

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 27 (1981)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** THE RIEMANN-ROCH THEOREM FOR COMPACT RIEMANN SURFACES  
**Autor:** Simha, R. R.

**Bibliographie**  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-51747>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 10.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

we need only show that, if  $\sigma \in H^0(X, \mathcal{L})$  is such that  $\zeta(\sigma \otimes \gamma) = 0$  for all  $\gamma \in H^1(X, K \otimes \mathcal{L}^{-1})$ , then  $\sigma \equiv 0$ . Now choose any  $P \in X$ , and a coordinate neighbourhood  $(U, z)$  of  $P$  centred at  $P$  such that  $\mathcal{L}|_U \approx \mathcal{O}_U$ . Then the covering  $\mathfrak{U} = \{U, X - P\}$  is a Leray covering for  $\mathcal{L}, K$  and  $K \otimes \mathcal{L}^{-1}$  ((3.7)). The  $z^n dz, n \in \mathbf{Z}$ , can all be regarded as elements of  $Z^1(\mathfrak{U}, K \otimes \mathcal{L}^{-1})$ ; let  $\gamma_n$  denote their images in  $H^1(X, K \otimes \mathcal{L}^{-1})$ . Then clearly  $\rho(\sigma \otimes \gamma_n) = 0$  for all  $n$  implies that all the coefficients of the Taylor expansion of  $\sigma$  at  $P$  with respect to vanish, hence  $\sigma \equiv 0$ , q.e.d.

(5.9) SERRE DUALITY FOR VECTOR BUNDLES. *For any vector bundle  $\mathcal{V}$  on  $X$ , let  $\mathcal{V}^* = \text{Hom } \mathcal{O}_X(\mathcal{V}, \mathcal{O}_X)$ . Then the natural pairing*

$$\zeta : H^0(X, \mathcal{V}) \times H^1(X, K \otimes \mathcal{V}^*) \rightarrow H^1(X, K) \xrightarrow{\text{res}} \mathbf{C}$$

*is non-degenerate.*

*Proof:* Arguing as in the proof of (5.8) we see that the map  $H^0(X, \mathcal{V}) \rightarrow (H^1(X, K \otimes \mathcal{V}^*))^*$  induced by  $\zeta$  is injective, hence  $h^0(X, \mathcal{V}) \leq h^1(X, K \otimes \mathcal{V}^*)$ . Replacing  $\mathcal{V}$  by  $K \otimes \mathcal{V}^*$ , we also get  $h^0(K \otimes \mathcal{V}^*) \leq h^1(\mathcal{V})$ . But, by induction on rank  $\mathcal{V}$ , we easily deduce from (5.3) that  $\chi(K \otimes \mathcal{V}^*) = -\chi(\mathcal{V})$ , hence  $h^0(X, \mathcal{V}) = h^1(X, K \otimes \mathcal{V}^*)$ . Thus  $\zeta$  is non-degenerate as before.

#### REFERENCES

- [1] GRAUERT, H. and R. REMMERT. *Theory of Stein Spaces*. Springer-Verlag, 1979.
- [2] GUNNING, R. C. *Lectures on Riemann surfaces*. Princeton University Press.
- [3] GUNNING, R. C. and H. ROSSI. *Analytic Functions of Several Complex Variables*. Prentice Hall, 1965.
- [4] MUMFORD, D. *Algebraic Geometry I: Complex Projective Varieties*. Springer-Verlag, 1976.
- [5] SERRE, J.-P. *Groupes Algébriques et Corps de Classes*. Hermann, 1959.

(Reçu le 10 juillet 1980)

R. R. Simha

School of Mathematics  
Tata Institute of Fundamental Research  
Bombay 400 005  
India