

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 27 (1981)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: HOMÉOMORPHIE DES ROTATIONS DE S^m ÉVOLUTION D'UN PROBLÈME, SOUVENIRS
Autor: de Rham, Georges
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-51746>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 17.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

HOMÉOMORPHIE DES ROTATIONS DE S^m

ÉVOLUTION D'UN PROBLÈME, SOUVENIRS

par Georges DE RHAM

Une rotation T de la sphère $S^m \subset \mathbf{R}^{m+1}$ est définie par une matrice orthogonale qui a $m+1$ racines caractéristiques (ou valeurs propres) α_j ($j = 0, 1, \dots, m$) de module 1, deux-à-deux imaginaires conjuguées ou égales à ± 1 . En introduisant dans \mathbf{R}^{m+1} des coordonnées convenables z_j ($j = 0, 1, \dots, m$), réelles ou deux-à-deux imaginaires conjuguées, les équations de la rotation T se ramènent à la forme

$$(1) \quad z'_j = \alpha_j z_j \quad (j = 0, 1, \dots, m),$$

où $(z'_0, z'_1, \dots, z'_m) = T(z_0, z_1, \dots, z_m)$.

Deux rotations T et T' de S^m sont dites *homéomorphes* s'il existe un homéomorphisme $H: S^m \rightarrow S^m$ tel que $T' = H^{-1}TH$. On sait que si T et T' ont les mêmes racines caractéristiques, il existe une isométrie H (transformation orthogonale) satisfaisant à cette relation; T et T' sont alors dites *isométriques*. Pour que deux rotations de S^m soient homéomorphes, il est donc *suffisant* qu'elles aient les mêmes racines caractéristiques.

Cette condition est-elle aussi nécessaire ?

C'est l'étude des espaces lenticulaires qui m'a conduit à ce problème; leur classification topologique en est un cas particulier. En 1935, à la Conférence internationale de Topologie à Moscou, j'ai dit: « Il semble que cette condition soit aussi nécessaire, mais ce n'est pas prouvé dans tous les cas » [Rh 3].

Le théorème suivant montre que cette condition est nécessaire dans beaucoup de cas [Rh 7].

I. Si deux rotations de S^m sont homéomorphes, elles ont les mêmes racines caractéristiques qui ne sont pas des racines de l'unité, et pour chaque entier $h > 0$, le même nombre de racines caractéristiques qui sont des racines primitives d'ordre h de l'unité.

La démonstration est fort simple. Soit α un nombre de module 1 et Γ le groupe engendré par α . D'après un lemme établi dans [Rh 7], les nombres β de module 1, jouissant de la propriété que $\beta^{n_k} \rightarrow 1$ pour toute suite d'entiers n_k ($k = 1, 2, \dots$) telle que $\alpha^{n_k} \rightarrow 1$, appartiennent à Γ . On en déduit que, T étant la rotation définie par (1), les points $z \in \mathbf{R}^{n+1}$ tels que $T^{n_k}(z) \rightarrow z$ pour toutes ces suites n_k ($k = 1, 2, \dots$) sont ceux dont les coordonnées z_j associées dans (1) à un α_j n'appartenant pas à Γ sont nulles, car sous l'effet de T^{n_k} , z_j est changé en $\alpha_j^{n_k} z_j$. Ces points forment par suite un sous-espace de \mathbf{R}^{m+1} dont la dimension est égale au nombre des α_j appartenant à Γ . Soit $\mu(\Gamma)$ ce nombre et, pour tout sous-groupe Γ' de Γ , $\mu(\Gamma')$ le nombre des α_j appartenant à Γ' . Il est clair que ces nombres sont des invariants topologiques de T .

