

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 28 (1982)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** MEILLEURE APPROXIMATION LINÉAIRE ET ESPACES EUCLIDIENS  
**Autor:** Robert, A.  
**Kapitel:** 2. DÉMONSTRATION DE LA DIFFÉRENTIABILITÉ  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-52242>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 09.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

l'étude de certains problèmes variationnels [2]. Birkhoff [1] reprend l'argument de Blaschke pour en déduire un énoncé voisin du théorème B (il fait encore une hypothèse — explicite — d'unicité de plans d'appui, revenant immédiatement à la différentiabilité de la surface  $S$ ). Il utilise un théorème de représentation des groupes (dû à von Neumann) pour parvenir à sa conclusion. Kakutani [9], auquel ce théorème a parfois été attribué ultérieurement, se borne à dire que l'hypothèse de lissité est superflue (se référant à Bonnesen-Fenchel [4] p. 13, il croit pouvoir se dispenser de donner la moindre indication « since this may be easily carried out »!). La première démonstration (relativement) complète de la lissité est donnée par Phillips [10]. Pour pouvoir étendre le théorème A' au cas complexe ( $\dim_{\mathbb{C}} = 3$ ), Bohnenblust [3] introduit des méthodes plus conceptuelles. En particulier, il remplace les arguments de Blaschke et de Birkhoff par l'utilisation du théorème fondamental de la géométrie projective (dans la formulation donnée par E. Cartan). Finalement, Bourbaki [6] formule une suite de problèmes (difficiles) entrelaçant les cas réels (*loc. cit.* p. 142-143) et complexes (p. 144). Il suit en gros la méthode inaugurée par Bohnenblust.

On trouvera aussi une démonstration du théorème B dans le livre de géométrie différentielle de Guggenheimer ([8], p. 310-311 où ce théorème est appelé théorème de Maschke (sic!): par l'intermédiaire de l'utilisation des formules de Serret-Frenet pour certaines courbes tracées sur la surface, il fait implicitement toutes les hypothèses de différentiabilité — jusqu'à l'ordre 3 — requises).

Les références [11] à [15] montrent l'évolution des différentes notions d'orthogonalité (et de géométrie fine) dans les espaces normés de 1945 à 1955.

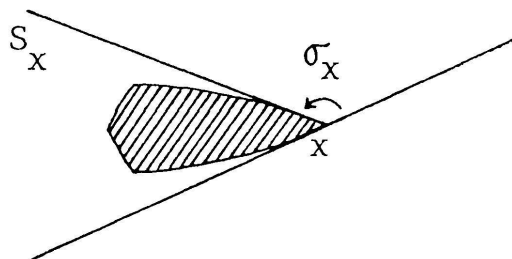
## 2. DÉMONSTRATION DE LA DIFFÉRENTIABILITÉ

Dans cette section, on démontrera l'affirmation suivante. Si  $E$  est un espace normé de dimension 3 possédant (au moins) un projecteur de norme 1 sur chaque plan (homogène), alors la boule unité fermée  $K$  de  $E$  possède un plan tangent en chaque point de sa frontière  $S$  et cette surface est continûment différentiable.

Nous procéderons en plusieurs étapes, commençant par quelques rappels en dimension 2.

*Point 1.* La frontière d'un convexe fermé possédant un point intérieur dans le plan  $\mathbb{R}^2$  est une courbe continue (fermée si ce convexe est borné). Cette courbe possède des demi-tangentes à « gauche » et à « droite » de chaque point. De plus, sauf en un ensemble au plus dénombrable de points appelés *pointes*, cette courbe a une tangente (ses deux demi-tangentes sont en prolongement l'une de l'autre).

Géométriquement, on le voit facilement en attachant à chaque point  $x$  de la frontière du convexe considéré, le *secteur*  $S_x$  intersection de tous les demi-plans contenant le convexe et limités par une droite passant par  $x$  (dite *droite d'appui* en  $x$ ). Le dessin suivant illustre bien la situation.



