Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 27 (1981)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: THÉORÈMES DE GAUSS-BONNET, DE HOPF, ET RÉSIDUS DES CONNEXIONS MÉTRIQUES A SINGULARITÉS

Autor: Lehmann, Daniel

Kapitel: 6. Connexions métriques plates a singularités isolées

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-51739

6. Connexions métriques plates a singularités isolées

D'une connexion ∇, on dit qu'elle est « plate » ou « sans courbure » si sa 2-forme de courbure (partout définie, au signe près si V n'est pas orientée) est nulle. Le théorème 3 implique en particulier que si $\chi_V \neq 0$, il n'existe pas sur V de métrique g avec connexion métrique sans courbure et sans singularité. Par contre il existera toujours sur V des connexions métriques plates à singularités isolées: on appelle ainsi la donnée d'un nombre *fini* de points $(x_1, ..., x_r)$ sur V, d'une métrique riemannienne g et d'une connexion métrique plate sur l'ouvert $U = V - \{x_1, ..., x_r\}$ de V. Les points x_λ sont appelés les singularités de ∇.

Exemple 1. Tout difféomorphisme du tronc de cône (ouvert) ou du tronc de cylindre (ouvert) sur la sphère S^2 privée de ses 2 pôles nord N et sud S permet de définir, par transport de structure, une métrique localement euclidienne sur $S^2 - \{S, N\}$, puisque cône et cylindre sont des surfaces développables: la courbure de la connexion de Levi-Civita correspondante est donc nulle.

Exemple 2. Soit X un champ de vecteurs sur V, n'ayant que des singularités isolées $x_1, ..., x_r$. Soit $g = \langle\, , \rangle$ une métrique riemannienne arbitraire sur $U = V - \{x_1, ..., x_r\}$ et A le champ de vecteurs $X/\| X \|$ sur U. Il existe alors une unique connexion métrique ∇ sur U telle que $\nabla A = 0$: si B est un champ de vecteurs unitaires orthogonal à A sur un ouvert parallélisable W de U, cette connexion ∇ est définie par $\omega_{(A,B)} = 0$. Cette connexion sur U est en particulier plate ($d\omega_{(A,B)} = 0$).

Remarque. On peut en particulier supposer la métrique g définie sur tout V. Admettant alors l'existence de champ de vecteurs X à singularités isolées sur toute surface compacte V (ou l'existence de fonctions de Morse), cet exemple 2 prouve que pour toute métrique g sur V, il existe une connexion plate avec un nombre fini de singularités, respectant g.

Exemple 3. Soient $(x_1, ..., x_r)$ des points de V tels que l'ouvert $U = V - \{x_1, ..., x_r\}$ soit parallélisable. Soit (A, B) un champ de repères sur U, et ω une 1-forme fermée sur U. On définit sur U une métrique g et une orientation en décrétant le champ de repères (A, B) orthonormé et direct. On définit une connexion métrique ∇ sur U en posant $\omega_{(A,B)} = \omega$

$$(\nabla B = \omega A,\ \nabla A = -\omega B)\,.$$

Puisque la 1-forme ω est fermée, la connexion ∇ est *plate*.

Soient $(x_1, ..., x_r)$ les singularités (isolées) d'une connexion *plate* ∇ sur $V - \{x_1, ..., x_r\}$ respectant une métrique g. Soit P_λ un pavé de V, inclus dans un ouvert parallélisable U_λ ne contenant aucune singularité sur son bord ∂P_λ, et en contenant exactement une, x_λ, en son intérieur. Soient (A_λ, B_λ) un champ de repères orthonormés sur $U_\lambda - \{x_\lambda\}$, et $\omega_\lambda = \omega_{(A_\lambda, B_\lambda)}$ la 1-forme fermée sur $U_\lambda - \{x_\lambda\}$ telle que

$$\nabla B_\lambda = \omega_\lambda \cdot A_\lambda ,$$
$$\nabla A_\lambda = -\omega_\lambda \cdot B_\lambda .$$

THÉORÈME 4.

$$\text{Rés}_{P_\lambda}(\nabla, g) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial P_\lambda} \omega_\lambda + I(A_\lambda, x_\lambda)$$

($I(A_\lambda, x_\lambda)$ indiquant l'indice du champ de vecteurs A_λ en x_λ).

