

<b>Zeitschrift:</b>	L'Enseignement Mathématique
<b>Herausgeber:</b>	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
<b>Band:</b>	27 (1981)
<b>Heft:</b>	1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
<b>Artikel:</b>	THÉORÈMES DE GAUSS-BONNET, DE HOPF, ET RÉSIDUS DES CONNEXIONS MÉTRIQUES A SINGULARITÉS
<b>Autor:</b>	Lehmann, Daniel
<b>Kapitel:</b>	3. Résidus et formule locale de Gauss-Bonnet
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-51739">https://doi.org/10.5169/seals-51739</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

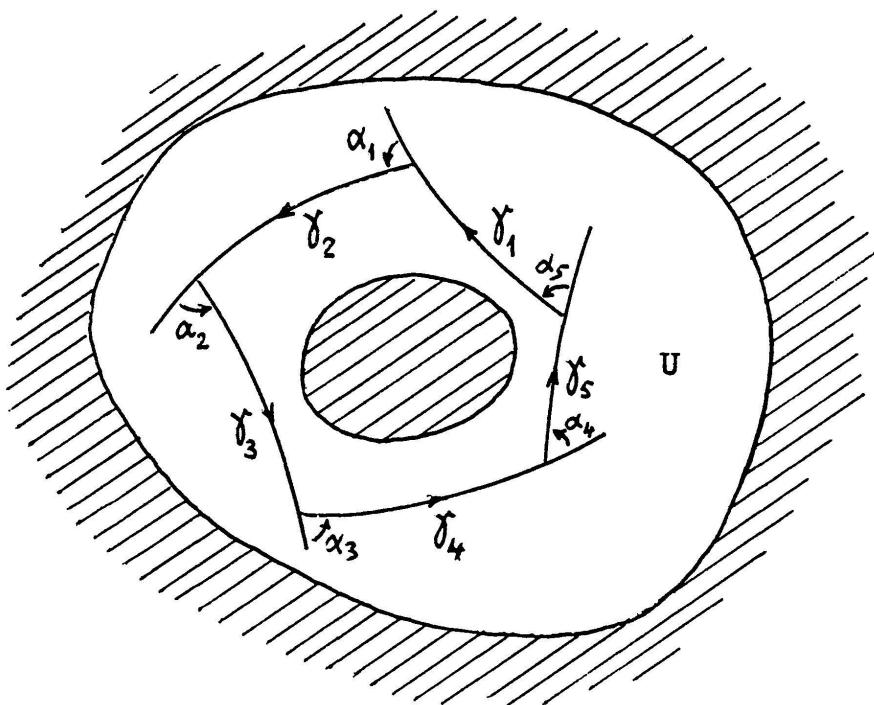
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 25.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

### 3. RÉSIDUS ET FORMULE LOCALE DE GAUSS-BONNET

Soit  $P$  un pavé différentiable de  $V$ , dont nous supposerons le bord inclus dans un ouvert parallélisable  $U$  de  $V$ .



Supposons l'ouvert  $U$  muni d'une métrique riemannienne  $g$ , et d'une connexion  $\nabla$  respectant cette métrique.

*Choisissons une orientation de  $U$  et notons  $\partial P = \Sigma \gamma_i$  le bord orienté de  $P$  (orientation de  $\partial P$  compatible avec celle de  $U$  au sens habituel).*

Notons enfin  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  les discontinuités angulaires de  $\partial P$  avec la convention suivante:  $\alpha_i$  désigne la mesure comprise entre  $-\pi$  et  $+\pi$  de l'angle orienté  $\left( \frac{d\gamma_i}{ds} \right)_{M_i}, \left( \frac{d\gamma_{i+1}}{ds} \right)_{M_i}$  où  $M_i$  désigne le sommet de  $P$  qui est extrémité de  $\gamma_i$  et origine de  $\gamma_{i+1}$ .

*Définition.* On appellera résidu de  $(\nabla, g)$  en  $P$  le nombre

$$\text{Rés}_P(\nabla, g) = 1 - \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{\partial P} \rho_g ds + \sum_P \alpha_i \right].$$

**THÉORÈME 1.** (i) La définition ci-dessus du résidu ne dépend pas du choix de l'orientation de  $U$ .

(ii) Soit  $\tilde{U}$  un ouvert contenant  $U$  et contenant *tout l'intérieur* de  $P$ ; soit  $\tilde{A}$  un champ de vecteurs *sans singularité* sur  $\tilde{U}$ , et définissons sur  $U$  un champ de repères orthonormés  $(A, B)$  en imposant à  $A$  d'être positivement colinéaire à  $\tilde{A}$  ( $A = \tilde{A}/\|\tilde{A}\|$ ) sur  $U$ . Posant  $\omega = \omega_{(A, B)}$ , on a alors:

$$\text{Rés}_P(\nabla, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial P} \omega.$$

**COROLLAIRE (formule locale de Gauss-Bonnet).** Si l'intérieur de  $P$  est tout entier inclus dans  $U$ ,  $\text{Rés}_P(\nabla, g) = \frac{1}{2\pi} \iint_P \Omega$  ( $\Omega$  désignant la courbure de  $\nabla$ ).

