

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 27 (1981)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** ZUR AXIOMATISIERUNG GEWISSE AFFINER GEOMETRIEN  
**Autor:** Prestel, Alexander  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-51743>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 24.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# ZUR AXIOMATISIERUNG GEWISSER AFFINER GEOMETRIEN

von Alexander PRESTEL

*Professor E. Specker zum 60. Geburtstag gewidmet <sup>1)</sup>*

## 1. EINFÜHRUNG UND PROBLEMSTELLUNG

In seiner Arbeit [T] „What is elementary geometry?“ stellt A. Tarski heraus, daß Hilberts bekannte Axiomatisierung [H] des euklidischen Raumes im Sinne der Prädikatenlogik 1. Stufe nicht „elementar“ ist. Dies liegt daran, daß das Stetigkeitsaxiom <sup>2)</sup>

$$C^2: \exists z \forall xy (x \in X \wedge y \in Y \Rightarrow B(zxy)) \Rightarrow \exists z \forall xy (x \in X \wedge y \in Y \Rightarrow B(xzy))$$

Aussagen über alle Mengen  $X$  und  $Y$  macht. Die hier gewählte Form besagt inhaltlich, daß auf einer Geraden zwischen zwei nicht-leeren Mengen immer ein Punkt liegt. Dabei bedeutet

$B(xyz)$ : „Der Punkt  $y$  liegt zwischen den Punkten  $x$  und  $z$  (unter Einschluß der Begrenzungspunkte  $x$  und  $z$ )“.

Will man nun die Geometrie des euklidischen Raumes den Fragestellungen und Methoden der Logik 1. Stufe zugänglich machen, so bietet sich an, das Stetigkeitsaxiom nur für Mengen zu formulieren, die sich explizit definieren lassen, und zwar unter ausschließlicher Benutzung geometrischer Grundbegriffe und Quantifikation nur über Punkte <sup>3)</sup>. Das heißt, statt des Stetigkeitsaxioms (2. Stufe)  $C^2$  fordert man für jedes Paar von Formeln  $\varphi(x)$  und  $\psi(y)$

$$C^1: \exists z \forall xy (\varphi(x) \wedge \psi(y) \Rightarrow B(zxy)) \Rightarrow \exists z \forall xy (\varphi(x) \wedge \psi(y) \Rightarrow B(xzy))$$

---

<sup>1)</sup> Die vorliegende Arbeit ist eine erweiterte Fassung des Vortrages „Remarks on the axiomatization of general affine geometry“ vom 7. Februar 1980 im *Symposium über Logik und Algorithmik*, Zürich.

<sup>2)</sup> Die hier verwendete Fassung findet sich nicht bei Hilbert, sondern etwa bei [T], ist aber dem von Hilbert verwendeten Stetigkeitsaxiom gleichwertig.

<sup>3)</sup> Dies schliesst implizit natürlich die Quantifikation über Geraden und Ebenen mit ein, da diese ja durch zwei bzw. drei Punkte eindeutig festgelegt sind.

Die Formeln  $\varphi$  und  $\psi$  dürfen dabei selbstverständlich Parameter enthalten.

Das nun resultierende Axiomensystem hat nicht mehr wie bei Hilbert nur den  $\mathbf{R}^3$  als Modell, vielmehr sind die Modelle genau die euklidischen Räume  $R^3$ , wobei  $R$  ein reell abgeschlossener Körper ist. Die resultierende Theorie nennt Tarski die „elementare euklidische Geometrie“. Das Wort elementar steht also dafür, daß statt des Stetigkeitsaxioms  $C^2$  das Schema der „elementaren“ (d.h.erststufigen) Axiome  $C^1$  gefordert wird.

In [S] führt W. Szmielew analog die elementare hyperbolische und elementare absolute Geometrie ein.

In allen Fällen sind die Grundbegriffe die *Zwischenbeziehung*  $B(xyz)$  und die *Streckenkongruenz*  $D(xyuv)$  (= die Strecke  $\overline{xy}$  ist kongruent zu der Strecke  $\overline{uv}$ ). Wieder sehen die Modelle der elementaren Theorie ähnlich wie die der klassischen Theorie aus, es ist lediglich der Körper  $\mathbf{R}$  durch einen reell abgeschlossenen Körper  $R$  zu ersetzen.

Die Verhältnisse ändern sich jedoch wesentlich, wenn man diese Methode des „Elementarisierens“ auf die im folgenden zu beschreibende, etwa bei Coxeter [C] formulierte, Geometrie anwendet <sup>1)</sup>. Als einziger Grundbegriff wird jetzt die Zwischenbeziehung  $B(xyz)$  verwendet. Die Axiome sind die üblicherweise für  $B$  formulierten, die bei Hinzunahme weiterer Axiome für die Streckenkongruenz gerade die absolute Geometrie ergeben. Die Modelle dieser Axiome sind genau die konvexen offenen (nichtleeren) Teilmengen des  $\mathbf{R}^3$  mit der vom  $\mathbf{R}^3$  induzierten Zwischenbeziehung. (Siehe etwa Klingenberg [K], §9). Bei dieser Axiomatisierung wurde wieder das Stetigkeitsaxiom  $C^2$  gefordert.

