou de façon équivalente ici *invariante par translations*) dont la restriction à l'origine fournit la 2-forme alternée  $E = \text{Im}(H)$  (on a vu dans la sec. 2 que la partie imaginaire d'une forme hermitienne détermine cette dernière univoquement). Pour mener à bien ce programme, il est nécessaire de calculer la cohomologie des espaces projectifs et des tores complexes. On pourra montrer ensuite que si

$$A = V/L, \omega = \text{représentant harmonique de } c_1, E = \omega_{\text{origine}},$$

alors

$$\omega \in H^{(1,1)}(A) \subset H^2(A, \mathbf{C}) \Rightarrow E(iu, iv) = E(u, v),$$

$$\omega \in H^2(A, \mathbf{Z}) \Rightarrow E \text{ entière sur } L \times L,$$

$$\omega \text{ positive} \Rightarrow E \text{ positive (i.e. } E(u, iu) > 0 \text{ si } u \neq 0).$$

**PROPOSITION.** *L'homologie entière d'un espace projectif complexe  $\mathbf{P}^m = \mathbf{P}^m(\mathbf{C})$  est donnée comme suit*

$$\begin{cases} H_{2i}(\mathbf{P}^m, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z} & \text{pour } i = 0, 1, \dots, m \\ H_{2i+1}(\mathbf{P}^m, \mathbf{Z}) = 0 & \text{pour } i \text{ entier.} \end{cases}$$

*Démonstration.* L'espace  $\mathbf{P}^m$  est défini par quotient de  $\mathbf{C}^{m+1} - \{0\}$ . La classe de  $(z_0, z_1, \dots, z_m)$  sera dénotée par  $[z_0, z_1, \dots, z_m]$  (coordonnées homogènes dans l'espace projectif). On a un plongement

$$\mathbf{C}^m \hookrightarrow \mathbf{P}^m \text{ donné par } (z_1, \dots, z_m) \mapsto [1, z_1, \dots, z_m].$$

Le complémentaire de l'image (l'hyperplan à l'infini d'équation  $z_0 = 0$ ) s'identifie naturellement à l'espace projectif  $\mathbf{P}^{m-1}$  par les coordonnées  $[z_1, \dots, z_m]$ . Ainsi on obtient la décomposition

$$\mathbf{P}^m = \mathbf{C}^m \cup \mathbf{P}^{m-1} \quad (\text{réunion disjointe}).$$

Procédant itérativement, on parviendra finalement à

$$\mathbf{P}^m = \mathbf{C}^m \cup \mathbf{C}^{m-1} \cup \mathbf{C}^{m-2} \cup \dots \cup \mathbf{C} \cup \{\infty\}.$$

C'est une décomposition cellulaire de l'espace projectif, chaque espace  $\mathbf{C}^i$  étant une cellule de dimension  $2i$  (au sens de la topologie algébrique:  $\mathbf{R}^k$  est une cellule de dimension  $k$ ). L'opérateur bord diminuant les dimensions d'une unité doit être trivial (nul en toute dimension): il n'y a pas de bord non nul et chaque cellule

fournit un générateur de l'homologie entière. Il est peut-être plus convenable de se représenter les générateurs de l'homologie comme adhérences des cellules précédentes

$$\overline{C^i} = C^i \cup C^{i-1} \cup \dots \cup C \cup \{\infty\} \quad (\subset \mathbf{P}^m).$$

Par exemple, un générateur de  $H_2(\mathbf{P}^m, \mathbf{Z})$  est donné par la droite projective  $\mathbf{P}^1 \subset \mathbf{P}^m$  (toutes les droites projectives sont homologues dans  $\mathbf{P}^m$ ), et cette droite projective s'identifie, avec sa structure analytique à la sphère de Riemann  $C \cup \{\infty\}$ .

Comme nous travaillerons finalement avec des formes différentielles, donnons une 2-forme dont la classe dans  $H^2(\mathbf{P}^m, \mathbf{C})$  est duale du 2-cycle entier défini par la cellule  $C$  (ou son adhérence  $\mathbf{P}^1$ ) de  $\mathbf{P}^m$ .

Dénotons par  $\pi$  la projection canonique  $\mathbf{C}^{m+1} - \{0\} \rightarrow \mathbf{P}^m$  contractant les droites homogènes (complexes) en des points. Lorsque  $\sigma$  est une section holomorphe de  $\pi$  définie dans un ouvert  $U \subset \mathbf{P}^m$  (il y a de telles sections dès que  $U$  est simplement connexe, par exemple si  $U$  est un ouvert affine principal  $U_i$  défini par  $z_i \neq 0$ )

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\sigma} & \mathbf{C}^{m+1} - \{0\} \\ & \searrow \pi & \\ & & \mathbf{P}^m \end{array} \quad \pi \circ \sigma = id_U,$$

on peut calculer la 2-forme (à valeurs complexes) sur  $U$

$$\omega_U = \frac{i}{2\pi} \partial \bar{\partial} \log \|\sigma\|^2.$$

Ici, la norme utilisée est la norme canonique de  $\mathbf{C}^{m+1}$

$$\|z\|^2 = \|(z_i)\|^2 = \sum_{0 \leq i \leq m} |z_i|^2$$

(elle dérive du produit scalaire hermitien canonique sur  $\mathbf{C}^{m+1}$ ) et les opérateurs  $\partial$  et  $\bar{\partial}$  sont fournis par la structure complexe (de  $U$ ): en coordonnées, la différentielle extérieure  $d$  de de Rham s'écrit

$$\sum_i (\partial/\partial z_i) dz_i \wedge + \sum_i (\partial/\partial \bar{z}_i) d\bar{z}_i \wedge = \partial + \bar{\partial}.$$

On vérifie sans peine que  $\omega_U$  est indépendante du choix de section holomorphe  $\sigma$  sur  $U$ : tout autre choix doit être de la forme  $\sigma' = f\sigma$  où  $f$  est une fonction (scalaire) holomorphe sur  $U$  et ne s'annulant pas. Ainsi

$$\partial \bar{\partial} \log \|\sigma'\|^2 = \partial \bar{\partial} \log \|\sigma\|^2 + \partial \bar{\partial} \log |f|^2.$$

Localement, choisissant des branches convenables de logarithmes complexes, on peut écrire  $\log |f|^2 = \log f + \log \bar{f}$  et donc

$$\bar{\partial} \log |f|^2 = \bar{\partial}(\log f + \log \bar{f}) \quad (\text{localement}).$$

Mais  $\log f$  étant holomorphe,  $\bar{\partial} \log f = 0$  et  $\partial \bar{\partial} \log f = 0$ . De plus,

$$0 = d^2 = (\partial + \bar{\partial})^2 = \partial \bar{\partial} + \bar{\partial} \partial \quad (\partial^2 = \bar{\partial}^2 = 0)$$

implique de même

$$\bar{\partial} \log \bar{f} = -\bar{\partial} \partial \log \bar{f} = -\bar{\partial}(0) = 0.$$

Choisissant un recouvrement  $(U_i)$  de  $\mathbf{P}^m$  par des ouverts sur lesquels il existe de telles sections holomorphes  $\sigma_i$  de  $\pi$  (par exemple les ouverts affines  $U_i: z_i \neq 0$ ), les 2-formes  $\omega_i$  correspondantes doivent se recoller

$$\omega_i|_{U_i \cap U_j} = \omega_j|_{U_j \cap U_i}$$

(d'après l'indépendance du choix des sections choisies pour les calculer) et fournir une 2-forme globale  $\omega$  bien définie sur tout  $\mathbf{P}^m$ . C'est la 2-forme de Fubini-Study.