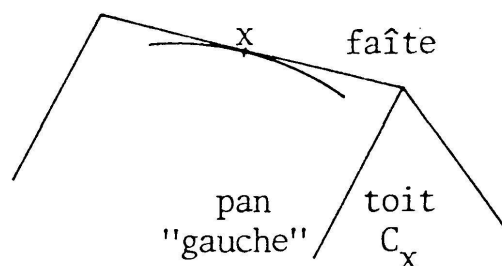
$$\sum \sigma_x \leq 2\pi \Rightarrow \{x : \sigma_x > 0\} \text{ est au plus dénombrable.}$$

Un convexe du plan sans point intérieur est nécessairement linéaire (segment limité ou non, éventuellement réduit à un point). On peut encore définir le secteur  $S_x$  en un point quelconque d'un convexe linéaire fermé. Son angle au sommet sera 0 (point intérieur au segment),  $\pi$  (extrémité du segment) ou  $2\pi$  (segment réduit à un point). Pour toutes les propriétés de différentiabilité des convexes plans, cf. Bourbaki [5] (chap. 1, §4, p. 41-55).

*Point 2.* Il est facile de généraliser les remarques précédentes aux convexes fermés de dimension 3. Soit  $K$  un tel ensemble de  $\mathbf{R}^3$ ,  $S$  sa frontière et  $x$  un point de la surface  $S$ . On appelle *cône d'appui* de  $K$  en  $x$  l'intersection  $C_x = C_x(K)$  des demi-espaces contenant  $K$  et limités par un plan contenant  $x$  (ces plans limites sont donc les *plans d'appui* de  $K$  en  $x$ ). Comme tout demi-espace contenant  $x$  sur son bord est un cône de sommet  $x$ , il en est de même de  $C_x$  et par définition, les plans d'appui en  $x$  de  $K$  et de  $C_x$  sont les mêmes. Soit  $A = K \cap \alpha$  une section plane de  $K$  passant par  $x$  et non réduite à un segment. Alors l'intersection du cône  $C_x(K)$  avec le plan  $\alpha$  est le secteur  $S_x = S_x(A)$ . Ceci est géométriquement clair (nous sommes dans  $\mathbf{R}^3$ ) et peut être déduit formellement du théorème de Hahn-Banach... De façon générale, le cône  $C_x$  étant convexe, trois cas seulement peuvent se présenter.

a)  $C_x$  ne contient aucune droite. On dit alors que ce cône est strict et que  $x$  est une *pointe* de  $K$  (et de  $C_x$ ).

b)  $C_x$  contient une droite passant par  $x$ . Dans ce cas, tous les demi-espaces fermés contenant  $K$  et d'appui en  $x$  doivent contenir cette droite. Ainsi,  $C_x$  est limité par deux demi-espaces extrêmes et est un *toit*. Lorsque ces deux demi-espaces extrêmes sont distincts (i.e. lorsque  $C_x$  ne contient qu'une seule droite passant par  $x$ ), on dit que  $C_x$  est un *toit strict*, avec pour *faîte* la droite unique de  $C_x$  passant par  $x$ , et pour *pans* les deux demi-plans limitant  $C_x$ . Le cas du toit (strict ou non) se présente chaque fois que  $x$  est dérivable sur une courbe de  $K$ .



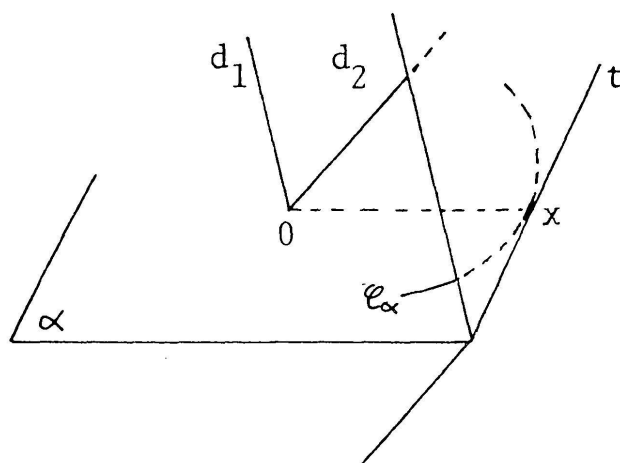
c)  $C_x$  contient deux droites distinctes passant par  $x$ . Dans ce cas de toit plat,  $C_x$  est un demi-espace dont le plan limite est l'unique plan d'appui de  $K$  en  $x$ . (On peut démontrer que ce cas correspond à la différentiabilité de  $x$  sur  $S$ : nous n'aurons pas à utiliser ce fait.)

