Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 28 (1982)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: EINIGE UNENTSCHEIDBARE KÖRPERTHEORIEN
Autor: Ziegler, Martin
Kapitel: 3) KONSTRUKTION VON K
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-52241

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

3) Konstruktion von K

$t \in L$ sei transzendent über F.

Wir wollen $K \subset L$ als algebraische Erweiterung von $F(t)$ so konstruieren, daß neben (2)

$$F = \{a \in K \mid \forall\, b \in L^q (1 + b \in K^q \,\&\, a^q + b^{-1} \in K^q) \to b \in K^q\}$$

und

$$M = \{r \in F \mid \forall\, r_1,\ r_2 \in F (r_1 \neq r_2 \,\&\, r_1 + r_2 = r \Rightarrow (t^q - r_1 \in F^* \cdot K^q \text{ oder } t^q - r_2 \in F^* \cdot K^q))\}$$

$(F^* = F \setminus \{o\})$

K gewinnen wir als Vereinigung einer Folge

$$F(t) = E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset L$$

von endlichen Erweiterungen von $F(t)$. Um die q-ten Potenzen zu kontrollieren, wählen wir gleichzeitig eine Folge

$$\phi = S_0 \subset S_1 \subset S_2 \ldots$$

von endlichen Teilmengen $S_i \subset E_i \cap L^q$ mit dem Ziel, daß

$$(K \cap L^q) \setminus K^q = (\bigcup_{i \in \mathbf{N}} S_i)$$

Um die gewünschten Darstellungen von M und $(K \cap L^q) \setminus K^q$ nicht schon durch falsche Wahl von (E_i, S_i) unmöglich zu machen, fordern wir für alle i

(4) Es gibt eine Familie $(v_s)_{s \in S_i}$ von Bewertungen $v_s : E_i \to G_{v_s}$, v_s trivial auf F, mit:

(4.1) (in G_{v_s}) ist $v_s(s)$ nicht durch q teilbar, $(s \in S_i)$

(4.2) für alle $r_1,\ r_2 \in F$, $r_1 + r_2 \in M$, $r_1 \neq r_2$:

$\forall s \in S_i \quad q$ teilt $v_s(t^q - r_1)$

oder

$\forall s \in S_i \quad q$ teilt $v_s(t^q - r_2)$

Wir beginnen mit einer Aufzählung $a_0, a_1, \ldots$ aller $a \in L$, die algebraisch über $F(t)$ sind. Jedes Element der Folge soll unendlich oft vorkommen.

Sei (E_i, S_i) schon konstruiert. Wir unterscheiden vier Fälle:

$i = 4n$. Es gibt zwei Fälle

a) q teilt $[E_i(a_n): E_i]$. Wir setzen dann $(E_{i+1}, S_{i+1}) = (E_i, S_i)$

b) q teilt $[E_i(a_n): E_i]$ nicht. Dann setzen wir

$$(E_{i+1}, S_{i+1}) = (E_i(a_n), S_i).$$

Zum Nachweis von (4) verwenden wir

LEMMA 1. H_2 sei eine endliche Erweiterung des Körpers H_1, $q \nmid [H_2: H_1]$ $v_1: H_1 \to G_{v_1}$ sei eine diskrete Bewertung. Dann gibt es auf H_2 eine Fortsetzung v_2 von v_1 mit $q \nmid (G_{v_2}: G_{v_1})$.

Beweis: Wir können annehmen, daß H_2 separabel oder rein inseparabel über H_1 ist. Im separablen Fall gilt

$$[H_2: H_1] = \sum_i (G_{v_2^i}: G_{v_1}) f_i$$

wobei die v_2^i alle Fortsetzungen von v_1 auf H_2 durchlaufen und f_i der Grad der jeweiligen Restklassenkörpererweiterung ist. q kann also nicht alle $(G_{v_2^i}: G_{v_1})$ teilen.
Wenn H_2 rein inseparabel über H_1 ist, gibt es genau eine Fortsetzung v_2. $(G_{v_2}: G_{v_1})$ ist eine p-Potenz, $p \neq q$.

