Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 27 (1981)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ZUR AXIOMATISIERUNG GEWISSER AFFINER GEOMETRIEN
Autor: Prestel, Alexander
Kapitel: 4. SCHLUSSBEMERKUNGEN
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-51743

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 22.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

auch umgekehrt N mit Hilfe von S_N^R definiert werden kann. Es gilt nämlich für $t \in R$, $0 < t$

$$t \in N \Leftrightarrow (\forall 0 < r < 4)(\exists s)\left[s^2 + \left(\frac{s}{t}\right)^2 = r \wedge \left(s, \frac{s}{t}\right) \in S_N^R\right],$$

d.h. die Gerade durch $(0, 0)$ und $(t, 1)$ reicht in S_N^R bis zum Rand des Kreises mit dem Radius 2. q.e.d.

Wir können jetzt den Satz beweisen: Angenommen, es gäbe eine Aussage ρ der Sprache der angeordneten Körper mit einem zusätzlichen 2-stelligen Prädikat für S, so daß für $S \subset R^2$ mit S konvex und offen und R reell abgeschlossen S genau dann ein Modell von GA_2 ist, falls ρ in (R, S) gilt. Für jedes $N \subset R$, das (a)-(c) erfüllt, heißt dies speziell

$$S_N^R \text{ Modell von } GA_2 \Leftrightarrow \text{in } (R, N) \text{ gilt } \rho^*,$$

wobei man ρ^* aus ρ erhält, indem man die Definition von S_N^R in ρ für das Prädikat S einsetzt. ρ^* hat jetzt das zusätzliche Prädikat N. Mit dem letzten Lemma erhalten wir dann:

> Ist R reell abgeschlossen und hat $N \subset R$
> die Eigenschaften (a)-(c), so ist genau dann
> in R jeder N-definierbare Schnitt realisiert,
> falls in (R, N) die einzelne Aussage ρ^* gilt.

Dies widerspricht jedoch Theorem 8 zusammen mit Theorem 6 in [M]. Montague zeigt nämlich dort in Theorem 6, daß die Theorie der reell abgeschlossenen Körper R mit Teilprädikat N mit (a)-(c), in dem jeder N-definierbare Schnitt realisiert ist, „strongly semantically closed" ist. Nach Theorem 8 impliziert dies, daß das Schema der „reellen Abgeschlossenheit" zusammen mit endlich vielen anderen Aussagen (z.B. (a)-(c) und ρ^*) nicht ausreicht, diese Theorie zu axiomatisieren.

4. Schlussbemerkungen

1. Der eben bewiesene Satz läßt sich verschärfen zu

Satz'. *Es gibt keine Aussage ρ der schwachen 2. Stufe für angeordnete Körper mit zusätzlichem 2-stelligen Prädikat S, so dass für konvexe offene Teilmengen $S \subset R^2$ und R reell abgeschlossen S genau dann ein Modell von GA_2 ist, falls ρ in (R, S) gilt.*

Dabei meint „schwache 2. Stufe", daß auch Quantifikationen über endliche Folgen von Körperelementen zugelassen sind.

Wir skizzieren den Beweis: Falls es eine solche Aussage ρ gäbe, so würde ρ insbesondere in $(\mathbf{R}, S_{\mathrm{N}}^{\mathbf{R}})$ gelten. Ersetzen wir $S_{\mathrm{N}}^{\mathbf{R}}$ in ρ durch seine Definition, so erhalten wir eine Aussage ρ^* der schwachen 2. Stufe, die in $(\mathbf{R}, \mathbf{N})$ gelten würde. Aus Lemma 1 und 2 bei Apt in [A] läßt sich nun (mit einigem technischen Aufwand) folgern, daß es eine Zahl $n \geqslant 2$ gibt, so daß die durch Δ_n^1-Folgen definierten reellen Zahlen einen reell abgeschlossenen Teilkörper R_n von $\mathbf{R}$ bilden, in dem einerseits ρ^* gelten würde, der aber andererseits nicht alle $\mathbf{N}$-definierbaren Schnitte realisiert. Damit müßte einerseits ρ in $(R_n, S_{\mathrm{N}}^{R_n})$ gelten, andererseits ist aber $S_{\mathrm{N}}^{R_n}$ nach dem Lemma im 3. Abschnitt kein Modell von GA_2.

Es sei noch bemerkt, daß die Lemmata 1 und 2 bei Apt unter der Voraussetzung $V = L$ bewiesen werden. Der Satz′ behält dann jedoch auch ohne diese Voraussetzung seine Gültigkeit.

2. Die Menge $S_{\mathrm{N}}^{\mathbf{R}}$ wurde schon von Szczerba und Tarski benützt, um die Unentscheidbarkeit von GA_2 zu beweisen. Weiterhin wurde dieses Modell in Prestel-Szczerba [P-S] benützt, um zu zeigen, daß die Menge derjenigen Aussagen, die in allen Modellen von GA_2 über $\mathbf{R}$ gelten (d.h. in denen das Stetigkeitsaxiom C^2 der 2. Stufe gilt) nicht rekursive axiomatisiert werden kann (also insbesondere größer als die Theorie GA_2 ist). Dies heißt insbesondere, daß das „Elementarisierungsverfahren" hier zu einer echt schwächeren Theorie führen muß. Schließlich wurde von Schwabhäuser in [Sch] für archimedisch geordnete, reell abgeschlossene Körper R eine Charakterisierung derjenigen S_{N}^{R} angekündigt, die Modelle von GA_2 sind. Diese Charakterisierung folgt ebenfalls aus dem Lemma im 3. Abschnitt.

3. Es bleibt eine Frage aus [S-T$_1$] ungelöst, nämlich, ob GA_2 eine endlich axiomatisierbare Obertheorie besitzt.

4. Bei R. Fritsch und U. Friedrichsdorf möchte ich mich für viele informative und anregende Gespräche zu dem Thema dieser Arbeit bedanken.

LITERATUR

[A] Apt, K. R. Non-finite axiomatizability of the second order arithmetic. *Bull. Acad. Polon. Sci. 20* (1972), 347-348.

[C] Coxeter, H. S. M. *Non-Euclidean geometry*. Toronto 1942.

[H] Hilbert, D. *Grundlagen der Geometrie*. Leipzig 1913.

[K] Klingenberg, W. *Grundlagen der Geometrie*. Mannheim 1971.