5) Beweis des Satzes

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **28 (1982)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

5) Beweis des Satzes

Wir haben noch zu zeigen, daß A in K interpretierbar ist. Wegen (7), genügt es zu zeigen, daß F in K definierbar ist. Wir unterscheiden drei Fälle:

$$L = L_p, \mathbf{C} \text{ oder } q \neq 2 \text{ und } L = \mathbf{R}\,.$$

Dann ist $K \subset L^p$ und wir haben nach (6)

$$F = \{a \in K \mid \forall\, b \in K (1 + b \in K^q \,\&\, a_q + b^{-1} \in K^q) \Rightarrow b \in K^q\}$$

$L = \mathbf{R}, q = 2\,.$

Dann ist $F^* \cdot K^q = K^q \cup -K^q$. Und wir haben mit (6′)

$$F = \{a \in K \mid \forall\, b \in K (1 + b \in K^q \,\&\, a^q + b^{-1} \in K^q) \Rightarrow b \in K^q \cup -K^q\}$$

$L = \mathbf{Q}_p\,.$

Wir erhalten aus (6) eine Definition von F, wenn wir $K \cap L^q$ in K definieren können. Weil aber $\mathbf{Q}$ dicht in $\mathbf{Q}_p$ ist, ist nach Hensels Lemma

$$c \in L^q \text{ gdw. es gibt } d \in K \text{ (oder: } \mathbf{Q}) \text{ mit } w(c - d^{\varphi}) \geqslant w(c) + 3\,.$$

Es genügt also die p-adische Bewertung w in K elementar zu beschreiben: Wenn r relativ prim zu p ist, ist für alle $c \in L$

$$w(c) \geqslant o \quad \text{gdw.} \quad 1 + pc^r \in L^r\,.$$

Wenn r eine von q und p verschiedene Primzahl ist, gewinnen wir daraus mit (2) für alle $c \in K$

$$w(c) \geqslant o \quad \text{gdw.} \quad 1 + pc^r \in K^r\,.$$

LITERATUR

[AK] Ax, Kochen. Diophantine problems over local fields, I, II, III. *Amer. J. of Math. 87, 88* (1965, 1966).

[C] Cherlin, G. *Mathematical reviews 50* (1975), 9567. (Resprechung von H1).

[CK] Chang-Keisler. *Model Theory*. Alsterdam (1973).

[E] Ersov, Ju. L. Fields with a solvable theory. *Doklady Akademii Nauk SSSR 174* (1967), 19-20, (englische Übersetzung: *Soviet math. 8* (1967), 575-576.

[F] Ficht, H. *Zur Theorie der pythagoräischen Körper*. Diplomarbeit, Konstanz (1979).