1. EINFÜHRUNG UND PROBLEMSTELLUNG

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1981)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

ZUR AXIOMATISIERUNG GEWISSER AFFINER GEOMETRIEN

von Alexander PRESTEL

Professor E. Specker zum 60. Geburtstag gewidmet [1])

1. EINFÜHRUNG UND PROBLEMSTELLUNG

In seiner Arbeit [T] „What is elementary geometry?" stellt A. Tarski heraus, daß Hilberts bekannte Axiomatisierung [H] des euklidischen Raumes im Sinne der Prädikatenlogik 1. Stufe nicht „elementar" ist. Dies liegt daran, daß das Stetigkeitsaxiom [2])

$$C^2: \quad \exists z \forall xy \, (x \in X \wedge y \in Y \Rightarrow B(zxy)) \Rightarrow \exists z \forall xy \, (x \in X \wedge y \in Y \Rightarrow B(xzy))$$

Aussagen über alle Mengen X und Y macht. Die hier gewählte Form besagt inhaltlich, daß auf einer Geraden zwischen zwei nicht-leeren Mengen immer ein Punkt liegt. Dabei bedeutet

$B(xyz)$: „Der Punkt y liegt zwischen den Punkten x und z (unter Einschluß der Begrenzungspunkte x und z)".

Will man nun die Geometrie des euklidischen Raumes den Fragestellungen und Methoden der Logik 1. Stufe zugänglich machen, so bietet sich an, das Stetigkeitsaxiom nur für Mengen zu formulieren, die sich explizit definieren lassen, und zwar unter ausschließlicher Benutzung geometrischer Grundbegriffe und Quantifikation nur über Punkte [3]). Das heißt, statt des Stetigkeitsaxioms (2. Stufe) C^2 fordert man für jedes Paar von Formeln $\varphi(x)$ und $\psi(y)$

$$C^1: \quad \exists z \forall xy \, (\varphi(x) \wedge \psi(y) \Rightarrow B(zxy)) \Rightarrow \exists z \forall xy \, (\varphi(x) \wedge \psi(y) \Rightarrow B(xzy))$$

---

[1]) Die vorliegende Arbeit ist eine erweiterte Fassung des Vortrages „Remarks on the axiomatization of general affine geometry" vom 7. Februar 1980 im *Symposium über Logik und Algorithmik*, Zürich.

[2]) Die hier verwendete Fassung findet sich nicht bei Hilbert, sondern etwa bei [*T*], ist aber dem von Hilbert verwendeten Stetigkeitsaxiom gleichwertig.

[3]) Dies schliesst implizit natürlich die Quantifikation über Geraden und Ebenen mit ein, da diese ja durch zwei bzw. drei Punkte eindeutig festgelegt sind.

Die Formeln φ und ψ dürfen dabei selbstverständlich Parameter enthalten.

Das nun resultierende Axiomensystem hat nicht mehr wie bei Hilbert nur den $\mathbf{R}^3$ als Modell, vielmehr sind die Modelle genau die euklidischen Räume R^3, wobei R ein reell abgeschlossener Körper ist. Die resultierende Theorie nennt Tarski die „elementare euklidische Geometrie". Das Wort elementar steht also dafür, daß statt des Stetigkeitsaxioms C^2 das Schema der „elementaren" (d.h.erststufigen) Axiome C^1 gefordert wird.

In [S] führt W. Szmielew analog die elementare hyperbolische und elementare absolute Geometrie ein.

In allen Fällen sind die Grundbegriffe die *Zwischenbeziehung* $B(xyz)$ und die *Streckenkongruenz* $D(xyuv)$ (= die Strecke $\overline{xy}$ ist kongruent zu der Strecke $\overline{uv}$). Wieder sehen die Modelle der elementaren Theorie ähnlich wie die der klassischen Theorie aus, es ist lediglich der Körper $\mathbf{R}$ durch einen reell abgeschlossenen Körper R zu ersetzen.

Die Verhältnisse ändern sich jedoch wesentlich, wenn man diese Methode des „Elementarisierens" auf die im folgenden zu beschreibende, etwa bei Coxeter [C] formulierte, Geometrie anwendet [1]). Als einziger Grundbegriff wird jetzt die Zwischenbeziehung $B(xyz)$ verwendet. Die Axiome sind die üblicherweise für B formulierten, die bei Hinzunahme weiterer Axiome für die Streckenkongruenz gerade die absolute Geometrie ergeben. Die Modelle dieser Axiome sind genau die konvexen offenen (nichtleeren) Teilmengen des $\mathbf{R}^3$ mit der vom $\mathbf{R}^3$ induzierten Zwischenbeziehung. (Siehe etwa Klingenberg [K], §9). Bei dieser Axiomatisierung wurde wieder das Stetigkeitsaxiom C^2 gefordert.

In [S-T$_1$] „elementarisieren" Szczerba und Tarski diese eben beschriebene Geometrie, indem sie wieder C^2 durch das Schema der Stetigkeitsaxiome C^1 ersetzen. In [S-T$_1$] findet man eine Axiomatisierung für den 2-dimensionalen Fall durch Axiome mit den folgenden Namen:

A 1: identity axiom

A 2: transitivity axiom

A 3: connectivity axiom

A 4: extension axiom

A 5: Pasch's axiom

[1]) Dort als deskriptive Geometrie bezeichnet.