Désignons encore par $\nu(\Gamma)$ le nombre des α_j qui engendrent Γ . Ceux qui appartiennent à Γ sans l'engendrer sont contenus dans un nombre fini de sous-groupes $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_r$ de Γ , engendrés chacun par une puissance de α d'exposant premier et, si α est une racine de l'unité d'ordre h , diviseur de h . Alors la relation

$$\begin{aligned} \nu(\Gamma) &= \mu(\Gamma) - \sum_i \mu(\Gamma_i) + \sum_{i < j} \mu(\Gamma_i \cap \Gamma_j) \\ &\quad - \dots + (-1)^r \mu(\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \dots \cap \Gamma_r) \end{aligned}$$

montre que $\nu(\Gamma)$ est aussi un invariant topologique de T . Si α n'est pas une racine de l'unité, il y a deux générateurs de Γ , α et $\bar{\alpha}$, le nombre des racines caractéristiques de T égales à α est $\frac{1}{2} \nu(\Gamma)$, tandis que si α est une racine de l'unité primitive d'ordre h , $\nu(\Gamma)$ est le nombre des α_j qui sont racines primitives de l'unité d'ordre h , ce qui achève la démonstration.

Voici une conséquence immédiate de ce théorème: si aucune des racines caractéristiques de T n'est une racine imaginaire de l'unité, toute rotation T' homéomorphe à T a les mêmes racines caractéristiques que T .

Autre conséquence: *le problème général se réduit au cas des rotations d'ordre fini*. En effet, en annulant les coordonnées z_j associées aux α_j qui ne sont pas des racines de l'unité, on définit un sous-espace de \mathbf{R}^{m+1} et une sous-sphère de S^m , la restriction T_0 de T à ce sous-espace (ou cette sous-sphère) est d'ordre fini puisque toutes ses racines caractéristiques sont des racines de l'unité. Il est clair que si T et T' sont homéomorphes, leurs restrictions d'ordre fini T_0 et T'_0 le sont aussi, et le problème se réduit à savoir si T_0 et T'_0 ont les mêmes racines caractéristiques.

Pour une rotation T d'ordre fini $h > 2$, les racines caractéristiques sont des racines h -ièmes de l'unité. Si elles sont toutes primitives d'ordre h , je dirai que T est *libre d'ordre h* , parce que T engendre un groupe cyclique d'ordre h de rotations sans point fixe, c'est-à-dire une action libre du groupe cyclique d'ordre h . Par définition, le quotient de S^{2n-1} par un tel groupe est un *espace lenticulaire de dimension $2n - 1$* .

Les espaces lenticulaires de dimension 3 ont été définis par H. Tietze en 1908, à la fin d'un important travail [Ti]. Partant de la boule à 3 dimensions, limitée par la sphère S^2 , elle-même partagée en deux hémisphères par le cercle équatorial C , Tietze obtient une variété close en collant l'hémisphère nord de S^2 sur l'hémisphère sud par la transformation résultant d'une symétrie par rapport au plan contenant C suivie d'une rotation d'angle $2\pi q/p$ autour de l'axe A de C , p étant un entier positif et q un entier premier à p . Cette variété est notée $L(p, q)$ par Seifert et Threlfall, à qui est due la dénomination « Linsenraum » ou espace lenticulaire [ST], [Th]. Tietze note que son groupe fondamental est cyclique d'ordre p , que $L(p, q)$ et $L(p, q')$ sont homéomorphes si $q' \equiv \pm q \pmod{p}$ ou $qq' \equiv \pm 1 \pmod{p}$, mais si aucune de ces conditions n'est remplie, par exemple pour $L(5, 1)$ et $L(5, 2)$, il ne sait pas et pose le problème.

En 1919, J. W. Alexander montre précisément que $L(5, 1)$ et $L(5, 2)$ ne sont pas homéomorphes [A]. Alexander ne cite pas Tietze, dont il semble ignorer le travail. Je l'ai moi-même ignoré jusqu'après la publication de ma thèse en 1931. C'est le livre de Kerekjarto [Ke] qui a attiré mon attention sur la « Note d'Alexander », au début de mes essais de recherche en 1926.