In [S-T<sub>1</sub>] „elementarisieren“ Szczerba und Tarski diese eben beschriebene Geometrie, indem sie wieder  $C^2$  durch das Schema der Stetigkeitsaxiome  $C^1$  ersetzen. In [S-T<sub>1</sub>] findet man eine Axiomatisierung für den 2-dimensionalen Fall durch Axiome mit den folgenden Namen:

- $A\ 1$ : identity axiom
- $A\ 2$ : transitivity axiom
- $A\ 3$ : connectivity axiom
- $A\ 4$ : extension axiom
- $A\ 5$ : Pasch's axiom

---

<sup>1)</sup> Dort als deskriptive Geometrie bezeichnet.

$A_6$ : Desargues' axiom

$A_7$ : lower dimension axiom

$A_8$ : upper dimension axiom

$A_9$ : elementary continuity axioms

Das Schema  $A_9$  ist dabei mit dem oben eingeführten Schema  $C^1$  gleichwertig. Szczerba und Tarski nennen die resultierende Geometrie „allgemeine affine Geometrie“ ( $= GA_2$ ). Die Modelle dieses Axiomensystems sind konvexe offene (nicht-leere) Teilmengen von  $R^2$ , wobei  $R$  ein reell abgeschlossener Körper ist. Im Spezialfall  $R = \mathbb{R}$  sind die konvexen offenen Teilmengen genau die Modelle von  $GA_2$ . Ist jedoch  $R \neq \mathbb{R}$ , so gibt es immer konvexe offene Teilmengen von  $R^2$ , die keine Modelle von  $GA_2$  sind.<sup>1)</sup> In  $[S-T_1]$  blieb es ein *offenes Problem*, diejenigen offenen und konvexen Teilmengen von  $R^2$  zu charakterisieren, die Modelle von  $GA_2$  sind. Wir werden im folgenden zeigen, daß dies in einem gewissen Sinne nicht möglich ist.

Der Grund dafür, daß bei dieser Geometrie im Gegensatz zu den vorher erwähnten die Modellklasse sich nicht vernünftig beschreiben läßt, liegt an der unterschiedlichen Stärke des Schemas  $C^1$  in den verschiedenen Geometrien. In allen betrachteten Geometrien läßt sich eine Koordinatisierung mit einem geordneten Körper  $R$  vornehmen. Das Schema  $C^1$  erzwingt dann in den zuerst betrachteten Geometrien lediglich die Realisierbarkeit rein körpertheoretisch definierbarer Schnitte, dies ist aber mit der reellen Abgeschlossenheit von  $R$  äquivalent. Im Falle der Geometrie  $GA_2$  kann jedoch die „Gestalt“ eines Modelles die Realisierung wesentlich komplizierterer Schnitte erzwingen. Dies kommt zum Ausdruck durch das im 2. Abschnitt zu beweisende.

**CHARAKTERISIERUNGSLEMMA.** *Es sei  $R$  ein reell abgeschlossener Körper und  $S \subset R^2$  konvex und offen.  $S$  ist genau dann ein Modell von  $GA_2$ , wenn in  $R$  jeder  $S$ -definierbare Schnitt realisiert ist.*

Dies soll heißen, daß für je zwei Formeln (mit Parametern)  $\alpha(r)$  und  $\beta(s)$  aus der Sprache eines angeordneten Körpers mit einem zusätzlichen 2-stelligen Prädikat für  $S$  (das wir wie üblich selbst wieder mit  $S$  bezeichnen) die folgende Aussage in  $(R, S)$  gilt:

$$\exists t \forall rs (\alpha(r) \wedge \beta(s) \Rightarrow t \leq r \leq s) \Rightarrow \exists t \forall rs (\alpha(r) \wedge \beta(s) \Rightarrow r \leq t \leq s)$$

<sup>1)</sup> Siehe  $[S - T_1]$  bzw. für die Beweise  $[S - T_2]$ .



Dieses Lemma zeigt, daß die „Kompliziertheit“ der Menge  $S$  nicht die von  $R$  überschreiten darf, um Modell von  $GA_2$  zu sein. Für  $R = \mathbb{R}$  sieht man damit sofort, daß jedes konvexe offene  $S$  ein Modell ist.

Im 3. Abschnitt folgern wir aus diesem Zusammenhang dann den folgenden Satz über die Nicht-Charakterisierbarkeit:

**SATZ.** *Es gibt keine Aussage  $\rho$  in der Sprache der geordneten Körper mit einem zusätzlichen 2-stelligen Prädikat  $S$ , die genau die konvexen offenen Teilmengen  $S \subset R^2$  mit  $R$  reell abgeschlossen charakterisiert (d.h. in  $(R, S)$  gilt), die Modelle von  $GA_2$  sind.*

## 2. BEWEIS DER CHARAKTERISIERUNGSLEMMAS

Wir bedienen uns in diesem Abschnitt der Ausführungen von Szczerba-Tarski in [S-T<sub>2</sub>], ohne sie jeweils im einzelnen zu zitieren.