**PROPOSITION.** *La 2-forme de Fubini-Study est fermée, invariante par l'action du groupe unitaire de  $\mathbf{C}^{m+1}$ , de classe de cohomologie entière. Plus précisément, la classe de cohomologie de la forme de Fubini-Study dans  $H^2(\mathbf{P}^m, \mathbf{C})$  est la duale du générateur  $[\mathbf{P}^1] \in H_2(\mathbf{P}^m, \mathbf{Z})$ .*

*Démonstration.* On a

$$(\partial + \bar{\partial})(\partial - \bar{\partial}) = \partial^2 - \bar{\partial}^2 + \bar{\partial} \partial - \partial \bar{\partial} = -2\partial \bar{\partial},$$

d'où

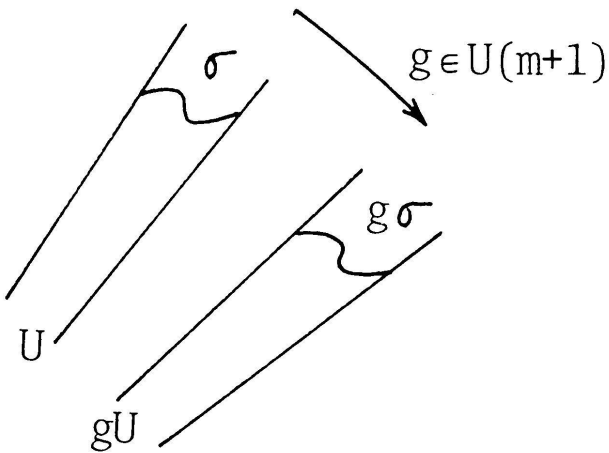
$$\bar{\partial} \partial = -\frac{1}{2}d(\partial - \bar{\partial}).$$

Ainsi

$$\omega_U = \frac{i}{2\pi} \bar{\partial} \partial \log \|\sigma\|^2 = -\frac{i}{4\pi} d(\partial - \bar{\partial}) \log \|\sigma\|^2,$$

$$\omega_U = d\eta \Rightarrow d\omega_U = 0 \quad (\text{pour les } U = U_i \text{ recouvrant } \mathbf{P}^m)$$

d'où  $\omega$  fermée. Pour démontrer l'invariance de  $\omega$  par le groupe unitaire  $U(m+1)$  de  $\mathbf{C}^{m+1}$ , prenons une transformation  $g \in U(m+1)$ . Pour une section holomorphe  $\sigma$  de  $\pi$  définie sur un ouvert  $U$ , on pourra choisir la section  $g\sigma$  de  $\pi$  sur l'ouvert  $gU$ .



On a par définition

$$g\sigma(gz) = \sigma(z) \quad (z \in U),$$

d'où

$$\|g\sigma(gz)\| = \|\sigma(z)\|.$$

Lorsque \$z\$ et \$gz\$ appartiennent à \$U\$, on a ainsi

$$\|\sigma(gz)\| = \|\sigma(z)\|.$$

L'invariance de \$\omega\$ en résulte.

L'intégralité de la classe de cohomologie \$[\omega]\$ de \$\omega\$ résultera de la formule plus précise

$$\int_c \omega = 1, \quad c = \text{classe d'une droite dans } H_2(\mathbf{P}^m, \mathbf{Z}).$$

En effet, le groupe \$H\_2(\mathbf{P}^m, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}c\$ est de rang 1. Pour calculer l'intégrale proposée, il faut passer en coordonnées (la formule de Stokes montre que cette intégrale est indépendante du représentant choisi dans la classe \$c\$ car \$\omega\$ est fermée, et ne changerait d'ailleurs pas non plus par adjonction d'une forme exacte à \$\omega\$ car \$c\$ est fermée). Sur l'ouvert affine \$U = U\_0\$ (défini par \$z\_0 \neq 0\$, cet ouvert est dense) nous prendrons naturellement la section (holomorphe!) \$\sigma\$ de \$\pi\$ donnée par

$$z = [z_0, \dots, z_m] \mapsto (1, z_1/z_0, \dots, z_m/z_0).$$

On peut même choisir l'expression des points de cet ouvert ayant \$z\_0 = 1\$. On a donc

$$\begin{aligned} \|\sigma(z)\|^2 &= 1 + \sum z_i \bar{z}_i, \\ \bar{\partial} \log \|\sigma\|^2 &= \sum z_i d\bar{z}_i / (1 + \sum \dots), \\ \partial \bar{\partial} \log \|\sigma\|^2 &= \sum \partial \left( \frac{z_i}{1 + \sum} \right) \wedge d\bar{z}_i \\ &= \sum_i \frac{dz_i \wedge d\bar{z}_i}{1 + \sum} - \sum_{i,j} \frac{z_i \bar{z}_j dz_j \wedge d\bar{z}_i}{(1 + \sum)^2} \end{aligned}$$

La restriction à la droite \$z\_1 = z, z\_i = 0\$ (\$i \geq 2\$) donne

$$\frac{2\pi}{i} \omega \Big|_{\text{axe } z_1 = z} = \frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1 + |z|^2)^2}.$$

Mais  $dz \wedge d\bar{z} = (dx + idy) \wedge (dx - idy) = -2i dx \wedge dy$  de sorte que

$$\int_c \omega = \frac{i}{2\pi} \int \frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1 + |z|^2)^2} = -2i \frac{i}{2\pi} \int \frac{dx \wedge dy}{(1 + |z|^2)^2}.$$

On passe en coordonnées polaires  $\iint dx dy \dots = \int_0^\infty dr r \int_0^{2\pi} d\varphi \dots$  et on trouve

$$\begin{aligned} \int_c \omega &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \frac{2r dr}{(1 + r^2)^2} \\ &= \int_0^\infty \frac{d\rho}{(1 + \rho)^2} = -\frac{1}{1 + \rho} \Big|_0^\infty = 1. \end{aligned}$$

Nous aurons encore besoin de savoir que la 2-forme de Fubini-Study est *positive*. Puisqu'elle est invariante par le groupe transitif  $U(m+1)$ , il suffit de voir qu'elle est positive en un point, disons l'origine  $[1, 0, \dots, 0] \in \mathbf{P}^m$ . Ce point appartient bien à la carte affine  $U_0(z_0 \neq 0)$  dans laquelle nous avons donné une expression explicite de  $\omega$ :

$$\omega_{\text{origine}} = \frac{i}{2\pi} \sum_{1 \leq i \leq m} (dz_i \wedge d\bar{z}_i)_{\text{origine}}.$$

Rappelons-nous que  $dz_i$  est le champ constant de formes linéaires (complexes) coordonnées de sorte que  $(dz_i)_{\text{origine}} = f_i$  et similairement  $(d\bar{z}_i)_{\text{origine}} = \bar{f}_i$  (complexe conjuguée de  $f_i$ : elle est antilinéaire). On a donc

$$\omega_{\text{origine}} = \frac{i}{2\pi} \sum (f_i \otimes \bar{f}_i - \bar{f}_i \otimes f_i)$$

et

$$\begin{aligned} \omega_{\text{origine}}(u, iu) &= \frac{i}{2\pi} \sum (f_i(u) \overline{f_i(iu)} - \overline{f_i(u)} f_i(iu)) \\ &= \frac{i}{2\pi} \sum (u_i \overline{(iu)_i} - \overline{u_i} (iu)_i) \\ &= \frac{1}{\pi} \sum \overline{u_i} u_i > 0 \quad \text{si } u \neq 0. \end{aligned}$$

(La seule difficulté de ce calcul consiste à ne pas confondre l'indice de sommation  $i$  variant de 1 à  $m$  et  $i = \sqrt{-1}$  ...).

Observons encore que la 2-forme de Fubini-Study  $\omega$  est de *type* (1, 1) au sens de Hodge. Comme

$$H^2(X, \mathbf{C}) = H^{(2, 0)} \oplus H^{(1, 1)} \oplus H^{(0, 2)},$$

$$H^{(0, 2)} = \text{conjugué de } H^{(2, 0)} \text{ (donc de même dimension!)}$$

on a toujours  $\dim_{\mathbf{C}} H^2(X, \mathbf{C}) = \dim_{\mathbf{C}} H^{(1, 1)} + 2 \dim_{\mathbf{C}} H^{(2, 0)}$  et dans notre cas,

$$\dim_{\mathbf{C}} H^2(\mathbf{P}^m, \mathbf{C}) = 1 \Rightarrow H^{(2, 0)} = H^{(0, 2)} = 0.$$