J'ai pensé pouvoir clarifier et généraliser la démonstration d'Alexander, en utilisant la notion d'enlacement de deux cycles d'ordre fini et la théorie des intersections de cycles exposée par Lefschetz [L]. Mais Lebesgue, à qui je dois une profonde reconnaissance, me signala d'autres « Notes d'Alexander » sur le même sujet, parues dans les *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* en 1924 et 1925 (voir références dans [ST]). Il me fit néanmoins publier une Note [Rh 1] et m'encouragea à chercher d'autres exemples. C'est alors que j'ai pensé aux espaces lenticulaires de dimension supérieure, introduits à la fin de ma Thèse [Rh 2].

J'avais remarqué, comme l'ont fait Seifert et Threlfall, que les espaces définis par Tietze sont les quotients de S^3 par un groupe cyclique de rotations sans points fixes. Pour $L(p, q)$, ce groupe est engendré, dans $S^3 = \mathbf{R}^3 \cup (\infty)$, par la transformation résultant d'une rotation d'angle $2\pi/p$ autour d'un cercle C et d'une rotation d'angle $2\pi q/p$ autour de l'axe A de C . La *lentille* ayant pour faces deux calottes sphériques limitées à C

faisant entre elles un angle égal à $2\pi/p$ est un domaine fondamental pour ce groupe. D'où la dénomination choisie par Seifert et Threlfall.

Il était alors naturel de considérer les quotients de S^{2n-1} par les groupes cycliques engendrés par une rotation T de S^{2n-1} libre d'ordre h , appelés ensuite espaces lenticulaires de dimension $2n - 1$. La donnée de T détermine un tel espace et en même temps un générateur de son groupe, ce que Milnor appelle « a lens space with a preferred generator » [M 1]. Les autres générateurs sont les puissances T^a de T d'exposant a premier à h . L'étude des espaces lenticulaires de dimension $2n - 1$ se ramène ainsi à celle des rotations de S^{2n-1} libres d'ordre h .

Désignons par $T(h; l_1, l_2, \dots, l_n)$ la rotation de S^{2n-1} , libre d'ordre h , ayant pour racines caractéristiques les nombres ζ^{l_j} et ζ^{-l_j} , où $\zeta = e^{2i\pi/h}$ et où l_1, l_2, \dots, l_n sont des entiers premiers à h , qu'on appellera *les invariants de T* . Ils ne sont déterminés que (mod h), à l'ordre près et au signe près. Toutefois, le changement d'un l_j en $-l_j$ correspond à un changement de l'orientation de S^{2n-1} . Le signe du produit $l_1 l_2 \dots l_n$ (mod h) est donc lié à l'orientation de S^{2n-1} .

Le résultat obtenu dans [Rh 2] à l'aide de la théorie des intersections et des enlacements peut alors s'énoncer ainsi:

Si les rotations T et T' de S^{2n-1} , libres d'ordre h , d'invariants l_j et l'_j ($j = 1, 2, \dots, n$), sont homéomorphes, on a

$$(2) \quad l'_1 l'_2 \dots l'_n \equiv \pm l_1 l_2 \dots l_n \pmod{h}$$

avec le signe $+$ ou $-$ selon que l'homéomorphisme conserve l'orientation ou non.

Pour l'homéomorphie des espaces lenticulaires correspondants, il suffit que T' soit homéomorphe à une puissance T^a de T , d'exposant a premier à h . Les invariants de T^a étant al_1, al_2, \dots, al_n , il est seulement nécessaire pour cette homéomorphie qu'il existe un entier a tel que

$$(3) \quad l'_1 l'_2 \dots l'_n \equiv \pm a^n l_1 l_2 \dots l_n \pmod{h}$$

A côté de cette condition nécessaire, j'indiquais à la fin de [Rh 2] une condition suffisante, signifiant que T' et T^a ont les mêmes invariants, et j'écrivais: « Il semble que cette dernière condition soit aussi nécessaire et que la première soit insuffisante, mais la question n'est pas résolue. »