COROLLAIRE. La définition du résidu ne dépend pas du choix du pavé P_λ satisfaisant aux conditions requises. (On notera encore Rés (∇, x_λ) ce résidu.)

Démonstration du corollaire. Si P'_λ est un autre pavé vérifiant les conditions, les courbes fermés ∂P_λ et $\partial P'_\lambda$ sont toutes deux de même indice 1 par rapport à x_λ (une fois choisie une orientation de U_λ). La forme ω_λ étant fermée, la formule de Stokes permet de conclure:

$$\int_{\partial P_\lambda} \omega_\lambda = \int_{\partial P'_\lambda} \omega_\lambda .$$

Quant à la définition de l'indice $I(A_\lambda, x_\lambda)$, on la suppose ici connue (et donc indépendante de P_λ). [Une définition et étude de cet indice, en bonne et due forme, pourrait éventuellement être faite ici dans un cours, si elle ne l'a pas été avant.]

Démonstration du théorème. Soit $\tilde{A}$ un champ de vecteurs sans singularités défini sur *tout* l'ouvert U_λ (y compris en x_λ). Posons $A' = \tilde{A}/\|\tilde{A}\|$ sur $U_\lambda - \{x_\lambda\}$, et soit B'_λ le champ de vecteur sur $U_\lambda - \{x_\lambda\}$ déduit de A'_λ par rotation de $+\pi/2$ (pour l'orientation de $U_\lambda - \{x_\lambda\}$ définie par (A_λ, B_λ)). Soient enfin $\theta_\lambda : U_\lambda - \{x_\lambda\} \to \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ l'angle de rotation permettant de passer de (A'_λ, B'_λ) à (A_λ, B_λ), et $\omega' = \omega_{(A'_\lambda, B'_\lambda)}$. De la formule (v) du § 2, on déduit: $\omega'_\lambda = \omega_\lambda + d\theta_\lambda$. Du théorème 1, on déduit

$$\text{Rés}_{P_\lambda}(\nabla, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial P_\lambda} \omega'_\lambda .$$

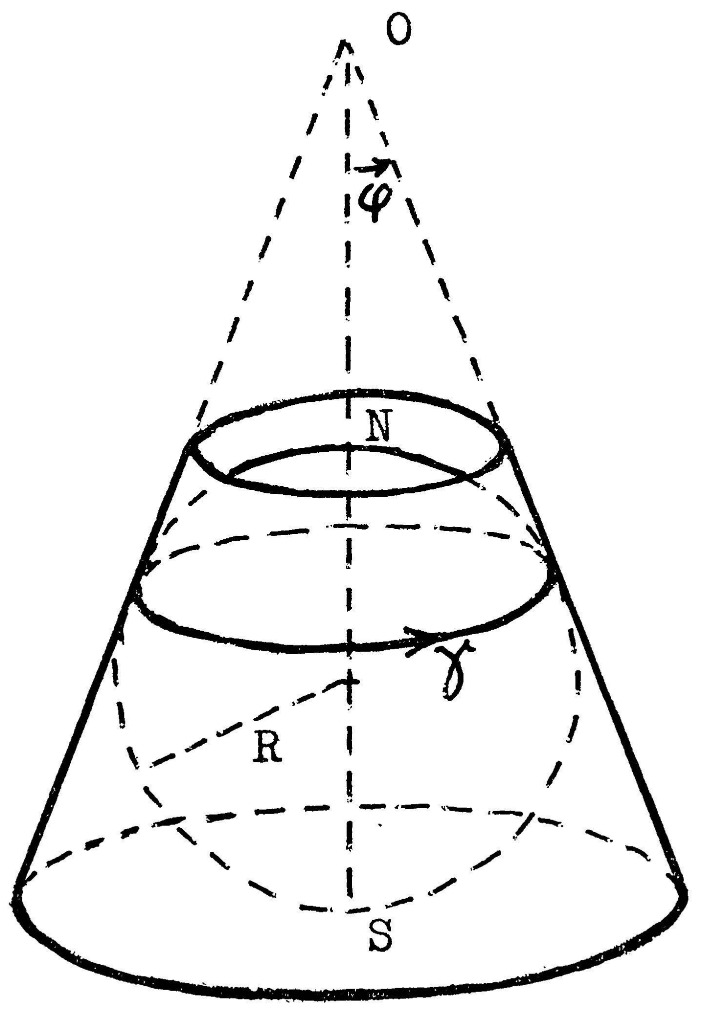
Puisque $I(A_\lambda, x_\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial P_\lambda} d\theta_\lambda$, le théorème 4 en résulte.