Wenn nun die $v_s: E_i \to G_{v_s}$, $s \in S_i$, (4.1) und (4.2) erfüllen, wählen wir Fortsetzungen $\bar{v}_s: E_{i+1} \to G_{\bar{v}_s}$ mit $q \nmid (G_{\bar{v}_s}: G_{v_s})$. Die $\bar{v}_s$, $s \in S_i$ erfüllen wieder (4.1) und (4.2).

$i = 4n+1$. Es gibt drei Fälle

a) $a_n \notin E_i$ oder $a_n \notin L^q$. Wir setzen dann $(E_{i+1}, S_{i+1}) = (E_i, S_i)$.
Wenn $a_n \in E_i \cap L^q$, wählen wir $v_s: E_i \to G_{v_s}$, $s \in S_i$ mit (4).

b) Es gibt ein $s \in S_i$, für das q nicht $v_s(a_n)$ teilt. Setze in diesem Fall

$$(E_{i+1}, S_{i+1}) = (E_i, S_i \cup \{a_n\}).$$

(4) gilt, wenn wir v_s für v_{a_n} nehmen.

c) q teilt alle $v_s(a_n)$, $s \in S_i$. Wir setzen

$$(E_{i+1}, S_{i+1}) = (E_i(\sqrt[q]{a_n}), S_i), \text{ wobei } \sqrt[q]{a_n} \in E_i, \text{ falls } a_n \in E_i^q$$

Daß (4) gilt, folgt aus

LEMMA 2. q sei verschieden von der Charakteristik des Restklassenkörpers des bewerteten Körpers (H, v); es sei $a \in H \setminus H^q$ und $v(a)$ durch q teilbar. Dann gibt es eine Fortsetzung w von v auf $H(\sqrt[q]{a})$ mit $G_v = G_w$.

Beweis: Zunächst bemerken wir, daß $q = [H(\sqrt[q]{a}) : H]$. Es gibt ein $c \in H$ mit $v(c^q) = v(a)$. Wenn die Restklasse von $c^q a^{-1}$ im Restklassenkörper keine q-Potenz ist, ist $G_w = G_v$ für alle Fortsetzungen w von v (Gradungleichung). Sonst liegt die q-te Wurzel von $c^q a^{-1}$ in der henselschen Hülle von (H, v). Wir gewinnen w durch Einbettung von $H(\sqrt[q]{a})$ in die henselsche Hülle.

$i = 4n+2$. Es gibt zwei Fälle

a) $a_n \notin E_i$ oder $a_n \in F$. Wir setzen $(E_{i+1}, S_{i+1}) = (E_i, S_i)$

b) $a_n \in E_i \setminus F$.

Es gibt dann eine auf F triviale Bewertung v von E_i, für die $v(a_n)$ negativ ist. (4) möge von $(v_s)_{s \in S_i}$ erfüllt sein. Zuerst erweitern wir E_i zu einem Körper E, für den (4.2) für $v, v_s, (s \in S_i)$ gilt:
Wenn (4.2) schon in E_i für $v, v_s, (s \in S_i)$ gilt, bleiben wir bei $E = E_i$. Sonst muß es ein $r \in F$ geben mit

$$q \text{ teilt nicht } v(t^q - r)$$
$$\forall\, s \in S_i \; q \text{ teilt } v_s(t^q - r).$$

(Man beachte: Es gibt höchstens ein $r \in F$, für das q $v(t^q - r)$ nicht teilt.) Wir brauchen noch

LEMMA 3. $L = L^q \cdot F$

Beweis: Sei $a \in L$. Wir suchen ein $b \in F^*$ mit $ab^{-1} \in L^\varphi$. Wenn L algebraisch- oder reell abgeschlossen ist, finden wir $b \in \{1, -1\}$. Im Fall $L = \mathbf{Q}_p$ bemerken wir, daß c in $\mathbf{Q}_p$ eine q-te Potenz ist, wenn $w(c - d^q) \geqslant w(c) + 3$ (Hensels Lemma, w ist die p-adische Bewertung von $\mathbf{Q}_p$). Wir wählen also $b \in F$ so, daß $w(a-b) \geqslant w(a) + 3$. Dann ist $w(ab^{-1} - 1) \geqslant w(ab^{-1}) + 3$.