Au printemps 1935, je reçus une lettre de M. Reidemeister, me disant: « Comment pouvez-vous prouver que ces conditions sont suffisantes? »

Ici nous pensons pouvoir prouver qu'elles sont nécessaires. » Il travaillait avec son élève W. Franz. En même temps, je recevais un tiré à part du travail [Re] où il résolvait le problème d'homéomorphie pour les espaces lenticulaires de dimension 3, homéomorphie étant pris au sens de la Topologie combinatoire. Après lui avoir répondu, je vis que sa méthode pouvait s'étendre aux espaces lenticulaires de dimension supérieure. Une difficulté se présentait, relevant de la théorie des nombres, pour laquelle je faisais appel à un théorème de Kummer sur les unités d'un corps cyclotomique, trouvé dans le « *Zahlbericht* » de Hilbert. Mais Reidemeister me fit remarquer que cela supposait que l'ordre h du groupe soit un nombre premier. Pour h entier quelconque, W. Franz avait une démonstration générale. Enfin il m'autorisait aimablement à en parler à la Conférence internationale de Topologie qui devait avoir lieu à Moscou en septembre 1935, à laquelle il ne pouvait se rendre. La veille de mon départ, je reçus un « preprint » du travail de Franz [F 1]. Ma communication à Moscou *Sur les nouveaux invariants topologiques de M. Reidemeister* a été publiée en 1936 [Rh 3].

Ces nouveaux invariants, appelés maintenant *Torsion de Reidemeister*, n'étaient alors prouvés invariants que pour l'*homéomorphie au sens de la Topologie combinatoire*. Pour une rotation T de S^m d'ordre fini, il existe une subdivision polyédrale de S^m invariante par T , sur laquelle T se traduit par un automorphisme. J'ai été ainsi amené à l'étude des complexes avec automorphismes [Rh 4], auxquels s'applique la notion d'homéomorphie au sens combinatoire [Rh 5]. A ce point de vue, grâce à la Torsion de Reidemeister, la classification des espaces lenticulaires était achevée.

Pour une rotation d'ordre fini non libre, on peut trouver une subdivision polyédrale invariante, formant un complexe K , contenant un sous-complexe fermé L , tel que l'action de la rotation soit libre sur $K - L$ et l'on peut définir la torsion de la paire (K, L) , qui n'est pas autre chose que la torsion de $K - L$. Cette notion, introduite dans [Rh 4], permet de démontrer que deux rotations d'ordre fini, même non libres, homéomorphes au sens combinatoire, ont les mêmes racines caractéristiques.

Je ne l'ai publié que plus tard [Rh 7] et [Rh 8]. L'une des raisons de ce retard est que j'espérais démontrer l'invariance strictement topologique des racines caractéristiques, ce que je n'ai pas réussi (et qui, comme on verra, n'est pas toujours vrai!). Mais, grâce aux travaux de Cairns et de J. H. C. Whitehead sur les C^1 -triangulations, il a été possible d'établir leur invariance vis-à-vis des homéomorphies différentiables ou *difféomorphies*, et l'on a le théorème suivant:

II. *Si deux rotations de S^m sont difféomorphes, elles ont les mêmes racines caractéristiques.*

Pour le cas des rotations libres d'ordre fini, voir [Rh 6], et pour le cas général [Rh 7] et [Rh 8]. Pour éviter d'avoir recours aux C^1 -triangulations de Cairns et Whitehead, j'ai donné dans [Rh 6] une autre méthode faisant usage de certains recouvrements convexes. Cette méthode a été étendue par O. Burlet [B] pour le cas de la torsion d'une paire.