Plus simplement, on remarque que l'expression explicite de  $\omega$  dans une carte ne fait intervenir aucune expression  $dz_i \wedge dz_j$  ni  $d\bar{z}_i \wedge d\bar{z}_j$  mais seulement des  $dz_i \wedge d\bar{z}_j$ . En tout point  $a \in \mathbf{P}^m$ , on a donc

$$\omega_a(iu, iv) = \omega_a(u, v).$$

On peut passer à la considération de la restriction de la 2-forme de Fubini-Study à la variété abélienne plongée projectivement

$$i: A = V/L \hookrightarrow \mathbf{P}^m$$

$$i^*\omega \leftarrow \omega \quad (\text{Fubini-Study}).$$

Nous étudierons cette restriction par introduction de coordonnées réelles  $(x_j)_{1 \leq j \leq 2n}$  sur  $V$  obtenues en choisissant une base de  $L$ . Nous identifierons cette 2-forme à une 2-forme  $\mathbf{Z}^{2n}$ -périodique sur  $\mathbf{R}^{2n}$

$$\tilde{\omega} = \sum_{j, k} a_{jk} dx_j \wedge dx_k \quad ((a_{jk}) \text{ antisymétrique})$$

avec coefficients lisses  $a_{jk} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^{2n}/\mathbf{Z}^{2n})$ . Comme  $\tilde{\omega}$  est fermée, on doit avoir

$$0 = d\tilde{\omega} = \sum_{j, k} da_{jk} \wedge dx_j \wedge dx_k$$

$$= \sum_{j, k, p} (\partial a_{jk} / \partial x_p) dx_p \wedge dx_j \wedge dx_k.$$

En regroupant les termes semblables, on trouve les relations de *cocycle*

$$\partial^i a_{jk} + \partial^j a_{ki} + \partial^k a_{ij} = 0 \quad (\partial^p = \partial / \partial x_p).$$

Développons alors en série de Fourier ces coefficients  $a_{jk}$ :

$$a_{jk}(x) = \sum a_{jk}(l) e^{2\pi i l \cdot x}$$

(l'indice  $l$  parcourt le réseau entier  $\mathbf{Z}^{2n}$  et  $l \cdot x = l_1 x_1 + l_2 x_2 + \dots$ ).

LEMME. La 2-forme  $\tilde{\omega}$  est cohomologue à la 2-forme

$$\sum a_{jk}(0) dx_j \wedge dx_k.$$

Cette dernière forme (à coefficients constants) n'est rien d'autre que la forme moyenne de  $\tilde{\omega}$ : elle est invariante par translations. C'est aussi le représentant harmonique de la classe de cohomologie définie par  $\tilde{\omega}$  sur le tore réel  $\mathbf{R}^{2n}/\mathbf{Z}^{2n}$ .

*Preuve du lemme.* Il suffit de construire une primitive de la 2-forme

$$\begin{aligned} \eta &= \sum_{j,k} (a^{jk} - a_{jk}(0)) dx_j \wedge dx_k \\ &= \sum_{j,k,l \neq 0} a_{jk}(l) e^{2\pi i l x} dx_j \wedge dx_k. \end{aligned}$$

On cherche donc une forme

$$\Omega = \sum_i A_i dx_i = \sum_i \sum_l A_i(l) e^{2\pi i l x} dx_i$$

telle que

$$d\Omega = \sum_{j,k,l \neq 0} a_{jk}(l) e^{2\pi i l x} dx_j \wedge dx_k.$$

Comme toutes les fonctions considérées sont lisses, les développements de Fourier considérés sont rapidement convergents (suites de coefficients  $a_{jk}(l) \rightarrow 0$  plus vite que  $\|l\|^{-p}$  pour tout entier  $p \in \mathbf{N}$  lorsque  $\|l\| \rightarrow \infty$ ) il est légitime de dériver ces séries terme à terme et on trouve les conditions

$$l_i A_j(l) - l_j A_i(l) = a_{ij}(l) \quad (l \neq 0).$$

Choisissant un indice  $i$  avec  $l_i \neq 0$  et le coefficient  $A_i(l)$  arbitraire, on posera pour  $j \neq i$

$$A_j(l) = (l_j A_i(l) + a_{ij}(l)) / l_i.$$

Il résulte immédiatement des conditions de cocycle pour le système des  $a_{ij}$  que ces  $A_j(l)$  satisfont bien toutes les conditions imposées, et le lemme est ainsi démontré.

Dénotons par

$$\omega^* = \sum_{j < k} a_{jk}(0) dx_j \wedge dx_k$$

cette forme moyenne. Elle est de classe entière

$$[\omega^*] = [i^* \omega] \in H^2(A, \mathbf{Z})$$

comme image réciproque de la classe entière de la forme de Fubini-Study. Son

intégrale sur un 2-cycle entier (surface fermée) de  $A$  doit donner un entier. Prenons en particulier les 2-cycles donnés par la paramétrisation

$$c_{\lambda\mu}: [0, 1]^2 \rightarrow A = V/L \quad (\lambda, \mu \in L) \\ (s, t) \mapsto s\lambda + t\mu \pmod{L}$$

(lorsque  $\lambda$  est non proportionnel à  $\mu$ , l'image du cycle  $c_{\lambda\mu}$  est un tore usuel —  $\dim_{\mathbf{R}} = 2$  — immergé dans  $A$ : c'est même un tore plongé dans  $A$  si  $\{\lambda, \mu\}$  est contenu dans une base de  $L$ ). On doit donc avoir

$$\int_{c_{\lambda\mu}} \omega^* \quad \text{entier (pour } \lambda, \mu \in L \text{)} .$$

Utilisant la paramétrisation donnée pour calculer ces intégrales, on trouve (tenant compte du fait que le champ de formes bilinéaires  $\omega^*$  est constant)

$$\int_{c_{\lambda\mu}} \omega^* = \omega_{\text{origine}}^*(\lambda, \mu) \int_0^1 \int_0^1 ds dt = E(\lambda, \mu)$$

avec

$$E = \omega_{\text{origine}}^* \text{ (forme } \mathbf{R}\text{-bilinéaire alternée)} .$$

C'est la propriété d'*intégralité* souhaitée sur  $L \times L$ . Pour conclure la démonstration, il reste à voir que  $E$  est *positive* et invariante par multiplication simultanée des arguments par  $i$  (*type* (1, 1)). Comme la valeur à l'origine de la 2-forme  $\omega^*$  est obtenue par moyenne (relativement à la mesure de Haar normalisée du groupe  $V/L$ , c'est aussi l'image de la mesure de Lebesgue, identifiant  $V$  à  $\mathbf{R}^{2n}$  par choix d'une base de  $L$ ), des formes  $\mathbf{R}$ -bilinéaires alternées positives

$$\omega_a \quad (a \in A, \omega: 2\text{-forme de Fubini-Study}),$$

la positivité de  $E$  est évidente. Cette opération de moyenne ne change pas non plus le type (elle ne touche que les coefficients des formes  $dx_j \wedge dx_k$ , pas les  $dx_j \wedge dx_k$  elles-mêmes)

$$E(u, v) = \omega_{\text{origine}}^*(u, v) = \int_{A \subset \mathbf{P}^m} \omega_a(u, v) da$$

et  $\omega_z(iu, iv) = \omega_z(u, v)$  (pour tout  $z \in \mathbf{P}^m$ ) implique  $E(iu, iv) = E(u, v)$ .

5. COMMENTAIRES CONCERNANT LA PARTIE COHOMOLOGIQUE  
DE LA DÉMONSTRATION

C'est la partie cohomologique de la preuve (section précédente) qui permet de donner un exemple de tore complexe non projectif (cf. sec. 1, remarque 4). Il est plus facile de construire une variété analytique (lisse) compacte non projective. A cet effet, on peut construire les *surfaces de Hopf* comme suit. On regarde le corps des quaternions réels

$$\mathbf{H} = \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}i \oplus \mathbf{R}j \oplus \mathbf{R}k$$

( $i^2 = j^2 = k^2 = -1$  et  $ij = k, \dots$ ) comme espace vectoriel complexe de dimension 2

$$\mathbf{H} = (\mathbf{R} \oplus \mathbf{R}i) \oplus (\mathbf{R} \oplus \mathbf{R}i)j = \mathbf{C} \oplus \mathbf{C}j.$$

On choisit ensuite un quaternion réel  $\gamma > 1$  de sorte que le sous-groupe

$$\Gamma = \{\gamma^n : n \in \mathbf{Z}\} \subset \mathbf{H}^\times$$

du groupe multiplicatif des quaternions non nuls est discret (donc fermé). L'espace homogène

$$X_\gamma = \mathbf{H}^\times / \Gamma \quad (\dim_{\mathbf{C}} X_\gamma = 2)$$

est une variété analytique (lisse) compacte (c'est même un groupe de Lie complexe puisque  $\gamma$  est réel, donc  $\Gamma$  contenu dans le centre de  $\mathbf{H}^\times$ ). La décomposition polaire