Pour tout arc différentiable  $\gamma$  de  $\partial P$ , dont on note  $\tau$  le champ des vecteurs tangents, posons en effet

$$\varphi(s) = (A_{\gamma(s)}, \tau(s)) \in \mathbf{R}/2\pi \mathbf{Z}.$$

D'après 2 (vii),  $\rho_g = \frac{d\varphi}{ds} - \omega(\tau)$ .

Donc

$$\int_{\partial P} \rho_g(s) ds = \sum_i \int_{\gamma_i} d\varphi - \int_{\partial P} \omega.$$

Mais  $\sum_i \int_{\gamma_i} d\varphi = 2\pi - \sum_i \alpha_i$  puisque  $\tilde{A}$  est défini sur tout l'intérieur de  $P$ , d'où la partie (ii) du théorème.

Supposons maintenant que l'on change l'orientation de  $U$ .

1)  $\int_{\partial P} \rho_g ds$  ne change pas: en effet l'orientation de  $\partial P$  est changée, donc  $\tau$  est changé en  $-\tau$ ; l'orientation de  $U$  est changée aussi, donc  $v$  ne change pas.  $\nabla_{(-\tau)}(-\tau) = \nabla_\tau \tau = \rho_g v$  donc  $\rho_g$  ne change pas;  $ds$  est changé en  $-ds$ , et

$$\int_{-\gamma} \rho_g(-ds) = \int_{\gamma} \rho_g ds.$$

2) Les discontinuités angulaires  $\alpha_i$  ne changent pas: en effet l'angle en  $M_i$

$$\left( \left( \frac{d\gamma_i}{ds} \right)_{M_i}, \quad \left( \frac{d\gamma_{i+1}}{ds} \right)_{M_i} \right)$$

est changé en

$$\left( -\left( \frac{d\gamma_{i+1}}{ds} \right)_{M_i}, -\left( \frac{d\gamma_i}{ds} \right)_{M_i} \right) = \left( \left( \frac{d\gamma_{i+1}}{ds} \right)_{M_i}, \left( \frac{d\gamma_i}{ds} \right)_{M_i} \right);$$

dans le groupe des angles, l'angle est changé en son opposé, mais la mesure des angles dépendant de l'orientation de  $T_{M_i}(V)$  et celle-ci étant changée,

$\alpha_i$  = mesure par rapport à l'ancienne orientation (comprise entre  $-\pi$  et  $+\pi$ ) de l'angle

$$\left( \left( \frac{d\gamma_i}{ds} \right)_{M_i}, \left( \frac{d\gamma_{i+1}}{ds} \right)_{M_i} \right)$$

= mesure par rapport à la nouvelle orientation de

$$\left( \left( \frac{d\gamma_{i+1}}{ds} \right)_{M_i}, \left( \frac{d\gamma_i}{ds} \right)_{M_i} \right).$$

Donc  $\alpha_i$  ne change pas.

Ceci achève la démonstration de la partie (i) du théorème.

Si l'intérieur de  $P$  est tout entier inclus dans  $U$ , la formule de Green-Riemann s'écrit:

$$\int_{\partial P} \omega = \iint_P d\omega = \iint_P \Omega,$$

d'où le corollaire.

*Remarque.* Si on change l'orientation de  $U$ , on change celle de  $P$ , et  $\Omega$  est changé en  $-\Omega$ , de sorte que  $\iint_{P^-} (-\Omega) = \iint_P \Omega$  ne change pas.

#### 4. THÉORÈME DES RÉSIDUS

Supposons désormais la surface  $V$  *compacte* (non nécessairement orientable), et soit  $U = V - \mathcal{S}$  un ouvert de  $V$ . On munit  $U$  d'une métrique riemannienne  $g$ , et d'une connexion  $\nabla$  respectant cette métrique.

On supposera en outre qu'il existe un pavage différentiable ( $P_1, \dots, P_F$ ) de  $V$  ayant les propriétés suivantes:

- (i) chaque pavé  $P_\lambda$  est inclus dans un ouvert parallélisable  $U_\lambda$  de  $V$ ,
- (ii)  $\mathcal{S} = \bigsqcup_{\lambda=1}^F \mathcal{S}_\lambda$  où  $\mathcal{S}_\lambda$  est un fermé de  $V$  (éventuellement vide) inclus dans l'intérieur du pavé  $P_\lambda$ .

Notons  $F, S$  et  $A$  le nombre de faces, sommets et arêtes de ce pavage. On a alors le