Mais revenons aux rotations libres d'ordre h et aux espaces lenticulaires. L'étude des applications continues d'un espace lenticulaire dans un autre, abordée par M. Rueff [Ru], approfondie par Franz [F 2] puis P. Olum [O] — voir aussi [Rh 5] et l'exposé [Rh 8, VIII] — a montré la vraie signification des conditions (2) et (3) ci-dessus.

Disons que deux rotations libres d'ordre h , T et T' , de la sphère orientée S^{2n-1} , ont le même type d'homotopie, s'il existe une application continue $f: S^{2n-1} \rightarrow S^{2n-1}$, de degré $+1$, telle que $fT = T'f$. On démontre que:

La condition (2), avec le signe $+$, est nécessaire et suffisante pour que T et T' aient le même type d'homotopie.

Et l'on en déduit:

L'existence d'un entier a satisfaisant à (3) avec le signe $+$ (resp. \pm) est une condition nécessaire et suffisante pour que les espaces lenticulaires définis par T et T' aient le même type d'homotopie orienté (resp. non orienté).

Il ressort de là que la Torsion de Reidemeister n'est pas un invariant du type d'homotopie, contrairement aux invariants topologiques de variétés closes connus avant 1935. C'était la base de départ pour la découverte par Whitehead des notions de type simple d'homotopie et de groupe de Whitehead, pour lesquelles je renvoie à [Rh 8] et surtout à l'admirable exposé de J. Milnor [M 1].

En 1969, nouveau progrès: R. C. Kirby et L. Siebenmann démontrent que deux espaces lenticulaires homéomorphes sont difféomorphes (par suites isométriques), [KS 1], [KS 2] et [M 2]. On en déduit:

Si deux rotations de S^{2n-1} libres d'ordre h sont homéomorphes, elles ont les mêmes racines caractéristiques.

Dans ce qui précède, on a utilisé seulement le fait qu'une rotation est une isométrie. En particulier, les théorèmes I et II restent valables si l'on

remplace « rotation » par « isométrie ». Une isométrie de S^m qui n'est pas une rotation renverse l'orientation; elle est représentée par une matrice orthogonale de déterminant -1 , et possède un nombre impair de racines caractéristiques égales à -1 .

Le problème d'homéomorphie des rotations et des isométries de S^m s'est présenté comme une généralisation du problème posé par les espaces lenticulaires. Mais il est lui-même un cas particulier d'un problème beaucoup plus général: *la classification topologique des endomorphismes linéaires*, étudié par N. Kuiper et J. W. Robbin [KR] en 1973, d'une manière très intéressante. Mais pour le cas des rotations d'ordre fini, ils se bornent essentiellement à la conjecture que deux rotations homéomorphes ont les mêmes racines caractéristiques.

En 1979, S. E. Cappel et J. Shaneson donnent un premier contre-exemple à cette conjecture, avec deux isométries de S^9 , d'ordre 8, qui sont homéomorphes et n'ont pas les mêmes racines caractéristiques [CS 1]. On en déduit facilement deux rotations de S^{10} qui sont homéomorphes et n'ont pas les mêmes caractéristiques, et beaucoup d'autres exemples. *Le problème est ainsi loin d'être épuisé*, le récent travail [CS 2] des mêmes auteurs donne une idée de sa richesse et de sa difficulté. De nouveaux problèmes, notamment celui de l'équivalence topologique des représentations linéaires d'un groupe, y sont abordés.