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^\times &\rightarrow S^3 \times \mathbf{R}_+^\times \\ q &\mapsto (q/|q|, |q|) \end{aligned}$$

où  $S^3$  dénote la sphère unité de l'espace  $\mathbf{H} \cong \mathbf{R}^4$ , est un difféomorphisme. Elle induit un difféomorphisme

$$X_{\gamma_1} \cong S^3 \times \mathbf{R}_+^\times / \Gamma = S^3 \times S^1.$$

Comme l'homologie d'une sphère est donnée par la décomposition cellulaire

$$\begin{aligned} S^n &= \mathbf{R}^n \cup \{\infty\} \text{ (opérateur bord trivial),} \\ H_i(S^n, \mathbf{Z}) &= \mathbf{Z} \text{ si } i = 0 \text{ ou } n, H_i = 0 \text{ sinon,} \end{aligned}$$

la formule de Künneth permet de calculer l'homologie de  $X_\gamma$  (l'homologie des sphères est sans torsion; d'ailleurs, il suffirait de calculer l'homologie sur un corps, par exemple  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ ). En particulier

$$H_k(S^1) \otimes H_l(S^3) = 0 \text{ pour } k + l = 2$$

implique

$$H_2(X_\gamma) = H_2(S^1 \times S^3) = 0$$

puis  $H^2(X_\gamma, \mathbf{C}) = 0$ . Mais, pour toute variété projective  $X$ , on a  $H^2(X, \mathbf{C}) \neq 0$ . En effet, si  $X$  est plongée dans un espace projectif  $\mathbf{P}^m(\mathbf{C})$ , la restriction de la forme de Fubini-Study de  $\mathbf{P}^m(\mathbf{C})$  à  $X$  fournit une 2-forme fermée positive  $\omega$  sur  $X$  dont la classe de cohomologie est non nulle  $0 \neq [\omega] \in H^2(X, \mathbf{C})$  (si la forme  $\omega$  était exacte, toutes les puissances extérieures  $\omega \wedge \omega \wedge \dots \wedge \omega$  seraient aussi exactes et en particulier, considérant la puissance égale à la dimension complexe de  $X$ ,  $\int_X \omega \wedge \dots \wedge \omega = 0$  ce qui n'est pas le cas, puisque cette puissance extérieure est une forme volume sur  $X$ : l'intégrale précédente est positive — on suppose naturellement  $\dim_{\mathbf{C}} X > 0$ !).

Puisque tous les tores sont difféomorphes, on ne peut trouver d'obstruction à un plongement projectif aussi simple que pour les surfaces de Hopf. Il a été nécessaire de faire intervenir l'intégralité de la forme de Fubini-Study. L'homologie d'un tore, i.e. d'un produit de cercles, est aussi donnée par la formule de Künneth (l'homologie d'un cercle  $S^1$  étant sans torsion, l'homologie du tore est engendrée par  $H_1$ )<sup>1)</sup>. Mais les calculs faits dans la section précédente permettent d'être même plus explicites. Prenons en effet un tore  $V/L$  et un entier  $k$  avec  $0 \leq k \leq \dim_{\mathbf{R}}(V)$ . Toute forme différentielle de degré  $k$  sur  $V/L$  peut être considérée comme  $k$ -forme  $L$ -périodique sur  $V$  et développée en série de Fourier. Seuls les termes constants de la série de Fourier nous intéressent (toute forme fermée est cohomologue à ses termes constants). Par restriction à l'origine, on obtient donc une  $k$ -forme alternée sur  $V$ . On en déduit les isomorphismes

$$H^k(V/L, \mathbf{R}) \simeq \text{Alt}^k(V, \mathbf{R}) = \wedge^k V^*$$

puis

$$\dim_{\mathbf{R}} H^k(V/L, \mathbf{R}) = \binom{n}{k} \quad \text{si } n = \dim_{\mathbf{R}}(V).$$

Lorsqu'on désire établir des isomorphismes analogues sur  $\mathbf{Z}$ , on doit utiliser

<sup>1)</sup> Puisque  $V$  est contractible,  $V \rightarrow V/L$  s'identifie au revêtement universel du tore  $V/L$  et  $\pi_1(V/L) \cong L$ . En particulier  $H_1(V/L, \mathbf{Z}) \cong L$ .

la formule de Künneth. Par exemple, pour  $k = 2$ , le théorème de Künneth montre que les 2-cellules entières

$$c_{\lambda\mu}: (s, t) \rightarrow s\lambda + t\mu \bmod L \quad (\lambda, \mu \in L) \\ [0, 1]^2 \rightarrow V/L$$

engendrent  $H_2(V/L, \mathbf{Z})$  (dans la sec. 4 nous n'avons utilisé que l'intégralité de ces cellules particulières). L'intégralité d'une 2-forme alternée sur  $L$  caractérise les éléments de  $H^2(V/L, \mathbf{Z})$ .

La construction transcendante des surfaces de Hopf présente tout de même quelque analogie avec celle des tores complexes (de dimension 2). En effet, lorsque  $\dim_{\mathbf{C}}(V) = 2$ , on peut effectuer un quotient par un réseau  $L$  en deux temps. Choisisant d'abord une base complexe de  $V$  dans un système de générateurs de  $L$ , on peut identifier  $V$  à  $\mathbf{C}^2$  et un facteur direct  $L_1$  de  $L$  à  $\mathbf{Z}^2$ . Donc

$$V/L = V/L_1 \oplus L_2 = \mathbf{C}^2/\mathbf{Z}^2 \Big/ L'_2$$

où  $L'_2$  dénote le sous-groupe image de  $L_2$  dans le quotient. Avec l'exponentielle normalisée

$$\underline{e}(z) = \exp(2\pi iz),$$

on peut identifier  $\mathbf{C}/\mathbf{Z}$  à  $\mathbf{C}^\times$  et

$$V/L \cong \mathbf{C}^\times \times \mathbf{C}^\times/L'_2$$

où  $L'_2$  est un sous-groupe discret (de rang 2) de  $\mathbf{C}^\times \times \mathbf{C}^\times$ . Les surfaces de Hopf étaient obtenues comme quotient de  $\mathbf{C} \times \mathbf{C} - (0, 0)$  par un sous-groupe discret (de rang 1 de  $\mathbf{H}^\times$ ).

La principale différence entre les deux situations envisagées provient du fait que les tores complexes sont toujours *kählériens*, et en particulier leur  $H^2$  est non nul, tandis que les surfaces de Hopf ne le sont pas.

## 6. CLASSIFICATION DE VARIÉTÉS ABÉLIENNES

Commençons par déterminer les applications holomorphes entre tores complexes.

**PROPOSITION.** Soient  $V/L$  et  $V'/L'$  deux tores complexes et  $f: V/L \rightarrow V'/L'$  une application holomorphe. Alors  $f(v) = f_0(v) f(0)$  où  $f_0$  est un homomorphisme provenant d'une application  $\mathbf{C}$ -linéaire  $F: V \rightarrow V'$  telle que  $F(L) \subset L'$ .

*Démonstration.* Remplaçant  $f$  par  $f - f(0)$ , on peut supposer  $f(0)$  nul (dans  $V'/L$ ) puis relever la composée

$$V \rightarrow V/L \xrightarrow{f} V'/L$$

au revêtement universel  $V'$  de  $V'/L$ :

$$\begin{array}{ccc} & & V' \\ & \nearrow F & \downarrow \\ V & & V'/L \\ & \searrow & \end{array}$$

Choisissons même le relèvement  $F$  tel que  $F(0) = 0$ . Comme les points  $z$  et  $z + \lambda$  ( $\lambda \in L$ ) ont même image (dans  $V/L$ ), la différence  $F(z + \lambda) - F(z)$  doit être un élément de  $L$  et l'application (continue!)  $z \mapsto F(z + \lambda) - F(z)$  envoie l'espace connexe  $V$  dans l'espace discret  $L$ : elle est constante et on a

$$F(z + \lambda) = F(z) + c_\lambda \quad (c_\lambda = F(\lambda)).$$

Les dérivées partielles de  $F$  (par rapport à une base de  $V$ ) sont ainsi holomorphes et  $L$ -périodiques donc bornées. Le théorème de Liouville montre qu'elles doivent être constantes et  $F$  est ( $\mathbf{C}$ )-linéaire (linéaire homogène si on a choisi  $F(0)$  nul).