Sei zuerst  $S \subset R^2$  offen und konvex,  $R$  reell abgeschlossen und in  $R$  sei jeder  $S$ -definierbare Schnitt realisiert. Von den Axiomen von  $GA_2$  bleibt dann für  $S$  lediglich A 9 d.h. C<sup>1</sup> zu zeigen. Es seien also die geometrischen<sup>1)</sup> Formeln  $\varphi(x)$  und  $\psi(y)$  gegeben. Unter Ausschluß von trivialen Fällen können wir annehmen, daß  $\varphi$  und  $\psi$  zwei nicht-leere Mengen auf einer Geraden durch Punkte  $x_0 \neq y_0$  mit  $\varphi(x_0)$  und  $\psi(y_0)$  definieren. Für die Koordinaten eines Punktes  $z \in R^2$  schreiben wir immer  $(z', z'')$ . Es ist nun klar, daß das folgende Verfahren unter Benutzung der Parameterdarstellung der Punkte der Geraden durch  $x_0, y_0$  einen  $S$ -definierbaren Schnitt auf  $R$  beschreibt, dessen Realisierung in  $R$  mit der Realisierung des durch  $\varphi$  und  $\psi$  in  $S$  definierten Schnittes gleichwertig ist. Man verändere folgendermaßen die Formeln  $\varphi$  und  $\psi$ :

- (1) alle Parameter  $a$  bzw. Variablen  $z$  werden durch  $(a', a'')$  bzw.  $(z', z'')$  ersetzt,
- (2) entsprechend werden Quantifikationen  $\forall z \rho$  und  $\exists z \rho$  durch  $\forall z' z'' (S(z', z'') \Rightarrow \rho)$  bzw.  $\exists z' z'' (S(z', z'') \wedge \rho)$  ersetzt,
- (3) die Primformeln  $B((u', u'')(v', v'')(w', w''))$  werden ersetzt durch  $\exists t (0 \leq t \leq 1 \wedge v = tu + (1-t)w)$ <sup>2)</sup>,

<sup>1)</sup> D.h. als einziger Grundbegriff tritt die Zwischenbeziehung  $B$  auf und die Quantifikation läuft nur über Punkte.

<sup>2)</sup> Eine Gleichung  $a = b$  meint natürlich die Konjunktion  $a' = b' \wedge a'' = b''$ .

- (4) sind  $\varphi^*(x', x'')$  bzw.  $\psi^*(y', y'')$  die resultierenden Formeln, so setzen wir schließlich

$$\alpha(r) : \equiv \exists x' x'' (\varphi^*(x', x'') \wedge x = x_0 + r(y_0 - x_0))^{1)}$$

$$\beta(s) : \equiv \exists y' y'' (\psi^*(y', y'') \wedge y = x_0 + s(y_0 - x_0))^{1)}.$$

Die Umkehrung bereitet erheblich größere technische Schwierigkeiten. Sei dazu  $S \subset R$  konvex und offen,  $R$  reell abgeschlossen und außerdem  $S$  ein Modell von  $GA_2$ . Es gilt jetzt die Richtigkeit von  $C^1$  in  $S$  zu benutzen, um zu zeigen, daß in  $R$  jeder  $S$ -definierbare Schnitt realisierbar ist. Wir haben also eine Übertragung eines Schnittes von  $R$  in das Modell  $S$  vorzunehmen und müssen dort die arithmetischen Operationen geometrisch beschreiben.

Es ist klar, daß durch Anwendung von affinen Transformationen im  $R^2$  die folgende Situation keine Beschränkung der Allgemeinheit darstellt:

- (i) die arithmetischen Formeln  $\alpha$  und  $\beta$  definieren unter Benutzung eines 2-stelligen Prädikates  $S$  zwei nicht-leere Teilmengen von  $R$  im Intervall  $[0, 1]$ ,
- (ii) die konvexe offene Menge  $S$  enthält die Punkte  $e_0 = (0, 0)$ ,  $e_1 = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ,  $e_\infty = (1, 0)$ ,  $e_\omega = (0, 1)$  und  $e = (1, -1)$ .

Wir denken uns jetzt die affine Ebene  $R^2$  in die projektive Ebene  $\mathbf{P}_R^2$  eingebettet und bilden mit einer projektiven Transformation  $f$  die uneigentliche Gerade des  $R^2$  im  $\mathbf{P}_R^2$  auf die Gerade durch  $e_\omega$  und  $e_\infty$  ab, wobei  $e_0$  in sich überführt werden soll. Diese Abbildung kann für  $(x', x'') \in R^2$  etwa durch

$$f(x', x'') = \left( \frac{x'}{1 + x' + x''}, \frac{x''}{1 + x' + x''} \right)$$

beschrieben werden. Die Abbildung  $f$  bildet also den Quadranten  $0 \leq x', x''$  auf das Dreieck  $e_0, e_\infty, e_\omega$  ab, das im Innern von  $S$  liegt. Insbesondere bildet  $f$  das Intervall  $[0, 1]$  von  $R$  auf die Strecke  $[e_0, e_1]$  in  $S$  ab<sup>2)</sup>. Damit liegen die  $f$ -Bilder des durch  $\alpha$  und  $\beta$  definierten Schnittes in  $S$ . Es bleibt also noch die Übersetzung der arithmetischen Operationen in die geometrische Sprache von  $S$ .