*Point 3.* Nous aurons aussi à considérer l'ensemble  $\mathfrak{P}$  des projecteurs plans, de norme 1 de  $E$  ( $\dim_{\mathbf{R}} E = 3$ ). Comme il y a une seule topologie (séparée!) compatible à la structure vectorielle sur tout espace de dimension finie, nous pourrions parler sans ambiguïté de continuité, de parties compactes... dans  $\mathcal{L}(E) = \text{Hom}(E, E)$ . L'ensemble des projecteurs de cet espace est fermé : il est défini par  $P^2 = P$  (la composition des applications est continue). Il en est de même de l'ensemble des projecteurs plans qui est caractérisé par la condition supplémentaire  $\text{Tr}(P) = 2$ . Finalement, la partie  $\mathfrak{P}$  définie encore par  $\|P\| = 1$  est compacte. Il est bon de se représenter géométriquement la condition  $\|P\| = 1$  (c'est ainsi que nous l'utiliserons dans la suite) par le fait que  $P$  doit appliquer la boule unité fermée  $K$  de  $E$  dans la boule unité fermée du plan sur lequel il projette :  $P(K) \subset K \cap \text{Im}(P)$ . Autrement dit,  $K$  doit être contenu dans le cylindre de base  $K \cap \text{Im}(P)$  et de génératrices parallèles à  $\text{Ker}(P)$ . L'application  $P \mapsto (\text{Ker}(P), \text{Im}(P))$  (par exemple définie sur l'ensemble des projecteurs plans) est continue. La première composante de l'image varie dans l'espace projectif des droites homogènes de  $E$ , tandis que la deuxième composante varie dans l'espace des plans homogènes de  $E$  (que l'on peut identifier à l'espace projectif des droites homogènes du dual  $E^*$  de  $E$ ).

*Point 4.* a) S'il y a deux projecteurs distincts  $P_i$  de norme 1 sur un même plan (homogène)  $\alpha$ , il y a un cône d'appui  $C_x(K)$  (en un point  $x \in \alpha$ ) qui est un *toit strict*. En effet, appelons  $d_i = \text{Ker } P_i$  (droites supplémentaires à  $\alpha$ ) et choisissons un point dérivable  $x$  de la courbe plane  $\mathfrak{C}_\alpha = S \cap \alpha$  (il y en a puisque l'ensemble des pointes de  $K \cap \alpha$  est au plus dénombrable). On peut même choisir ce point  $x$  de façon que sa tangente  $t$  ne soit pas parallèle au plan engendré par  $d_1$  et  $d_2$  : pour ceci, il suffit d'exclure la direction de tangente donnée par la droite d'intersection du plan engendré par  $d_1$  et  $d_2$  avec  $\alpha$  (l'ensemble des tangentes aux points dérivables de  $\mathfrak{C}_\alpha$  a au moins deux directions distinctes, le cas de deux directions exactement se présentant lorsque  $\mathfrak{C}_\alpha$  est le bord d'un

parallélogramme!). Comme les projecteurs  $P_i$  ont norme 1,  $P_i(K)$  est contenu dans  $K \cap \alpha$  et  $C_x(K)$  est un toit contenu dans le toit strict de faîte  $t$  et de pans parallèles aux droites  $d_i$ .

b) Montrons que lorsqu'un cône d'appui  $C_x(K)$  est un *toit strict*, il y a un plan homogène  $\beta$  passant par  $x$  sur lequel il est impossible de projeter avec norme 1. Tout plan  $\beta \neq \alpha$  contenant  $0x$  doit couper le toit strict  $C_x(K)$  selon un secteur d'angle  $< \pi$  :  $x$  est pointe de toutes ces sections planes  $\mathbb{C}_\beta$ . Mais lorsqu'un



projecteur  $Q$  de rang 2 n'applique pas le faîte  $t$  sur un seul point,  $Q(t)$  est tangente à  $Q(\mathbb{C}_\alpha)$  (dans  $\beta = \text{Im } Q$ ). Si de plus  $\|Q\| = 1$ ,  $x$  n'est pas pointe de  $K \cap \beta \supset Q(\mathbb{C}_\alpha)$ . Donc dans notre cas, les  $P \in \mathfrak{P}$  ayant une image  $\beta \neq \alpha$ ,  $\beta \supset 0x$  devraient avoir même noyau (parallèle à  $t$ ) : cela est contraire à la compacité de la partie de  $\mathfrak{P}$  formée des projecteurs d'image contenant  $0x$ .