Il résulte immédiatement de la proposition précédente que lorsque

$$f: V/L \rightarrow V'/L$$

est un homomorphisme holomorphe, le relèvement  $F: V \rightarrow V'$  a une restriction  $F_f: L \rightarrow L$  additive (i.e.  $\mathbf{Z}$ -linéaire) qui caractérise complètement  $F$  et  $f$ . Ainsi

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\text{hol}}(V/L, V'/L) & \rightarrow & \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(L, L) \\ f & \mapsto & F_f \end{array}$$

est bijective. En particulier, si  $L = L$ ,

$$\text{End}_{\text{hol}}(V/L) \cong \text{End}_{\mathbf{Z}}(L) \cong \text{End}(\mathbf{Z}^n) = M_n(\mathbf{Z})$$

et

$$\text{Aut}_{\text{hol}}(V/L) \cong \text{Aut}(L) \cong \text{Gl}(\mathbf{Z}^n) = \text{Gl}_n(\mathbf{Z}).$$

Passons aux variétés abéliennes. Lorsque  $A = V/L$  est une telle variété, il existe une forme alternée

$$E: L \times L \rightarrow \mathbf{Z} \quad (\text{ou } \wedge^2 L \rightarrow \mathbf{Z})$$

dont l'extension  $\mathbf{R}$ -bilinéaire (encore notée  $E$ )  $V \times V \rightarrow \mathbf{R}$  satisfait

$$\begin{cases} E(u, iu) > 0 & \text{si } 0 \neq u \in V, \\ E(iu, iv) = E(u, v) & (u, v \in V) \end{cases}$$

(cf. sec. 2), et il est plus intéressant de classer les couples  $(A, E)$ . On peut observer que  $L$  se déduit intrinsèquement de  $A$  par formation de l'homologie (entière)

$$A \mapsto \pi_1(A) = H_1(A, \mathbf{Z}) = H_1(A),$$

de sorte que dans la donnée  $(A, E)$ , on peut considérer que  $E$  est un élément de

$$\text{Hom}_{\mathbf{Z}}(\wedge^2 H_1(A), \mathbf{Z}).$$

Un tel élément  $E$ , ayant les propriétés indiquées ci-dessus est appelé *polarisation* de  $A$  et le couple  $(A, E)$  est une *variété abélienne polarisée*. Lorsque  $E$  est unimodulaire, on dit que la polarisation est *principale* et  $A$  est *polarisée principalement* par la donnée de  $E$ .

*Remarque.* Choisisant une base  $(e_i, \lambda_j)_{1 \leq i, j \leq n}$  de  $L$  dans laquelle  $E$  s'exprime sous forme réduite de Frobenius

$$\begin{cases} E(e_i, e_j) = E(\lambda_i, \lambda_j) = 0, \\ E(e_i, \lambda_j) = \delta_{ij} d_i \quad (d_{i+1} \text{ multiple de } d_i \text{ pour } 1 \leq i < n), \end{cases}$$

on voit que  $E$  peut être considérée comme forme unimodulaire sur le réseau  $L$  engendré par les  $e_i$  et les  $\lambda_j/d_j$ , de sorte que  $A' = V/L$  est polarisée principalement (par  $E$ ). Le noyau de la projection canonique  $A \rightarrow A'$  (correspondant à l'inclusion  $L \subset L'$ ) est fini et d'ordre  $\prod d_j (= Pf(E))$ , et  $A$  apparaît comme revêtement fini de la variété abélienne principalement polarisée  $A'$ .

Similairement, on peut construire un réseau  $L'' \subset L$  et une multiple  $\frac{1}{m}E$  unimodulaire, d'où un revêtement fini  $A'' \rightarrow A$  principalement polarisé. De façon générale, on peut donc dire que toute variété abélienne  $A$  est « comprise entre » deux variétés abéliennes principalement polarisées

$$A'' \rightarrow A \rightarrow A' \quad (\text{revêtements: noyaux finis}).$$

Conservons donc les notations précédentes en supposant que le réseau  $L$  de  $V$  est muni d'une polarisation principale  $E$ . La base *symplectique* choisie

$$(e_1, \dots, e_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

sera dénotée plus simplement  $(e_i)_{1 \leq i \leq 2n}$  ou  $(e)$  (de sorte que  $\lambda_j = e_{j+n}$ ). On a donc par hypothèse

$$\begin{aligned} E(e_i, e_j) &= E(e_{n+i}, e_{n+j}) = 0, \\ E(e_i, e_{n+j}) &= \delta_{ij} \quad (1 \leq i, j \leq n). \end{aligned}$$

Il sera utile de travailler dans une autre base  $(e') = (e'_j)_{1 \leq j \leq 2n}$  de l'espace vectoriel réel  $V_{\mathbf{R}}$  sous-jacent à  $V$  (restriction des scalaires à  $\mathbf{R}$ ) définie comme suit

$$(e') = (ie_1, \dots, ie_n, e_1, \dots, e_n) \quad (i = \sqrt{-1}).$$

Dans cette base  $(e')$ , la matrice  $J$  de la multiplication par  $i = \sqrt{-1}$  dans  $V_{\mathbf{R}}$  est donnée par

$$\begin{aligned} ie'_j &= i^2 e_j = -e'_{n+j}, \\ ie'_{n+j} &= ie_j = e'_j \quad (1 \leq j \leq n), \end{aligned}$$

d'où

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbf{Z}).$$

En accord avec les notations de la sec. 2, notons  $V_1$  le sous-espace vectoriel réel (de dimension  $n$ ) engendré par les vecteurs  $e_1, \dots, e_n$ . La forme alternée  $E$  est isotrope sur  $V_1$  et sur  $iV_1$  (invariance par multiplication par  $i$ ). Donc la matrice représentative de  $E$  dans la base  $(e')$  a la forme

$$E: \begin{pmatrix} 0 & -{}^t F \\ F & 0 \end{pmatrix}.$$

En identifiant  $E$  à sa matrice représentative, l'invariance par multiplication par  $i$  se traduit plus précisément par la relation <sup>1)</sup>

$${}^t J E J = E.$$

Effectuant les produits matriciels par blocs, on trouve l'identité

$$\begin{pmatrix} 0 & -F \\ {}^t F & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -{}^t F \\ F & 0 \end{pmatrix}$$

<sup>1)</sup> Identifiant  $u$  et  $v$  à des vecteurs colonnes dans la base  $(e')$ , on écrit  $E(u, v) = {}^t u \cdot E \cdot v$  (produits matriciels lignes par colonnes!).

qui montre que  $F$  doit être *symétrique* et  $E$  est donnée par la matrice

$$E = \begin{pmatrix} 0 & -F \\ F & 0 \end{pmatrix} \text{ antisymétrique } (F \text{ symétrique}).$$

La positivité de  $E$  s'exprime aussi facilement :

$$u \neq 0 \Rightarrow 0 < E(u, iu) = {}^t u E J u$$

d'où  $EJ$  définie positive. Mais la matrice  $EJ$  est simplement  $\begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}$ . Donc

$F$  est symétrique définie positive .