Remarque. Notons $h_\lambda \in \mathbf{R}/2\pi\,\mathbf{Z}\,(= SO(2))$ l'holonomie de la connexion métrique plate ∇ le long du lacet ∂P_λ entourant x_λ. [Puisque ∂P_λ n'est pas simplement connexe dans le domaine U_λ de ∇, cette holonomie n'a aucune raison d'être triviale.] On vérifie aisément:

$$h_\lambda = 2\pi \text{ Rés}(\nabla, x_\lambda) \quad (\text{mod } 2\pi\,\mathbf{Z}) .$$

La notion de résidu est donc plus *précise* que celle d'holonomie.

Appliquons le théorème des résidus à chacun des exemples 1, 2 et 3 ci-dessus.



Exemple 1. Notons γ la courbe de contact du tronc de cône avec la sphère, φ $(0 < \varphi < \pi/2)$ l'angle au sommet du cône et R le rayon de la sphère. Par développement du tronc de cône dans le plan, γ se développe suivant un arc de cercle d'angle

$$\theta = \frac{2\pi R \cos\varphi}{R \operatorname{cotg} \varphi} = 2\pi \sin\varphi .$$

Donc

$$\int_\lambda \rho_g\, ds = 2\pi \sin\varphi .$$

γ entourant à la fois les pôles N et S, mais devant être muni d'orientations différentes, on en déduit, avec des notations évidentes:

$$\begin{cases} \text{Rés}\,(\nabla, N) = 1 + \sin \varphi \\ \text{Rés}\,(\nabla, S) = 1 - \sin \varphi \end{cases}$$

$$\text{Rés}\,(\nabla, N) + \text{Rés}\,(\nabla, S) = 2 = \chi_{S^2} .$$

Remarque. Pour le cylindre, un calcul analogue donne

$$\text{Rés}\,(\nabla, N) = \text{Rés}\,(\nabla, S) = 1 ,$$

car γ se développe alors sur le plan suivant un segment de droite de sorte que $\int_\lambda \rho_g \, ds = 0$.

Exemple 2. Soit X un champ de vecteurs à singularités isolées $(x_1, ..., x_r)$, et g une métrique riemannienne sur la surface compacte V.

THÉORÈME 5 *(Hopf).*

$$\sum_{\lambda=1}^{r} I(X, x_\lambda) = \chi_V .$$

Posons en effet $A = X/\|X\|$ sur $U = V - \{x_1, ..., x_\lambda\}$. Soit U_λ un voisinage de x_λ dans V, et B_λ un champ de vecteurs sur $U_\lambda - \{x_\lambda\}$ tel que (A, B_λ) définisse un champ de repères orthonormés sur $U_\lambda - \{x_\lambda\}$: par définition de la connexion métrique plate de l'exemple 2, $\nabla A = 0$, soit $\omega_{(A, B_\lambda)} = 0$. On déduit du théorème 4 que

$$\text{Rés}\,(\nabla, x_\lambda) = I(A, x_\lambda) = I(X, x_\lambda)$$

d'où le théorème 5, par application du théorème des résidus.

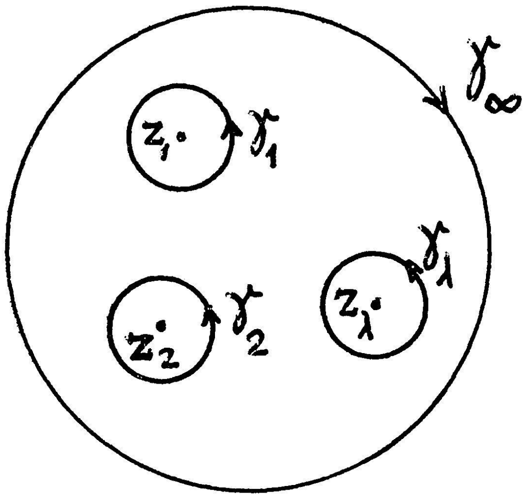
Exemple 3. Nous allons voir un cas particulier de la situation décrite à l'exemple 3, explicitant le lien entre les résidus des connexions métriques plates à singularités isolées, et les résidus des fonctions méromorphes.