Das Lemma liefert nun ein $d \in F^*$ mit $d(t^q - r) \in L^q$. Wir setzen $E = E_i(\sqrt[q]{d(t^q - r)})$. $\bar{v}$ sei irgendeine Fortsetzung von v auf E, die Fortsetzungen $\bar{v}_s$ der v_s seien nach Lemma 2 gewählt. (E, S_i) erfüllt also (4) und (4.2) gilt sogar für $\bar{v}, \bar{v}_s, (s \in S_i)$.

Schließlich bestimmen wir ein $b \in E$ mit

$$b,\ 1+b,\ a_n^q + b^{-1} \in L^q$$
$$c \text{ teilt } \bar{v}(1+b),\ \bar{v}(a_n^q+b^{-1}),\ \bar{v}_s(1+b),\ \bar{v}_s(a_n^q+b^{-1}),\ (s \in S_i)$$
$$\bar{v}(b) \text{ ist das kleinste positive Element von } G_{\bar{v}},$$

und setzen

$$(E_{i+1}, S_{i+1}) = \left(E\left({}^q\sqrt{1+b}, {}^q\sqrt{a_n^q+b^{-1}}\right), S_i \cup \{b\}\right).$$

Wenn wir $\bar{v}$, $\bar{v}_s$ nach Lemma 2 fortsetzen, sehen wir, daß (4) gilt. ((4.2) ist wegen der Wahl von E erfüllt.)

Es bleibt noch b zu finden.

Die Bewertungen $\bar{v}, \bar{v}_s$ sind unabhängig. Der Approximationssatz liefert uns also ein $b \in E$ mit

$$q \textit{ teilt } \bar{v}_s(b)\ ,\ \bar{v}_s(b) < o,\ -\bar{v}_s(a_n^q);\ (s \in S_i, \bar{v} \neq \bar{v}_s)$$
$$\bar{v}(b) = \text{kleinstes positives Element von } G_{\bar{v}}\,.$$

Man rechnet jetzt leicht nach, daß alle Werte $\bar{v}(1+b)$, $\bar{v}(a_n^q+b^{-1})$, $\bar{v}_s(1+b)$, $\bar{v}_s(a_n^q+b^{-1})$ durch q teilbar sind. Wenn $L = L_p$, $\mathbf{C}$ oder $q \neq 2$ und $L = \mathbf{R}$ ist auch klar, daß b, $1+b$, $a_n^q+b^{-1} \in L^q$. In den anderen Fällen müssen wir b noch genauer bestimmen:

$L = \mathbf{R}$, $q = 2$: Wir wählen b so, daß zusätzlich $b > 0$.

$L = \mathbf{Q}_p$: w sei die p-adische Bewertung von L, $d \in \mathbf{Q}^q$ mit $w(d) \geqslant 3$ und $w(a_n^q d) \geqslant 3$. Mit dem Approximationssatz wählen wir nun b so, daß zusätzlich $w(d-b) \geqslant w(d) + 3$. Dann ist.

$$w(b-d) \geqslant w(b) + 3 \Rightarrow b \in L^q,$$
$$w\big((1+b)-1\big) = w(d) \geqslant 3 \Rightarrow 1 + b \in L^q,$$
$$w\big((a_n^q+b^{-1})-b^{-1}\big) \geqslant w(b^{-1}) + 3 = w(a_n^q+b^{-1}) + 3$$
$$\Rightarrow a_n^q + b^{-1} \in L^q.$$

$i = 4n+3$. Wir unterscheiden zwei Fälle

a) $a_n \in M$ oder $a_n \notin F$. Hier setzen wir $(E_{i+1}, S_{i+1}) = (E_i, S_i)$

b) $a_n \in F \setminus M$.