Au total, nos hypothèses impliquent donc qu'il y a *un seul* projecteur de norme 1 sur chaque plan (homogène)  $\alpha$ .

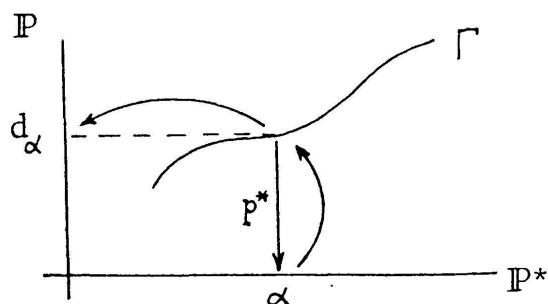
*Point 5.* Pour tout plan  $\alpha$ , dénotons par  $P_\alpha \in \mathfrak{P}$  le projecteur de norme 1 sur  $\alpha$  et par  $d_\alpha = \text{Ker}(P_\alpha)$  sa direction de projection. Le graphe  $\Gamma$  de l'application  $\alpha \mapsto d_\alpha$  est la partie de  $\mathbf{P}^* \times \mathbf{P}$  formée des couples  $(\alpha, d_\alpha)$ , donc est l'image de  $\mathfrak{P}$  par l'application continue

$$\phi : P \mapsto (\text{Im}(P), \text{Ker}(P)).$$

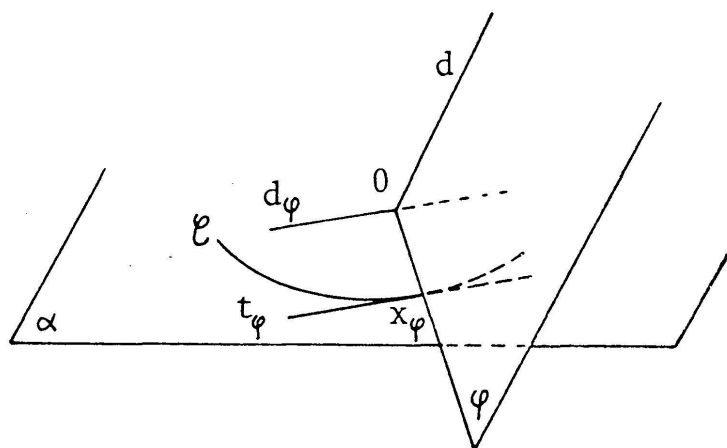
Ce graphe  $\Gamma = \phi(\mathfrak{P})$  est donc compact et il en résulte que

$$\alpha \mapsto d_\alpha \text{ est continue.}$$

En effet, la restriction  $p^*$  au graphe  $\Gamma$  de la première projection du produit  $\mathbf{P}^* \times \mathbf{P}$  est continue et bijective, donc un homéomorphisme et  $\alpha \mapsto d_\alpha$  est composé de l'homéomorphisme inverse avec la deuxième projection du produit.



*Point 6.* Montrons maintenant que toutes les sections planes (homogènes) de  $S$  sont des courbes continûment dérivables. Fixons donc le plan homogène fournissant la section plane  $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_\alpha$  et appelons  $d = d_\alpha$  la direction du projecteur  $P = P_\alpha$  de norme 1 sur  $\alpha$ . Introduisons des coordonnées polaires d'angle  $\varphi$  en 0 dans  $\alpha$ , de façon à paramétrer les points de  $\mathfrak{C}$  par cet angle. Un point  $x_\varphi \in \mathfrak{C}$  définit naturellement un plan (encore noté  $\varphi$  par abus!) contenant  $d$  et tel que  $\mathfrak{C} \cap \varphi = \pm x_\varphi$ .