<sup>1)</sup> Eine Gleichung  $a=b$  meint natürlich die Konjunktion  $a'=b' \wedge a''=b''$ .

<sup>2)</sup> Dabei wird wie üblich  $R$  durch  $r \mapsto (r, 0)$  in  $R^2$  eingebettet.

Da wir nur für nicht-negative  $r \in R$  garantieren können, daß ihre  $f$ -Bilder in  $S$  liegen, ersetzen wir die Formeln  $\alpha$  und  $\beta$  durch gleichwertige Formeln (die wir wieder mit  $\alpha$  und  $\beta$  bezeichnen wollen), in denen jedoch nur über die Elemente aus  $P = \{r \in R \mid r \geq 0\}$  quantifiziert wird. Es ist klar, wie dies zu geschehen hat: statt von einem Körperelement  $r$  sprechen wir von einer Äquivalenzklasse  $\langle r_1, r_2 \rangle / \sim$ , wobei für  $r_1, r_2, s_1, s_2 \in P$  definiert wird

$$\langle r_1, r_2 \rangle \sim \langle s_1, s_2 \rangle : \Leftrightarrow r_1 + s_2 = s_1 + r_2$$

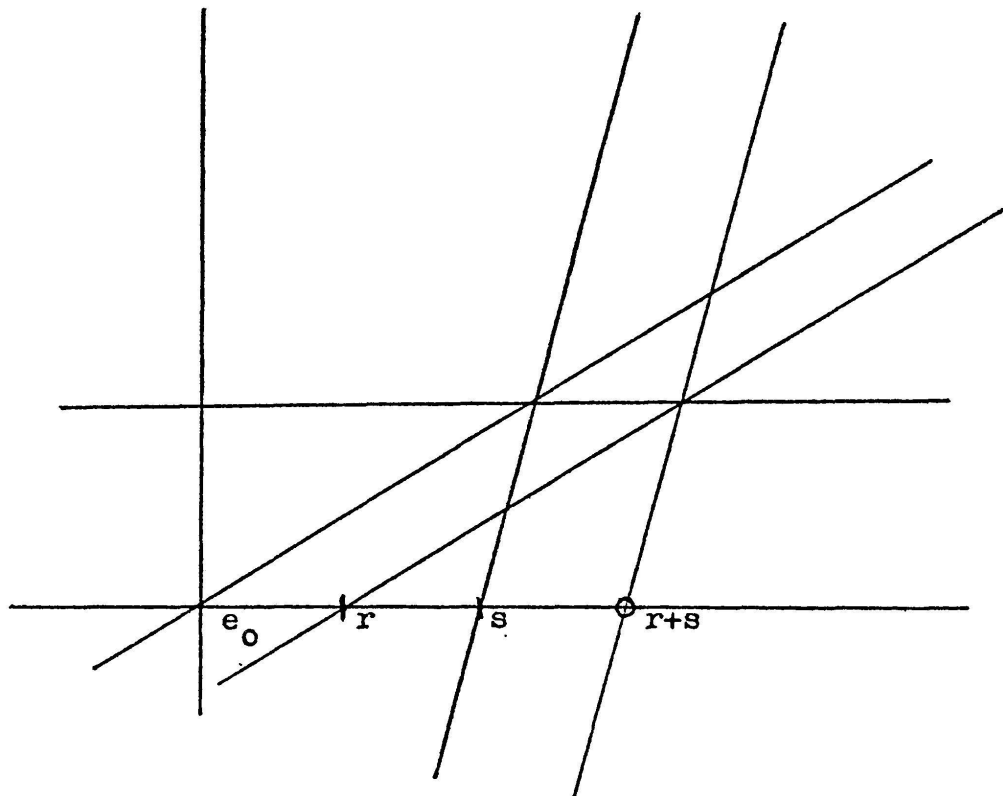
In den Formeln  $\alpha$  und  $\beta$  taucht jetzt natürlich das ursprünglich 2-stellige Prädikat  $S$  als vierstelliges auf:

$$S(\langle r_1, r_2 \rangle, \langle s_1, s_2 \rangle)$$

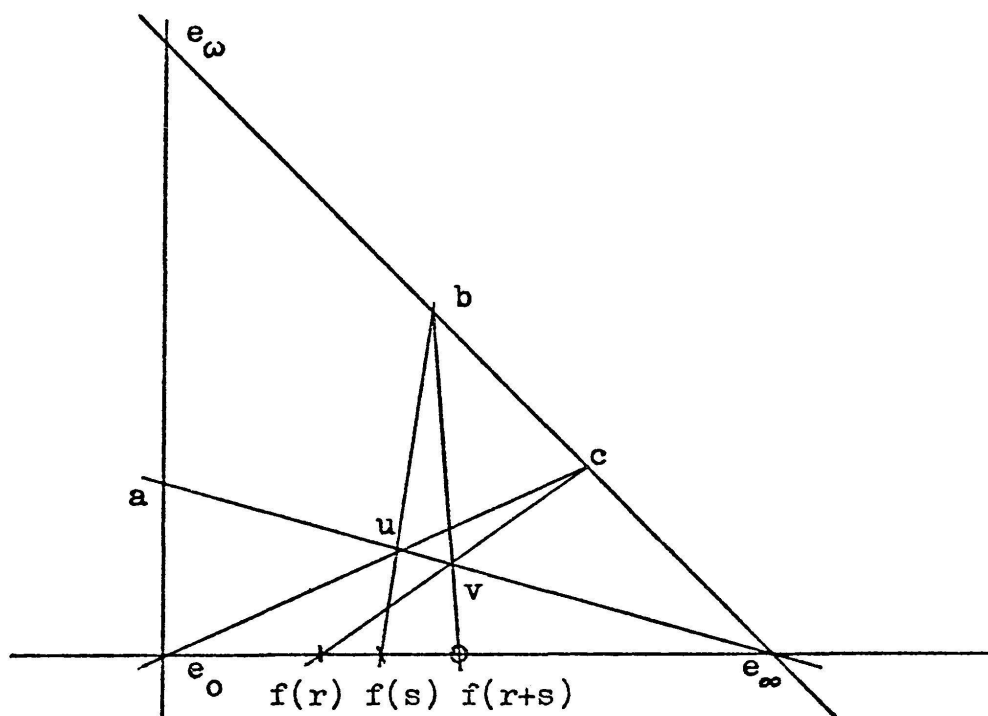
Wir haben also statt (i) jetzt:

- (i') die Formeln  $\alpha$  und  $\beta$  enthalten nur Quantifikationen über Elemente aus  $P$ , Parameter aus  $P$ , das vierstellige Prädikat  $S(\langle r_1, r_2 \rangle, \langle s_1, s_2 \rangle)$  und definieren nicht-leere Mengen im Intervall  $[0, 1]$ .

Sind nun  $r, s, t \in P$  gegeben, so läßt sich die Beziehung  $r + s = t$  im Quadranten  $0 \leq x', x''$  bekanntlich rein affin beschreiben:



Wenden wir die projektive Abbildung  $f$  an, so wird daraus:



Bezeichnet dann  $x \oplus y = z$  die folgende geometrische Formel:

$$\exists abcuv [B(e_0ae_\omega) \wedge e_0 \neq a \neq e_\omega \wedge B(e_\omega be_\infty) \wedge b \neq e_\infty \wedge B(yub) \wedge B(aue_\infty) \wedge B(e_0uc) \wedge B(ave_\infty) \wedge B(xvc) \wedge B(e_\omega ce_\infty) \wedge B(zvb)],$$

so ist klar, daß gilt:

$$f(r) \oplus f(s) = f(r+s)$$

Analog läßt sich die Multiplikation  $\odot$  von Elementen aus  $[e_0, e_\infty]$  rein geometrisch in  $S$  definieren. Es gilt dann

$$f(r) \odot f(s) = f(r \cdot s)$$

Es fehlt jetzt noch die Übersetzung von

$$S(\langle r_1, r_2 \rangle, \langle s_1, s_2 \rangle)$$

Wir suchen eine geometrische Formel  $\sigma(x_1, x_2; y_1, y_2)$  mit der Eigenschaft:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma(f(r_1), f(r_2); f(s_1), f(s_2)) \\ \text{gilt in } S \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} S(\langle r_1, r_2 \rangle, \langle s_1, s_2 \rangle) \\ \text{gilt in } (R, S) \end{array} \right.$$

Die Formel  $\sigma$  muß also in  $S$  ausdrücken, daß  $\langle x_1, x_2 \rangle$  und  $\langle y_1, y_2 \rangle$  die  $f$ -Bilder der affinen Koordinaten  $\langle r_1, r_2 \rangle$  und  $\langle s_1, s_2 \rangle$  eines Punktes aus  $S$  sind. Dabei genügt es natürlich, wenn

$$\langle x_1, x_2 \rangle \approx \langle f(r_1), f(r_2) \rangle \text{ und } \langle y_1, y_2 \rangle \approx \langle f(s_1), f(s_2) \rangle$$

gilt, wobei  $\approx$  die analog zu  $\sim$  mit  $\oplus$  in  $[e_0, e_\infty]$  gebildete Äquivalenzrelation ist. Nach Szczerba-Tarski [S-T<sub>2</sub>], §5 läßt sich eine Formel  $K_5(z; x_1, x_2; y_1, y_2)$  angeben, die für  $z, x_1, x_2, y_1, y_2 \in S$  gerade besagt, daß

$$(f(z'), f(z'')) = (\langle x_1, x_2 \rangle / \approx, \langle y_1, y_2 \rangle / \approx)$$

ist. Wir können also

$$\sigma(x_1, x_2; y_1, y_2) : \equiv \exists z K_5(z; x_1, x_2; y_1, y_2)$$

setzen.