(4) sei durch $(v_s)_{s \in S_i}$ erfüllt. Wir beachten, daß

$$B = \{r \in F \mid \exists\, s \in S_i \quad q \text{ teilt nicht } v_s(t^q - r)\}$$

endlich ist.

Für $r \in F^*$ hat $t^q - r$ keine mehrfachen Faktoren (in $F[t]$). Es gibt also eine auf F triviale Bewertung $\bar{v}_r$ von $F(t)$, für die $\bar{v}_r(t^q - r)$ das kleinste positive Element von $G_{\bar{v}_r}$ ist. Wir wählen für jedes r eine Fortsetzung w_r von $\bar{v}_r$ auf E_i. Dann ist $G_{\bar{v}_r} = G_{w_r}$ für fast alle r. Die Menge

$$C = \{r \in F^* \mid q \text{ teilt } w_r(t^q - r)\}$$

ist also endlich. Wir bemerken noch, daß $w_r(t^q - r') = 0$, wenn $r \neq r'$.
Wir wählen jetzt $r_1 \in F$ so, daß $r_1 \neq 0$, a_n, $2r_1 \neq a_n$ und r_1 in keiner der Mengen

$$C,\ a_n - C,\ M - B,\ a_n - (M - B)$$

liegt. Es sei $r_2 = a_n - r_1$. Lemma 3 liefert uns $s_i \in F^*$ mit $s_i(t^q - r_i) \in L^q$. Wir setzen

$$(E_{i+1}, S_{i+1}) = (E_i, S_i \cup \{s_1(t^q - r_1), s_2(t^q - r_2)\}).$$

Es muß noch (4) gezeigt werden.
Weil q $w_{r_1}(t^q - r_1)$ und $w_{r_2}(t^q - r_2)$ nicht teilt, gilt zunächst (4.1) für die Bewertungen w_{r_1}, w_{r_2}, v_s, $(s \in S_i)$. Um (4.2) zu zeigen, seien $\bar{r}_1 \neq \bar{r}_2 \in F$, $\bar{r}_1 + \bar{r}_2 \in M$ gegeben. Es ist dann z.B. für alle $s \in S_i$ $v_s(t^q - \bar{r}_1)$ durch q teilbar. Wenn auch $w_{r_1}(t^q - \bar{r}_1)$ und $w_{r_2}(t^q - \bar{r}_1)$ durch q teilbar sind, sind wir fertig. Sei also z.B. $w_{r_1}(t^q - \bar{r}_1)$ nicht q-teilbar. Dann ist $r_1 = \bar{r}_1$, $r_i \neq \bar{r}_2$ und $\bar{r}_2 \in M - r_1$. Folglich ist $w_{r_i}(t^q - \bar{r}_2) = 0$, und alle $v_s(t^q - \bar{r}_2)$, $(s \in S_i)$, sind durch q teilbar.
Damit ist die Konstruktion von K abgeschlossen.

4) Die Eigenschaften von K

Wir zeigen in diesem Abschnitt (2) und

(5) $(K \cap L^q) \setminus K^q = (\bigcup_{i \in \mathbf{N}} S_i)$

(5′). $K \setminus F^* \cdot K^q = F^* \cdot (\bigcup_{i \in \mathbf{N}} S_i)$

(6) $F = \{a \in K \mid \forall\, b \in L^q \quad (1 + b \in K^q \,\&\, a^q + b^{-1} \in K^q) \Rightarrow b \in K^q\}$

(6′) $F = \{a \in K \mid \forall\, b \in K \quad (1 + b \in K^q \,\&\, a^q + b^{-1} \in K^q) \Rightarrow b \in F^* \cdot K^q\}$

(7) $M = \{r \in F \mid \forall\, r_1, r_2 \in F\ (r_1 \neq r_2 \,\&\, r_1 + r_2 = r) \Rightarrow (t^q - r_1 \in F^* \cdot K^q$
oder $t^q - r_2 \in F^* \cdot K^q)\}$