Le projecteur  $P_\varphi$  de norme 1 sur  $\varphi$  a un noyau  $d_\varphi$  supplémentaire de  $\varphi$  donc distinct de  $d \subset \varphi$  :  $P(d_\varphi)$  n'est jamais réduit à un point. De plus, nous avons montré (point 5) que  $d_\varphi$  est continu en  $\varphi$  d'où aussi

$$\varphi \mapsto d_\varphi \mapsto P(d_\varphi) \text{ continu.}$$

La famille de droites  $\varphi \mapsto P(d_\varphi)$  fournit ainsi un champ continu de droites sur  $\mathfrak{C}$

$$\varphi \mapsto x_\varphi + P(d_\varphi).$$

Je prétends qu'en tous les points  $x_\varphi$  dérivables sur  $\mathfrak{C}$ ,  $x_\varphi + P(d_\varphi) = t_\varphi$  est la tangente à  $\mathfrak{C}$  en  $x_\varphi$ . Supposons donc  $x_\varphi$  dérivable sur  $\mathfrak{C}$ . D'après le point 2,  $C_{x_\varphi}(K)$  est un toit. Mieux, d'après le point 4 b), ce toit doit être plat et  $x_\varphi$  est dérivable sur  $K$  (i.e. sur  $S$ ). Le plan homogène parallèle au plan tangent à  $S$  en  $x_\varphi$  doit contenir les deux droites  $d$  et  $d_\varphi$ , donc être engendré par elles. En particulier,  $P(d_\varphi)$

(qui appartient à ce plan homogène) doit être parallèle à la tangente à  $\mathbb{C}$  en  $x_\varphi$ . Le champ continu de droites

$$\varphi \mapsto x_\varphi + P(d_\varphi)$$

est défini sur toute la courbe  $\mathbb{C}$  et fournit la tangente  $t_\varphi$  à  $\mathbb{C}$  en  $x_\varphi$  chaque fois que ce point est dérivable sur  $\mathbb{C}$ , c'est-à-dire sauf en un ensemble au plus dénombrable de points. Il ne reste plus qu'à démontrer le lemme suivant (formulé avec des notations légèrement différents et plus usuelles).

LEMME. Soient  $I$  un intervalle (d'intérieur non vide dans  $\mathbf{R}$ ) et  $f$  une fonction continue  $I \rightarrow \mathbf{R}$ . Supposons  $f$  dérivable en tous les points de  $I - D$  où  $D$  est une partie au plus dénombrable de  $I$ . S'il existe une fonction continue  $g: I \rightarrow \mathbf{R}$  telle que  $g(x) = f'(x)$  en tout  $x \in I - D$ , alors  $f$  est continûment dérivable sur tout  $I$  et  $f' = g$ .

La démonstration de ce lemme est facile! Appelons  $h$  la primitive de  $g$  nulle en  $x = a$

$$h(x) = \int_a^x g(t) dt.$$

Par définition  $h$  est continûment dérivable avec  $h' = g$ . Par hypothèse,  $f - h$  est dérivable en tout  $x \in I - D$  et de dérivée nulle en ces points. Comme cette fonction  $f - h$  est continue, le théorème des accroissements finis montre qu'elle est constante:  $f = h + c$  est continûment dérivable et  $f' = h' = g$ .

### 3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME A (CAS DIFFÉRENTIABLE)

Nous avons vu (point 4, sec. 2) que sous les hypothèses du théorème A, il y a un unique projecteur  $P_\alpha$  de norme 1 sur chaque plan homogène  $\alpha$ . Montrons maintenant que

$$\alpha \mapsto \text{Ker}(P_\alpha) = d_\alpha$$

est *injective*: à deux plans (homogènes) distincts correspondent des directions de projection de norme 1 *distinctes*. En effet, prenons deux plans homogènes  $\alpha \neq \beta$ . Si les projecteurs  $P_\alpha$  et  $P_\beta$  avaient même noyau  $d$ , la surface  $S = \text{Fr}(K)$  contiendrait une portion de cylindre de génératrices parallèles à  $d$ , limitée par  $\alpha$  et  $\beta$ . Considérons alors une section *intermédiaire*  $\mathbb{C}_\gamma = S \cap \gamma$  ( $\gamma$  est un plan homogène contenant la droite  $\alpha \cap \beta$  et situé entre  $\alpha$  et  $\beta$  relativement à  $d$ ). D'après le théorème de Krein-Milman, on peut choisir un point  $x$  de  $\mathbb{C}_\gamma$  extrême sur  $K \cap \gamma$  et non situé sur la droite  $\alpha \cap \beta$  (il pourrait arriver que les seuls points ayant les propriétés indiquées soient  $x$  et  $-x$ : ce cas se présenterait si  $K \cap \gamma$  était