Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 27 (1981)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: THÉORÈMES DE GAUSS-BONNET, DE HOPF, ET RÉSIDUS DES CONNEXIONS MÉTRIQUES A SINGULARITÉS

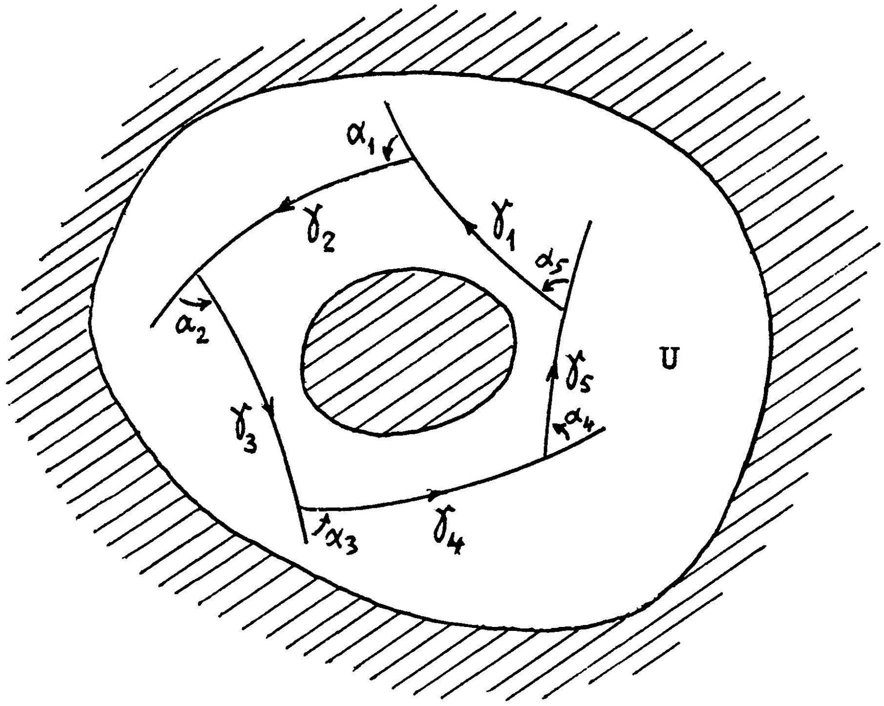
Autor: Lehmann, Daniel

Kapitel: 3. Résidus et formule locale de Gauss-Bonnet

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-51739

3. Résidus et formule locale de Gauss-Bonnet

Soit P un pavé différentiable de V, dont nous supposerons le bord inclus dans un ouvert parallélisable U de V.



Supposons l'ouvert U muni d'une métrique riemannienne g, et d'une connexion ∇ respectant cette métrique.

Choisissons une orientation de U et notons $\partial P = \Sigma \gamma_i$ le bord orienté de P (orientation de ∂P compatible avec celle de U au sens habituel).

Notons enfin $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ les discontinuités angulaires de ∂P avec la convention suivante: α_i désigne la mesure comprise entre $-\pi$ et $+\pi$ de l'angle orienté $\left(\left(\frac{d\gamma_i}{ds}\right)_{M_i}, \left(\frac{d\gamma_{i+1}}{ds}\right)_{M_i}\right)$ où M_i désigne le sommet de P qui est extrémité de γ_i et origine de γ_{i+1}.

Définition. On appellera résidu de (∇, g) en P le nombre

$$\text{Rés}_P(\nabla, g) = 1 - \frac{1}{2\pi}\left[\int_{\partial P} \rho_g \, ds + \sum_P \alpha_i\right].$$

Théorème 1. (i) La définition ci-dessus du résidu ne dépend pas du choix de l'orientation de U.

(ii) Soit $\tilde{U}$ un ouvert contenant U et contenant *tout l'intérieur* de P; soit $\tilde{A}$ un champ de vecteurs *sans singularité* sur $\tilde{U}$, et définissons sur U un champ de repères orthonormés (A, B) en imposant à A d'être positivement colinéaire à $\tilde{A}$ $(A = \tilde{A}/\|\tilde{A}\|)$ sur U. Posant $\omega = \omega_{(A,B)}$, on a alors:

$$\text{Rés}_P(\nabla, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial P} \omega .$$

Corollaire *(formule locale de Gauss-Bonnet)*. Si l'intérieur de P est tout entier inclus dans U, $\quad \text{Rés}_P(\nabla, g) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\iint_P \Omega \quad$ (Ω désignant la courbure de ∇).