Les formes  $\mathbf{C}$ -linéaires coordonnées de  $V$  dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$  ont été dénotées par  $f_j$ : ce sont les extensions  $\mathbf{C}$ -linéaires des

$$v \mapsto E(v, \lambda_j): V_1 \rightarrow \mathbf{R}.$$

Elles satisfont bien aux relations  $f_j(e_k) = \delta_{jk}$  qui montrent que

$$z = \sum_{j=1}^n f_j(z) e_j: f_j(z) = z_j.$$

Prenant en particulier  $z = \lambda_k$  on va écrire

$$\lambda_k = \sum f_j(\lambda_k) e_j = \sum z_{jk} e_j = \sum (x_{jk} + i y_{jk}) e_j$$

puis

$$\lambda_k = \sum y_{jk} i e_j + \sum x_{jk} e_j$$

qui fournissent les composantes des vecteurs  $\lambda_k$  dans la base  $(e')$ . Posons

$$(z_{jk}) = Z = X + iY = (x_{jk}) + i(y_{jk}).$$

Les composantes des  $\lambda_k$  sont les colonnes de la matrice  $\begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix}$  (matrice  $2n \times n$  réelle). Les relations  $E(e_i, \lambda_j) = \delta_{ij}$  (rappelons que nous supposons  $E$  unimodulaire) peuvent être rassemblées sous la forme matricielle

$$(0 \quad 1_n) E \begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix} = (0 \quad 1_n) \begin{pmatrix} 0 & -F \\ F & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix} = 1_n \in M_n(\mathbf{R}).$$

Effectuons ce produit par blocs

$$F Y = (F \quad 0) \begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix} = 1_n.$$

Cela prouve que la matrice  $Y$  est inversible, d'inverse  $F$ :  $Y^{-1} = F$ .<sup>1)</sup> En particulier,  $Y$  est symétrique. L'isotropie de  $E$  sur l'espace engendré par les vecteurs  $\lambda_k$  s'exprime de façon analogue

$$\begin{aligned} 0 &= ({}^tY \quad {}^tX) E \begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix} = (Y \quad {}^tX) \begin{pmatrix} 0 & -F \\ F & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix} \\ &= ({}^tXF \quad -YF) \begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix} \Rightarrow {}^tXFY = YFX. \end{aligned}$$

Puisque  $FY = YF = 1$ , la relation précédente montre que  $X$  est aussi symétrique. En fait, nous savions déjà que  $Z = X + iY$  est symétrique (lemme de sec. 2 utilisé pour démontrer les équations fonctionnelles de  $\theta$ ). La positivité de  $E$  a fourni  $F \gg 0$  que nous pouvons exprimer de façon équivalente par  $Y = F^{-1} \gg 0$ . En résumé, le choix d'une base symplectique de  $L$  nous a permis de construire une matrice symétrique  $Z \in M_n(\mathbb{C})$  de partie imaginaire définie positive.

*Définition.* On appelle *demi-plan généralisé de Siegel*  $H_n$  l'espace formé des matrices symétriques de  $M_n(\mathbb{C})$  de partie imaginaire définie positive

$$H_n = \{Z \in M_n(\mathbb{C}) : {}^tZ = Z \text{ et } \text{Im}(Z) \gg 0\}.$$

Identifions  $V$  à  $\mathbb{C}^n$  par le choix de base  $e_1, \dots, e_n$ . Le réseau  $L$  apparaît alors comme engendré par  $Z^n$  et les colonnes (ou lignes!) de la matrice  $Z$ . Inversement, montrons comment toute matrice  $Z \in H_n$  fournit un réseau  $L$  (engendré par les vecteurs  $e_1, \dots, e_n$  de la base canonique de  $\mathbb{C}^n$  et les colonnes de  $Z$ ) pour lequel  $\mathbb{C}^n/L$  possède une polarisation principale (donc est une variété abélienne). Il s'agit de trouver une forme hermitienne sur  $\mathbb{C}^n$  dont la partie imaginaire soit unimodulaire sur  $L$ . L'examen du cas trivial  $n = 1$  indique comment procéder : il s'agit de diviser la forme hermitienne canonique  ${}^t\bar{u}v$  par la partie imaginaire de  $z (= Z)$ . Je prétends que la forme hermitienne sur  $\mathbb{C}^n$  donnée par la matrice réelle symétrique  $Y^{-1}$  a les propriétés requises. Cette forme hermitienne est donc donnée (pour des vecteurs colonnes  $u$  et  $v$  de  $\mathbb{C}^n$ ) par

$$H(u, v) = {}^t\bar{u}Y^{-1}v.$$

Puisque  $Y^{-1}$  est symétrique réelle et définie positive,  $H$  est bien un produit scalaire hilbertien et  $E = \text{Im}(H)$  est automatiquement  $\mathbf{R}$ -bilinéaire alternée, invariante par multiplication par  $i$  et positive. Il ne reste qu'à en vérifier

<sup>1)</sup> En dimension finie,  $FY = 1_n \Rightarrow Y$  injective  $\Rightarrow Y$  inversible.

l'intégralité et l'unimodularité. Ecrivons encore  $L = L_1 \oplus L_2$  avec  $L_1 = \mathbf{Z}^n$  et  $L_2$  engendré par les colonnes de  $Z$ . Puisque  $Y$  est une matrice réelle,  $H$  sera réelle sur  $L_1$  et  $E$  nulle sur ce sous-réseau. De même si  $\lambda_k$  désigne la  $k^e$  colonne de  $Z$ , les produits scalaires

$$H(\lambda_j, \lambda_k) = {}^t \bar{\lambda}_j Y^{-1} \lambda_k$$

sont les coefficients matriciels de

$$\begin{aligned} {}^t \bar{Z} Y^{-1} Z &= \bar{Z} Y^{-1} Z = (X - iY) Y^{-1} (X + iY) \\ &= (X - iY) (Y^{-1} X + iI_n) = \text{réel} + i(X - Y Y^{-1} X) = \text{réel}. \end{aligned}$$

Les  $E(\lambda_j, \lambda_k) = 0$  sont des entiers! Finalement, les  $H(e_j, \lambda_k) = {}^t e_j Y^{-1} \lambda_k$  sont les coefficients matriciels de

$$I Y^{-1} Z = Y^{-1} (X + iY) = Y^{-1} X + iI_n,$$

d'où

$$E(e_j, \lambda_k) = {}^t j, k^e \text{ coefficient de } I_n = \delta_{jk}.$$

L'intégralité et l'unimodularité de  $E$  sur  $L$  sont donc prouvées. Plus précisément, la forme alternée  $E$  prend les valeurs normalisées sur les couples de vecteurs de base  $e_j, \lambda_k$  tout comme la forme initiale ayant conduit à la matrice  $Z$ : les deux constructions sont bien inverses l'une de l'autre.

Il ne reste qu'à déterminer quand deux matrices  $Z$  et  $Z' \in H_n$  fournissent des variétés abéliennes principalement polarisées isomorphes. Par là, on entend naturellement que les couples correspondants  $(A, E)$  et  $(A', E')$  sont isomorphes: il existe un isomorphisme analytique  $f: A \rightarrow A'$  qui transporte la forme  $E$  sur  $E'$

$$\begin{aligned} g &= g_f: L \rightarrow L' && (\lambda_1, \lambda_2 \in L) \\ g &: V \rightarrow V' && E'(g\lambda_1, g\lambda_2) = E(\lambda_1, \lambda_2) \\ f &: A \rightarrow A' \end{aligned}$$

Pour trouver cette condition sous la forme usuelle, nous identifierons les éléments de  $\mathbf{C}^n$  à des vecteurs *lignes*. Le réseau  $L$  est engendré par les vecteurs de la base canonique de  $\mathbf{C}^n$  et par les vecteurs lignes de  $Z$  (ibid. pour  $L$ ). La condition d'isomorphie (analytique) des tores complexes  $\mathbf{C}^n/L$  et  $\mathbf{C}^n/L'$  donnée au début de cette section revient à l'existence d'un isomorphisme  $\mathbf{C}$ -linéaire de  $\mathbf{C}^n$  appliquant  $L$  sur  $L'$ . Par notre convention de regarder maintenant les vecteurs de  $\mathbf{C}^n$  comme des lignes, l'action de la matrice représentative de  $g$  est donnée par une multiplication matricielle à droite:  $g(u) = uM_g$ . L'isomorphisme en question s'exprime par

$$L' = L \cdot M_g \quad (M_g \in Gl_n(\mathbf{C})).$$

La base  $(e_i)_{1 \leq i \leq 2n}$  de  $L$  ( $e_{n+k}$  étant la  $k^e$  ligne de  $Z$ ) est envoyée sur une base de  $L'$ :  $(e_i M_g)_{1 \leq i \leq 2n}$  est une base de  $L'$ . Il y a donc une matrice  $\gamma \in Gl_{2n}(\mathbf{Z})$  effectuant le passage entre les deux bases de  $L$

$$e'_j = \sum \gamma_{jk} e_k M_g \quad (e'_j = e_j \text{ pour } j = 1, \dots, n).$$

Ecrivant ces relations linéaires l'une au-dessous de l'autre, on obtient l'identité matricielle

$$\begin{pmatrix} Z' \\ I \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} ZM \\ IM \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ZM \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (AZ+B)M \\ (CZ+D)M \end{pmatrix}$$