A 6: Desargues' axiom

A 7: lower dimension axiom

A 8: upper dimension axiom

A 9: elementary continuity axioms

Das Schema *A 9* ist dabei mit dem oben eingeführten Schema C^1 gleichwertig. Szczerba und Tarski nennen die resultierende Geometrie „allgemeine affine Geometrie" ($= GA_2$). Die Modelle dieses Axiomensystems sind konvexe offene (nicht-leere) Teilmengen von R^2, wobei R ein reell abgeschlossener Körper ist. Im Spezialfall $R = \mathbf{R}$ sind die konvexen offenen Teilmengen genau die Modelle von GA_2. Ist jedoch $R \neq \mathbf{R}$, so gibt es immer konvexe offene Teilmengen von R^2, die keine Modelle von GA_2 sind.[1] In [S-T_1] blieb es ein *offenes Problem*, diejenigen offenen und konvexen Teilmengen von R^2 zu charakterisieren, die Modelle von GA_2 sind. Wir werden im folgenden zeigen, daß dies in einem gewissen Sinne nicht möglich ist.

Der Grund dafür, daß bei dieser Geometrie im Gegensatz zu den vorher erwähnten die Modellklasse sich nicht vernünftig beschreiben läßt, liegt an der unterschiedlichen Stärke des Schemas C^1 in den verschiedenen Geometrien. In allen betrachteten Geometrien läßt sich eine Koordinatisierung mit einem geordneten Körper R vornehmen. Das Schema C^1 erzwingt dann in den zuerst betrachteten Geometrien lediglich die Realisierbarkeit rein körpertheoretisch definierbarer Schnitte, dies ist aber mit der reellen Abgeschlossenheit von R äquivalent. Im Falle der Geometrie GA_2 kann jedoch die „Gestalt" eines Modelles die Realisierung wesentlich komplizierterer Schnitte erzwingen. Dies kommt zum Ausdruck durch das im 2. Abschnitt zu beweisende.

CHARAKTERISIERUNGSLEMMA. *Es sei R ein reell abgeschlossener Körper und $S \subset R^2$ konvex und offen. S ist genau dann ein Modell von GA_2, wenn in R jeder S-definierbare Schnitt realisiert ist.*

Dies soll heißen, daß für je zwei Formeln (mit Parametern) $\alpha(r)$ und $\beta(s)$ aus der Sprache eines angeordneten Körpers mit einem zusätzlichen 2-stelligen Prädikat für S (das wir wie üblich selbst wieder mit S bezeichnen) die folgende Aussage in (R, S) gilt:

$$\exists t \forall rs \big(\alpha(r) \wedge \beta(s) \Rightarrow t \leqslant r \leqslant s\big) \Rightarrow \exists t \forall rs \big(\alpha(r) \wedge \beta(s) \Rightarrow r \leqslant t \leqslant s\big)$$

---

[1]) Siehe [$S - T_1$] bzw. für die Beweise [$S - T_2$].

Dieses Lemma zeigt, daß die „Kompliziertheit“ der Menge S nicht die von R überschreiten darf, um Modell von GA_2 zu sein. Für $R = \mathbf{R}$ sieht man damit sofort, daß jedes konvexe offene S ein Modell ist.

Im 3. Abschnitt folgern wir aus diesem Zusammenhang dann den folgenden Satz über die Nicht-Charakterisierbarkeit:

SATZ. *Es gibt keine Aussage* ρ *in der Sprache der geordneten Körper mit einem zusätzlichen 2-stelligen Prädikat* S, *die genau die konvexen offenen Teilmengen* $S \subset R^2$ *mit* R *reell abgeschlossen charakterisiert (*d.h. *in* (R, S) *gilt), die Modelle von* GA_2 *sind.*

2. Beweis der Charakterisierungslemmas

Wir bedienen uns in diesem Abschnitt der Ausführungen von Szczerba-Tarski in [S-T$_2$], ohne sie jeweils im einzelnen zu zitieren.

Sei zuerst $S \subset R^2$ offen und konvex, R reell abgeschlossen und in R sei jeder S-definierbare Schnitt realisiert. Von den Axiomen von GA_2 bleibt dann für S lediglich $A\,9$ d.h. C^1 zu zeigen. Es seien also die geometrischen [1]) Formeln $\varphi(x)$ und $\psi(y)$ gegeben. Unter Ausschluß von trivialen Fällen können wir annehmen, daß φ und ψ zwei nicht-leere Mengen auf einer Geraden durch Punkte $x_0 \neq y_0$ mit $\varphi(x_0)$ und $\psi(y_0)$ definieren. *Für die Koordinaten eines Punktes* $z \in R^2$ *schreiben wir immer* (z', z''). Es ist nun klar, daß das folgende Verfahren unter Benutzung der Parameterdarstellung der Punkte der Geraden durch x_0, y_0 einen S-definierbaren Schnitt auf R beschreibt, dessen Realisierung in R mit der Realisierung des durch φ und ψ in S definierten Schnittes gleichwertig ist. Man verändere folgendermaßen die Formeln φ und ψ:

(1) alle Parameter a bzw. Variablen z werden durch (a', a'') bzw. (z', z'') ersetzt,

(2) entsprechend werden Quantifikationen $\forall z\, \rho$ und $\exists z\, \rho$ durch $\forall z' z'' \big(S(z', z'') \Rightarrow \rho\big)$ bzw. $\exists z' z'' \big(S(z', z'') \wedge \rho\big)$ ersetzt,

(3) die Primformeln $B\big((u', u'')(v', v'')(w', w'')\big)$ werden ersetzt durch $\exists t \big(0 \leqslant t \leqslant 1 \wedge v = tu + (1-t)\, w\big)$ [2]),

[1]) D.h. als einziger Grundbegriff tritt die Zwischenbeziehung B auf und die Quantifikation läuft nur über Punkte.

[2]) Eine Gleichung $a = b$ meint natürlich die Konjunktion $a' = b' \wedge a'' = b''$.