Nach diesen Ausführungen dürfte klar sein, daß die folgende Übersetzungsvorschrift für die Formeln  $\alpha$  und  $\beta$  einen geometrisch definierten Schnitt auf  $[e_0, e_1]$  liefert, dessen Realisierung in  $S$  eine Realisierung des ursprünglichen Schnittes auf  $[0, 1]$  nach sich zieht:

- (1) ersetze in  $\alpha$  und  $\beta$  Quantifikationen  $\forall x \rho$  bzw.  $\exists x \rho$  durch  $\forall x (B(e_0 x e_\infty) \wedge x \neq e_\infty \Rightarrow \rho)$  bzw.  $\exists x (B(e_0 x e_\infty) \wedge x \neq e_\infty \wedge \rho)$ ,
- (2) ersetze die Teilformeln  $u + v = w$  und  $u \cdot v = w$  durch  $u \oplus v = w$  bzw.  $u \odot v = w$ ,
- (3) ersetze die Teilformeln  $S(\langle u_1, u_2 \rangle, \langle v_1, v_2 \rangle)$  durch  $\sigma(u_1, u_2; v_1, v_2)$ ,
- (4) ersetze Parameter  $r$  durch  $f(r)$ .

### 3. DIE NICHT-CHARAKTERISIERBARKEIT

Wir wollen nun den im 1. Abschnitt formulierten Nicht-Charakterisierbarkeitssatz beweisen, indem wir ihn auf ein Resultat von R. Montague in [M] zurückführen.

Dazu betrachten wir zuerst einen reell abgeschlossenen Körper  $R$  mit einer Teilmenge  $N$ , die die folgenden Bedingungen erfüllen soll:

- (a)  $0 \in N$  und  $r \in N \Rightarrow r + 1 \in N$
- (b)  $r, s \in N, r < s \Rightarrow r + 1 \leq s$
- (c)  $(\forall r \in R, r \geq 0) (\exists t \in N) t \leq r < t + 1$

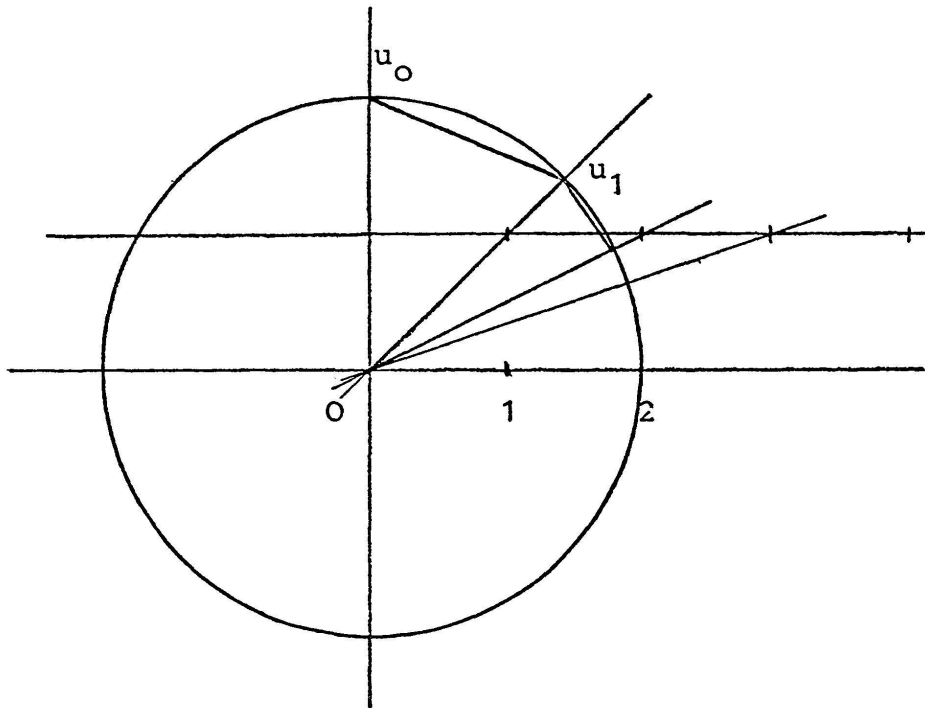
Die Menge  $N$  enthält dann alle natürlichen Zahlen, ist jedoch, falls  $R$  nicht-archimedisch ist, nicht eindeutig festgelegt. Mit Hilfe von  $N$  definieren wir die folgende Teilmenge  $S_N^R$  von  $R^2$ :