Soit $f \colon \mathbf{C} - \{z_1, ..., z_r\} \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe. Par compactification à l'aide d'un point à l'infini, $U = \mathbf{C} - \{z_1, ..., z_r\}$ peut encore être considéré comme $S^2 - \{\infty, z_1, ..., z_r\}$.

Posons: $f(z)\,dz = \omega_1 + i\,\omega_2$ avec

$$\begin{cases} \omega_1 = P\,dx - Q\,dy \\ \omega_2 = Q\,dx + P\,dy \end{cases}$$

où P (resp. Q) désignent comme d'habitude les parties réelle et imaginaire de f, et $z = x + iy$.



Soit $A = \dfrac{\partial}{\partial x}$ et $B = \dfrac{\partial}{\partial y}$ et ∇_1, ∇_2 les deux connexions métriques associées définies sur U respectivement par ω_1 et ω_2. Dire que f est holomorphe signifie que les formes ω_1 et ω_2 sont fermées, et que par conséquent les connexions ∇_1 et ∇_2 sont plates. Le résidu, au sens habituel des fonctions méromorphes, est donné par

$$R(f, z_\lambda) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_\lambda} f(z)\, dz$$

$$R(f, \infty) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_\infty} f(z)\, dz$$

Théorème 6.

$$\text{Rés}\,(\nabla_1, z_\lambda) + i\,\text{Rés}\,(\nabla_2, z_\lambda) = i\, R(f, z_\lambda)\,,$$

$$\text{Rés}\,(\nabla, \infty) + i\,\text{Rés}\,(A_2, \infty) = 2(1+i) + i\,R(f, \infty)\,.$$

Appliquons en effet le théorème 4 avec $A = \dfrac{\partial}{\partial x}$, $B = \dfrac{\partial}{\partial y}$

1) Puisque le champ de repères (A, B) est prolongeable en tout point z situé à distance finie, le théorème 4 (ou 1) s'écrit:

$$\text{Rés}\,(\nabla_1, z_\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_\lambda} \omega_1\,,$$

$$\text{Rés}\,(\nabla_2, z_\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_\lambda} \omega_2\,,$$

et

$$\text{Rés}\,(\nabla_1, z_\lambda) + i\,\text{Rés}\,(\nabla_2, z_\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_\lambda} f(z)\, dz = i\, R(f, z_\lambda)$$

2) Puisque $I\left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \infty\right) = I\left(\dfrac{\partial}{\partial y}, \infty\right) = 2$, le théorème 4 s'écrit maintenant:

$$\text{Rés}\,(\nabla_1, \infty) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_\infty} \omega_1 + 2 \,,$$

$$\text{Rés}\,(\nabla_2, \infty) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_\infty} \omega_2 + 2 \,.$$

Donc

$$\begin{aligned} \text{Rés}\,(\nabla_1, \infty) + i\, \text{Rés}\,(\nabla_2, \infty) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_\infty} f(z)\, dz + 2(1+i) \\ &= i\, R(f, \infty) + 2(1+i) \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

RÉFÉRENCES

[1] Berger, M. et B. Gostiaux. *Géométrie différentielle*. Ed. Colin, 1971.
[2] De Rham, G. *Variétés différentielles*. Ed. Hermann, 1955.
[3] Hicks, N. J. *Notes on differential Geometry*. Ed. Van Nostrand, 1956.
[4] Lehmann, D. *Résidus des connexions à singularités* (à paraître aux *Annales de L'institut Fourier*).
[5] —— *Cours de Géométrie et Topologie en maîtrise* (polycopiés de l'U.E.R. de Mathématiques de l'Université de Lille 1), 1979-80, chap. V.
[6] Lelong-Ferrand, J. *Géométrie différentielle*. Ed. Masson, 1963.
[7] Thorpe, J. A. *Elementary topics in differential Geometry*. Ed. Springer, 1979.

(Reçu le 18 juillet 1980)

Daniel Lehmann

U.E.R. de Mathématiques pures et appliquées
Université des Sciences et Techniques de Lille
F-59650 Villeneuve d'Ascq