( $M = M_g$  et  $\gamma$  désignant la matrice  $(\gamma_{jk})$  écrite dans un ordre convenable! <sup>1)</sup>). On en tire

$$CZ + D \text{ inversible et } (CZ + D)^{-1} = M,$$

puis

$$Z' = (AZ + B)M = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}$$

avec

$$\gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Gl_{2n}(\mathbf{Z}).$$

Lorsque  $\gamma$  est compatible aux polarisations, les deux bases  $(e'_j)$  et  $(e_j M)$  sont symplectiques et  $\gamma$  envoie la seconde dans la première. La matrice de  $E'$  étant  $J$  dans ces deux bases, on doit avoir

$${}^t \gamma J \gamma = J.$$

*Définition.* Le groupe symplectique  $Sp_n$  est le sous-groupe de  $Gl_{2n}$  défini par

$$g \in Sp_n \Leftrightarrow g \in Gl_{2n} \text{ et } {}^t g J g = J.$$

On parlera ainsi du groupe symplectique réel  $Sp_n(\mathbf{R})$ , du groupe symplectique entier  $Sp_n(\mathbf{Z})$ , ... Si  $g$  est une matrice symplectique, on a

$$\det(g)^2 = \det({}^t g J g) = \det(J) = 1,$$

d'où  $\det(g) = \pm 1$ . Plus précisément, utilisant le pfaffien (défini sur les matrices alternées et caractérisé par les conditions

$$\det(E) = Pf(E)^2, Pf(J) = +1, Pf({}^t g E g) = \det(g) Pf(E),$$

<sup>1)</sup> Plus précisément  $(\gamma_{jk}) = \begin{pmatrix} D & C \\ B & A \end{pmatrix}$  et  $\gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ .

on voit que le déterminant d'une matrice symplectique est  $+1$ :

$$Sp_n \subset Sl_{2n}^1).$$

Pour pouvoir formuler proprement la condition d'isomorphie des variétés abéliennes principalement polarisées correspondant aux matrices  $Z$  et  $Z' \in H_n$ , il faut introduire l'action de  $Sp_n(\mathbf{R})$  ou  $Sp_n(\mathbf{Z})$  dans  $H_n$ .

PROPOSITION. Soient  $g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp_n(\mathbf{R})$  et  $Z \in H_n$ . Alors  $CZ + D$  est inversible et

$$g \cdot Z = (AZ + B)(CZ + D)^{-1} \in H_n.$$

De plus,  $(g, Z) \mapsto g \cdot Z$  définit une action continue et propre de  $Sp_n(\mathbf{R})$  dans  $H_n$ .

Pour ne pas interrompre le cours normal de nos déductions, renvoyons la démonstration de cette proposition à la fin de la section.

Le théorème de classification est le suivant.

THÉORÈME. A toute matrice  $Z \in H_n$ , on associe la variété abélienne principalement polarisée  $(A, E)$  définie comme suit:

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \mathbf{C}^n/L \text{ où } L \text{ est le réseau engendré par la base canonique de } \mathbf{C}^n \text{ et les} \\ \text{colonnes (ou lignes) de } Z, \\ E = \text{partie imaginaire de la forme hermitienne } H \text{ donnée par la matrice} \\ \text{(réelle) } Y^{-1} \text{ dans la base canonique } (Y = \text{Im}(Z)). \end{array} \right.$$

Alors, pour toute  $\gamma \in Sp_n(\mathbf{Z})$ , les variétés abéliennes principalement polarisées correspondant à  $Z$  et  $\gamma \cdot Z$  sont isomorphes et l'association

$$Z \mapsto (A, E)$$

définit une bijection

$$Sp_n(\mathbf{Z}) \backslash H_n \simeq \left\{ \begin{array}{l} \text{classes d'isomorphismes de variétés} \\ \text{abéliennes principalement polarisées} \end{array} \right\}.$$

Autrement dit, le réseau  $L$  associé à  $Z \in H_n$  est somme de  $\mathbf{Z}^n$  et de  $\mathbf{Z}\mathbf{Z}^n$  (ou  $\mathbf{Z}^n\mathbf{Z}$  selon qu'on travaille avec des vecteurs lignes ou colonnes!), et

$$E(u, v) = \text{Im}({}^t\bar{u}Y^{-1}v) = \frac{1}{2i} ({}^t\bar{u}Y^{-1}v - {}^t u Y^{-1}\bar{v}).^2)$$

<sup>1)</sup> On montre sans peine que  $Sp_1 = Sl_2$ .

<sup>2)</sup> Il serait plus cohérent de travailler avec des vecteurs lignes  $u$  et  $v$  et donc d'écrire  $E(u, v) = \text{Im}(\bar{u}Y^{-1}v)$ .

On a déjà démontré que si les variétés abéliennes principalement polarisées  $(A, E)$  et  $(A', E')$  correspondant aux matrices  $Z$  et  $Z' \in H_n$  sont isomorphes, il existe  $\gamma \in Sp_n(\mathbf{Z})$  avec  $Z' = \gamma \cdot Z$ . Un instant de réflexion montre que les constructions peuvent être renversées

$$(A, E) \cong (A', E') \Leftrightarrow \exists \gamma \in Sp_n(\mathbf{Z}) : Z' = \gamma \cdot Z.$$

Le théorème est alors complètement démontré.

Revenons à la démonstration de la proposition.

Lorsque  $g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  est symplectique, i.e.  ${}^t g J g = J$ , on doit avoir

$$(*) \quad {}^t AC \text{ et } {}^t BC \text{ symétriques, } {}^t AD - {}^t CB = I (= 1_n). {}^1$$

Pour  $Z \in M_n(\mathbf{C})$  symétrique, on peut calculer

$$(CZ + D)^*(AZ + B) = (\bar{Z}{}^t C + {}^t D)(AZ + B).$$

On trouve

$$\bar{Z}({}^t CA)Z + \bar{Z}({}^t CB) + ({}^t DA)Z + {}^t DB$$

et en utilisant les relations (\*)

$$\bar{Z}({}^t CA)Z + \bar{Z}({}^t CB) + Z + ({}^t BC)Z + {}^t DB.$$

On trouve de même

$$\begin{aligned} & (AZ + B)^*(CZ + D) \\ &= \bar{Z}({}^t AC)Z + \bar{Z} + \bar{Z}({}^t CB) + ({}^t BC)Z + {}^t BD. \end{aligned}$$

Soustrayant terme à terme (et utilisant encore la symétrie donnée par (\*\*))

$$\begin{aligned} & (CZ + D)^*(AZ + B) - (AZ + B)^*(CZ + D) \\ &= Z - \bar{Z} = 2i Y. \end{aligned}$$

Si  $Y \gg 0$ , prenant un vecteur colonne complexe  $u$ ,

$$\begin{aligned} (CZ + D)u = 0 &\Rightarrow {}^t \bar{u}(CZ + D)^* = 0 \\ &\Rightarrow 2i {}^t \bar{u} Y u = 0 \Rightarrow u = 0. \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Donc  $A = I \Rightarrow C$  symétrique;  $D = I \Rightarrow B$  symétrique;  $A$  ou  $D$  nul  $\Rightarrow B$  et  $C$  inversibles;  $B$  ou  $C$  nul  $\Rightarrow A$  et  $D$  inversibles;  $J \in Sp_n(\mathbf{R})$ .