$$(x', x'') \in S_N^R : \Leftrightarrow [(x' \leq 0 \vee x'' \leq 0) \wedge x'^2 + x''^2 < 4] \vee \left[ 0 < x', x'' \wedge (\exists t \in N) t \leq \frac{x'}{x''} < t + 1 \wedge (x', x'') \in \Delta_t \right],$$

wobei  $\Delta_t$  das Innere des Dreieckes mit den Eckpunkten  $(0, 0) = 0$ ,

$$\left( \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{2}{\sqrt{1+t^2}} \right) = u_t, \quad \left( \frac{2(t+1)}{\sqrt{1+(t+1)^2}}, \frac{2}{\sqrt{1+(t+1)^2}} \right) = u_{t+1},$$

mit Einschluß der offenen Strecke von 0 nach  $u_t$  bezeichnet.



Wegen (a)-(c) ist  $S_N^R$  offensichtlich konvex und offen.

**LEMMA.** *Es sei  $R$  reell abgeschlossen und  $N \subset R$  erfülle (a)-(c). Dann ist  $S_N^R$  genau dann ein Modell von  $GA_2$ , falls in  $R$  jeder  $N$ -definierbare Schnitt realisiert ist.<sup>1)</sup>*

**Beweis.** Dieses Lemma folgt unmittelbar aus dem Charakterisierungslemma, wenn man beachtet daß nicht nur  $S_N^R$  mit Hilfe von  $N$ , sondern

<sup>1)</sup> Dies ist analog zu  $S$ -definierbar zu verstehen, d.h. jetzt darf in den definierenden arithmetischen Formeln  $\alpha$  und  $\beta$  ein zusätzliches 1-stelliges Prädikat für  $N$  benützt werden.

auch umgekehrt  $N$  mit Hilfe von  $S_N^R$  definiert werden kann. Es gilt nämlich für  $t \in R$ ,  $0 < t$

$$t \in N \Leftrightarrow (\forall 0 < r < 4) (\exists s) \left[ s^2 + \left( \frac{s}{t} \right)^2 = r \wedge \left( s, \frac{s}{t} \right) \in S_N^R \right],$$

d.h. die Gerade durch  $(0, 0)$  und  $(t, 1)$  reicht in  $S_N^R$  bis zum Rand des Kreises mit dem Radius 2. q.e.d.

Wir können jetzt den Satz beweisen: Angenommen, es gäbe eine Aussage  $\rho$  der Sprache der angeordneten Körper mit einem zusätzlichen 2-stelligen Prädikat für  $S$ , so daß für  $S \subset R^2$  mit  $S$  konvex und offen und  $R$  reell abgeschlossen  $S$  genau dann ein Modell von  $GA_2$  ist, falls  $\rho$  in  $(R, S)$  gilt. Für jedes  $N \subset R$ , das (a)-(c) erfüllt, heißt dies speziell

$$S_N^R \text{ Modell von } GA_2 \Leftrightarrow \text{in } (R, N) \text{ gilt } \rho^*,$$

wobei man  $\rho^*$  aus  $\rho$  erhält, indem man die Definition von  $S_N^R$  in  $\rho$  für das Prädikat  $S$  einsetzt.  $\rho^*$  hat jetzt das zusätzliche Prädikat  $N$ . Mit dem letzten Lemma erhalten wir dann:

Ist  $R$  reell abgeschlossen und hat  $N \subset R$   
die Eigenschaften (a)-(c), so ist genau dann  
in  $R$  jeder  $N$ -definierbare Schnitt realisiert,  
falls in  $(R, N)$  die einzelne Aussage  $\rho^*$  gilt.

Dies widerspricht jedoch Theorem 8 zusammen mit Theorem 6 in [M]. Montague zeigt nämlich dort in Theorem 6, daß die Theorie der reell abgeschlossenen Körper  $R$  mit Teilprädikat  $N$  mit (a)-(c), in dem jeder  $N$ -definierbare Schnitt realisiert ist, „strongly semantically closed“ ist. Nach Theorem 8 impliziert dies, daß das Schema der „reellen Abgeschlossenheit“ zusammen mit endlich vielen anderen Aussagen (z.B. (a)-(c) und  $\rho^*$ ) nicht ausreicht, diese Theorie zu axiomatisieren.

#### 4. SCHLUSSBEMERKUNGEN

##### 1. Der eben bewiesene Satz läßt sich verschärfen zu

*SATZ'. Es gibt keine Aussage  $\rho$  der schwachen 2. Stufe für angeordnete Körper mit zusätzlichem 2-stelligen Prädikat  $S$ , so dass für konvexe offene Teilmengen  $S \subset R^2$  und  $R$  reell abgeschlossen  $S$  genau dann ein Modell von  $GA_2$  ist, falls  $\rho$  in  $(R, S)$  gilt.*

Dabei meint „schwache 2. Stufe“, daß auch Quantifikationen über endliche Folgen von Körperelementen zugelassen sind.