BIBLIOGRAPHIE

- [A] ALEXANDER, J. W. Note on two three-dimensional manifolds with the same group. *Trans. Amer. Math. Soc.* 20 (1919), 339-342.
- [B] BURLET, O. *Sur un invariant de certaines actions différentiables*. Thèse N° 1468, Université de Genève, Institut de Mathématiques.
- [CS 1] CAPPEL, S. E. and J. SHANESON. Linear Algebra and Topology. *Bull. A.M.S. (new series)* 1 (1979), 685-687.
- [CS 2] ——— Non linear similarity. *Annals of Math.* vol. 113 (1981), 315-355.
- [F 1] FRANZ, W. Über die Torsion einer Überdeckung. *Journal für die reine u. angew. Math.*, vol. 173 (1935), 245-253.
- [F 2] ——— Abbildungsklassen und Fixpunktklassen dreidimensionaler Linsenräume. *Ibid.* vol. 185 (1943), 65-77.
- [Ke] KERÉKJARTO, B. VON. *Vorlesungen über Topologie*. Springer 1923.
- [KR] KUIPER, N. and J. W. ROBBIN. Topological classification of linear endomorphisms. *Invent. Math.* 19 (1973), 83-106.
- [KS 1] KIRBY, R. C. and L. SIEBENMANN. On the triangulation of manifolds and the Hauptvermutung. *Bull. A.M.S.* 75 (1969), 742-749.
- [KS 2] ——— *Foundational Essays on topological manifolds, smoothings and triangulations*. Princeton University Press, 1977.
- [L] LEFSCHETZ, S. *L'Analysis Situs et la Géométrie algébrique*. Paris 1924.

- [M 1] MILNOR, J. Whitehead Torsion. *Bull. A.M.S.* 72 (1966), 358-426.
- [M 2] ——— Torsion et type simple d'homotopie. Conférence rédigée par O. Burlet, in *Essays on Topology and Related Topics (Mémoires dédiés à Georges de Rham)*, Springer-Verlag 1970, 12-27.
- [O] OLUM, P. Mappings of manifolds and the notion of degree. *Ann. of Math.* 58 (1953), 458-480.
- [Re] REIDEMEISTER, K. Homotopieringe and Linsenräume. *Hamb. Abh.* 11 (1935), 102-109.
- [Rh 1] RHAM, G. DE. Sur la dualité en Analysis situs. *Comptes rendus Ac. Sc. Paris*, t. CLXXXVI (1928), 670-672.
- [Rh 2] ——— Sur l'Analysis situs des variétés à n dimensions. (Thèse de doctorat, Paris). *Journal de math. pures et appliquées*, t. X (1931), 115-200.
- [Rh 3] ——— Sur les nouveaux invariants topologiques de M. Reidemeister. *Recueil mathématique, Moscou*, t. I (43) (1936), 737-743.
- [Rh 4] ——— Sur les complexes avec automorphismes. *Commentarii Mathematici Helvetici*, XII (1939), 191-211.
- [Rh 5] ——— Sur les conditions d'homéomorphie de deux rotations de la sphère à n dimensions, et sur les complexes à automorphismes. *Colloques internationaux du Centre National de la Recherche scientifique*, XII, *Topologie algébrique*, Paris (1949), 87-95.
- [Rh 6] ——— Complexes à automorphismes et homéomorphie différentiable. *Annales de l'Institut Fourier (Université de Grenoble)*, t. II (1950), 51-67.
- [Rh 7] ——— Reidemeister's torsion invariant and rotations of S^n . *Differential Analysis*, Oxford University Press 1964, 11-17.
- [Rh 8] ——— Torsion et type simple d'homotopie. (*Séminaire G. de Rham, Université de Lausanne 1963-64*, exposés de M. Kervaire, S. Maumary et G. de Rham). 2^e édition: *Lecture Notes* 48, Springer 1967.
- [Ru] RUEFF, M. Beiträge zur Untersuchung der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten. *Compositio Mathematica* 6 (1938), 161-202.
- [ST] SEIFERT-THRELFALL. *Lehrbuch der Topologie*. Teubner 1934.
- [Th] THRELFALL, W. Quelques résultats récents de la topologie des variétés. *L'Ens. math.* XXXV (1936), 242-255.
- [Ti] TIETZE, H. Über die topologischen Invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten. *Monatsh. Math. Phys.* 19 (1908), 1-118.

(Reçu le 30 avril 1981)

Georges de Rham

7, av. Bergières
CH-1004 Lausanne