Donc  $Y \gg 0 \Rightarrow CZ + D$  injective  $\Rightarrow CZ + D$  inversible. Pour  $Z \in H_n$ , on peut donc définir

$$g \cdot Z = (AZ + B)(CZ + D)^{-1} \text{ si } g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp_n(\mathbf{R}).$$

Observons encore

$$\begin{aligned} & {}^t(CZ + D)(g \cdot Z - {}^t(g \cdot Z))(CZ + D) \\ &= {}^t(CZ + D)(AZ + B) - {}^t(AZ + B)(CZ + D) \\ &= Z - {}^tZ = 0 \end{aligned}$$

par un calcul analogue à celui qui vient d'être fait. Donc  $g \cdot Z$  est symétrique. Ecrivons  $g \cdot Z = X' + iY'$  et montrons que  $Y'$  est définie positive

$$\begin{aligned} & (CZ + D)^* Y'(CZ + D) \\ &= \frac{1}{2i} (\bar{Z}^t C + {}^t D)(g \cdot Z - (g \cdot Z)^*)(CZ + D) = Y \gg 0. \end{aligned}$$

Donc  $g \cdot Z \in H_n$  et il en résulte immédiatement que  $(g, Z) \mapsto g \cdot Z$  définit une action continue de  $Sp_n(\mathbf{R})$  dans  $H_n$ . Pour voir que cette action est propre, il suffit de vérifier qu'elle est transitive et que le stabilisateur d'un point, disons  $iI \in H_n$  est compact dans  $Sp_n(\mathbf{R})$ . Or les relations (\*) montrent que les familles de matrices de  $Gl_{2n}(\mathbf{R})$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} I & B \\ 0 & I \end{pmatrix} \text{ où } B \text{ est symétrique,} \\ & \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & {}^t A^{-1} \end{pmatrix} \text{ où } A \text{ est inversible,} \end{aligned}$$

sont formées de matrices symplectiques. On a respectivement

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} I & B \\ 0 & I \end{pmatrix} \cdot Z = Z + B, \\ & \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & {}^t A^{-1} \end{pmatrix} \cdot Z = AZ {}^t A. \end{aligned}$$

Ainsi, si  $Z = X + iY \in H_n$  on peut écrire  $Z = iY + X = \begin{pmatrix} I & X \\ 0 & I \end{pmatrix} \cdot iY$  (puisque  $X$  est symétrique, la matrice considérée est bien symplectique) puis

$$Z = \begin{pmatrix} I & X \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & Y^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \cdot iI.$$

L'orbite de  $iI$  est ainsi  $H_n$  tout entier. Le stabilisateur de cette matrice  $iI \in H_n$  est défini par

$$\begin{aligned} iI &= g \cdot iI = (iA + B)(iC + D)^{-1}, \\ i(iC + D) &= iA + B, \\ C &= -B \text{ et } A = D. \end{aligned}$$

Ce calcul montre que le stabilisateur de  $iI \in H_n$  est formé des matrices symplectiques  $\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$ . Les relations (\*) montrent que  ${}^tAA + {}^tBB = I$ : La somme des carrés des coefficients (réels) de  $A$  et de  $B$  vaut ainsi

$$\text{Tr}({}^tAA) + \text{Tr}({}^tBB) = \text{Tr}(I) = n.$$

En particulier, ces coefficients restent bornés dans le sous-groupe  $K$  stabilisateur de  $iI$ :  $K$  est compact. De plus, l'action définie ci-dessus fournit un isomorphisme d'espaces homogènes

$$Sp_n(\mathbf{R})/K \simeq H_n.$$

*Remarque.* Les matrices particulières

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^\vee \end{pmatrix} (A \in Gl_n(\mathbf{R})), \begin{pmatrix} I & B \\ 0 & I \end{pmatrix} (B \in M_n(\mathbf{R}), {}^tB = B) \text{ et } J$$

( $A^\vee = {}^tA^{-1}$ ) engendrent le groupe symplectique  $Sp_n(\mathbf{R})$ . Appelons en effet  $G \subset Sp_n(\mathbf{R})$  le sous-groupe engendré par ces matrices et prenons une matrice symplectique  $g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  arbitraire. Puisque

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P^\vee \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q^\vee \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PAQ & * \\ * & * \end{pmatrix},$$

on peut choisir convenablement  $P$  et  $Q$  pour que  $PAQ$  soit diagonale avec éléments diagonaux égaux à 0 ou 1. On peut donc supposer que  $A$  a déjà cette forme

$$A = \begin{pmatrix} 1_d & 0 \\ 0 & 0_{n-d} \end{pmatrix}.$$

Décomposons similairement  $C$  (blocs de même taille que ceux de  $A$ )

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}.$$

Comme  $g$  est symplectique

$${}^tAC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

doit être symétrique:  $C_{12} = 0$ . Le déterminant de  $g$  est non nul, donc les colonnes de  $g$  sont linéairement indépendantes. En particulier, les colonnes de

$$\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & 0 \\ \vdots & \vdots \\ * & 0 \\ * & C_{22} \end{pmatrix}$$

doivent être linéairement indépendantes:  $\det(C_{22}) \neq 0$ . On peut ainsi choisir le nombre réel  $b$  de façon que le bloc  $A' = A + bC$  de

$$\begin{pmatrix} I & bI \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + bC & B + bD \\ C & D \end{pmatrix}$$

soit non singulier: ce bloc est le bloc supérieur de

$$\begin{pmatrix} A + bC \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_d + bC_{11} & 0 \\ bC & bC_{22} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{11} & 0 \\ C_{12} & C_{22} \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} \det(A') &= \det(1_d + bC_{11}) \det(bC_{22}) \\ &= b^{n-d} \det(C_{22}) \det(1_d + bC_{11}). \end{aligned}$$

On peut donc supposer dès le départ que  $A$  est non singulière et la première réduction permet de supposer que  $A = I = 1_n$  est l'identité. Multiplions alors  $g$  à gauche par

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -C & I \end{pmatrix} = J^{-1} \begin{pmatrix} I & C \\ 0 & I \end{pmatrix} J.$$

On obtient

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -C & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & B' \\ 0 & D' \end{pmatrix} \quad (C = {}^tAC \text{ doit être symétrique}).$$

Les conditions symplectiques (\*) montrent alors immédiatement que  $D' = I$  et  $B'$  symétrique de sorte que  $g \in Sp_n(\mathbf{R})$  appartient au sous-groupe  $G$  engendré par

les matrices particulières. Comme les matrices particulières ont visiblement toutes déterminant unité, cela démontre que  $Sp_n(\mathbf{R}) \subset Sl_{2n}(\mathbf{R})$  sans devoir avoir recours au pfaffien. Observons aussi que les transformations de  $H_n$  produites par les matrices particulières sont respectivement

$$Z \mapsto AZ^t A, Z \mapsto Z + B \text{ et } Z \mapsto -Z^{-1}.$$

S'il est évident a priori que les deux premières familles conservent la positivité de la partie imaginaire  $Y$  de  $Z$ , ce fait peut être vérifié comme suit pour la dernière transformation. Posons donc

$$Z = X + iY = Y^{\frac{1}{2}}(Y^{-\frac{1}{2}}XY^{-\frac{1}{2}} + iI)Y^{\frac{1}{2}}$$

de sorte que

$$-Z^{-1} = -Y^{-\frac{1}{2}}(Y^{-\frac{1}{2}}XY^{-\frac{1}{2}} + iI)^{-1}Y^{-\frac{1}{2}}.$$

Il s'agit de voir que la partie imaginaire de  $-(Y^{-\frac{1}{2}}XY^{-\frac{1}{2}} + iI)^{-1}$  est bien définie positive (la matrice  $S + iI = Y^{-\frac{1}{2}}XY^{-\frac{1}{2}} + iI$  est toujours inversible puisque  $S$  est symétrique réelle, donc n'a pas la valeur propre  $-i \dots$ ). Mais on vérifie sans peine que

$$(S - iI)(S^2 + I)^{-1} = (S^2 + I)^{-1}(S - iI) \text{ est inverse de } S + iI$$

(comme toutes ces matrices commutent entre elles, on peut être tenté de calculer cet inverse avec les règles usuelles des quotients : c'est légitime). Il ne reste plus alors à vérifier que  $(S^2 + I)^{-1} \gg 0$  ce qui est clair!

## BIBLIOGRAPHIE

P. GRIFFITHS, J. HARRIS

[1] *Principles of Algebraic Geometry*. John Wiley 1978 (spécialement sec. 6 et 7 du chapitre 2).

A. GROTHENDIECK

[1] *Sur quelques points d'algèbre homologique*. Tôhoku Math. J., 1957 (chapitre V, p. 195).

D. MUMFORD

[1] *Abelian Varieties*. Tata studies in Math., Oxford University Press 1970.

[2] *Algebraic Geometry I: Complex projective varieties*. Springer-Verlag (Grundlehren... n° 221), 1970.

[3] *Curves and their Jacobians*. Univ. of Michigan Press 1975.

H. P. F. SWINNERTON-DYER

[1] *Analytic theory of Abelian Varieties*. Cambridge, at the University Press 1974.

A. WEIL

[1] *Variétés kählériennes*. Hermann, Paris 1971 (*Act. Sc. et ind. 1267*, nouvelle édition corrigée).

(Reçu le 7 octobre 1981)

Alain Robert

Institut de mathématiques

Chantemerle, 20

CH-2000 Neuchâtel