Wir skizzieren den Beweis: Falls es eine solche Aussage  $\rho$  gäbe, so würde  $\rho$  insbesondere in  $(\mathbf{R}, S_N^{\mathbf{R}})$  gelten. Ersetzen wir  $S_N^{\mathbf{R}}$  in  $\rho$  durch seine Definition, so erhalten wir eine Aussage  $\rho^*$  der schwachen 2. Stufe, die in  $(\mathbf{R}, \mathbf{N})$  gelten würde. Aus Lemma 1 und 2 bei Apt in [A] läßt sich nun (mit einigem technischen Aufwand) folgern, daß es eine Zahl  $n \geq 2$  gibt, so daß die durch  $\Delta_n^1$ -Folgen definierten reellen Zahlen einen reell abgeschlossenen Teilkörper  $R_n$  von  $\mathbf{R}$  bilden, in dem einerseits  $\rho^*$  gelten würde, der aber andererseits nicht alle  $\mathbf{N}$ -definierbaren Schnitte realisiert. Damit müßte einerseits  $\rho$  in  $(R_n, S_N^{R_n})$  gelten, andererseits ist aber  $S_N^{R_n}$  nach dem Lemma im 3. Abschnitt kein Modell von  $GA_2$ .

Es sei noch bemerkt, daß die Lemmata 1 und 2 bei Apt unter der Voraussetzung  $V = L$  bewiesen werden. Der Satz' behält dann jedoch auch ohne diese Voraussetzung seine Gültigkeit.

2. Die Menge  $S_N^{\mathbf{R}}$  wurde schon von Szczerba und Tarski benützt, um die Unentscheidbarkeit von  $GA_2$  zu beweisen. Weiterhin wurde dieses Modell in Prestel-Szczerba [P-S] benützt, um zu zeigen, daß die Menge derjenigen Aussagen, die in allen Modellen von  $GA_2$  über  $\mathbf{R}$  gelten (d.h. in denen das Stetigkeitsaxiom  $C^2$  der 2. Stufe gilt) nicht rekursive axiomatisiert werden kann (also insbesondere größer als die Theorie  $GA_2$  ist). Dies heißt insbesondere, daß das „Elementarisierungsverfahren“ hier zu einer echt schwächeren Theorie führen muß. Schließlich wurde von Schwabhäuser in [Sch] für archimedisch geordnete, reell abgeschlossene Körper  $R$  eine Charakterisierung derjenigen  $S_N^R$  angekündigt, die Modelle von  $GA_2$  sind. Diese Charakterisierung folgt ebenfalls aus dem Lemma im 3. Abschnitt.

3. Es bleibt eine Frage aus [S-T<sub>1</sub>] ungelöst, nämlich, ob  $GA_2$  eine endlich axiomatisierbare Obertheorie besitzt.

4. Bei R. Fritsch und U. Friedrichsdorf möchte ich mich für viele informative und anregende Gespräche zu dem Thema dieser Arbeit bedanken.

#### LITERATUR

- [A] APT, K. R. Non-finite axiomatizability of the second order arithmetic. *Bull. Acad. Polon. Sci.* 20 (1972), 347-348.
- [C] COXETER, H. S. M. *Non-Euclidean geometry*. Toronto 1942.
- [H] HILBERT, D. *Grundlagen der Geometrie*. Leipzig 1913.
- [K] KLINGENBERG, W. *Grundlagen der Geometrie*. Mannheim 1971.



- [M] MONTAGUE, R. Semantical closure and non finite axiomatizability I. In : *Infinitistic Methods*, Warschau 1961, 286-302.
- [P-S] PRESTEL, A. and L. W. SZCZERBA. Non-axiomatizability of real general affine geometry. *Fund. Math.* 104 (1979), 193-202.
- [Sch] SCHWABHÄUSER, W. A class of undecidable models of general affine geometry. *Abstract, presented at the Int. Congress on Logic, Methodology and Philosophy of Science*, Hannover 1979.
- [S-T<sub>1</sub>] SZCZERBA, L. W. and A. TARSKI. Metamathematical properties of some affine geometries. In : *Logic, Methodology and Philosophy of Science, Proc. 1964 Int. Congress*, Amsterdam 1965, 166-178.
- [S-T<sub>2</sub>] ——— Metamathematical discussion of some affine geometries. *Fund. Math.* 104 (1979), 155-192.
- [S] SZMIELEW, W. Some metamathematical problems concerning elementary hyperbolic geometry. In : *The axiomatic method with special reference to geometry and physics*. Ed. L. Henkin, P. Suppes, A. Tarski, Amsterdam 1959, 30-52.
- [T] TARSKI, A. What is elementary geometry. In : *The axiomatic method with special reference to geometry and physics*. Ed. L. Henkin, P. Suppes, A. Tarski, Amsterdam 1959, 16-29.

( Reçu le 9 septembre 1980 )

Alexander Prestel

Fakultät für Mathematik  
Universität Konstanz  
Postfach 5560  
West Germany