Pour tout arc différentiable γ de ∂P, dont on note τ le champ des vecteurs tangents, posons en effet

$$\varphi(s) = (A_{\gamma(s)}, \tau_{(s)}) \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} .$$

D'après 2 (vii), $\rho_g = \dfrac{d\varphi}{ds} - \omega(\tau)$.

Donc

$$\int_{\partial P} \rho_g(s)\, ds = \sum_i \int_{\gamma_i} d\varphi - \int_{\partial P} \omega .$$

Mais $\sum_i \int_{\gamma_i} d\varphi = 2\pi - \sum_i \alpha_i$ puisque $\tilde{A}$ est défini sur tout l'intérieur de P, d'où la partie (ii) du théorème.

Supposons maintenant que l'on change l'orientation de U.

1) $\int_{\partial P} \rho_g\, ds$ ne change pas: en effet l'orientation de ∂P est changée, donc τ est changé en $-\tau$; l'orientation de U est changée aussi, donc v ne change pas. $\nabla_{(-\tau)}(-\tau) = \nabla_\tau \tau = \rho_g v$ donc ρ_g ne change pas; ds est changé en $-ds$, et

$$\int_{-\gamma} \rho_g(-ds) = \int_\gamma \rho_g\, ds .$$

2) Les discontinuités angulaires α_i ne changent pas: en effet l'angle en M_i

$$\left(\left(\frac{d\gamma_i}{ds}\right)_{M_i}, \left(\frac{d\gamma_{i+1}}{ds}\right)_{M_i}\right)$$

est changé en

$$\left(-\left(\frac{d\gamma_{i+1}}{ds}\right)_{M_i}, -\left(\frac{d\gamma_i}{ds}\right)_{M_i}\right) = \left(\left(\frac{d\gamma_{i+1}}{ds}\right)_{M_i}, \left(\frac{d\gamma_i}{ds}\right)_{M_i}\right):$$

dans le groupe des angles, l'angle est changé en son opposé, mais la mesure des angles dépendant de l'orientation de $T_{M_i}(V)$ et celle-ci étant changée,

α_i = mesure par rapport à l'ancienne orientation (comprise entre $-\pi$ et $+\pi$) de l'angle

$$\left(\left(\frac{d\gamma_i}{ds}\right)_{M_i}, \left(\frac{d\gamma_{i+1}}{ds}\right)_{M_i}\right)$$

= mesure par rapport à la nouvelle orientation de

$$\left(\left(\frac{d\gamma_{i+1}}{ds}\right)_{M_i}, \left(\frac{d\gamma_i}{ds}\right)_{M_i}\right).$$

Donc α_i ne change pas.

Ceci achève la démonstration de la partie (i) du théorème.

Si l'intérieur de P est tout entier inclus dans U, la formule de Green-Riemann s'écrit:

$$\int_{\partial P} \omega = \iint_P d\omega = \iint_P \Omega,$$

d'où le corollaire.

Remarque. Si on change l'orientation de U, on change celle de P, et Ω est changé en $-\Omega$, de sorte que $\iint_{P-}(-\Omega) = \iint_P \Omega$ ne change pas.

4. Théorème des résidus

Supposons désormais la surface V *compacte* (non nécessairement orientable), et soit $U = V - \mathscr{S}$ un ouvert de V. On munit U d'une métrique riemannienne g, et d'une connexion ∇ respectant cette métrique.

On supposera en outre qu'il existe un pavage différentiable $(P_1, \ldots, P_F)$ de V ayant les propriétés suivantes:

(i) chaque pavé P_λ est inclus dans un ouvert parallélisable U_λ de V,

(ii) $\mathscr{S} = \coprod_{\lambda=1}^{F} \mathscr{S}_\lambda$ où $\mathscr{S}_\lambda$ est un fermé de V (éventuellement vide) inclus dans l'intérieur du pavé P_λ.

Notons F, S et A le nombre de faces, sommets et arêtes de ce pavage.

On a alors le