Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 27 (1981)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: THÉORÈMES DE GAUSS-BONNET, DE HOPF, ET RÉSIDUS DES CONNEXIONS MÉTRIQUES A SINGULARITÉS

Autor: Lehmann, Daniel

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-51739

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 21.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

THÉORÈMES DE GAUSS-BONNET, DE HOPF, ET RÉSIDUS DES CONNEXIONS MÉTRIQUES A SINGULARITÉS

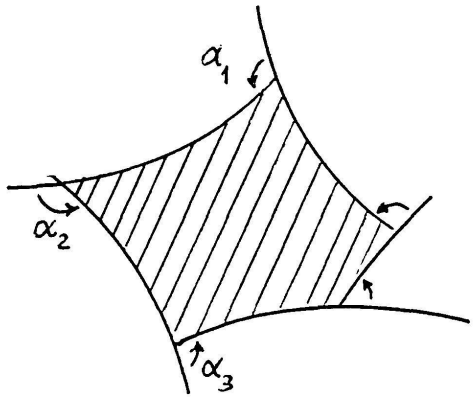
par Daniel LEHMANN [1])

1. INTRODUCTION

On connaît le « théorème local » de Gauss-Bonnet, sur une surface V munie d'une métrique riemannienne g:

$$\frac{1}{2\pi}\iint_P \Omega = 1 - \frac{1}{2\pi}\left[\int_{\partial P} \rho_g \, ds + \sum_P \alpha_i\right],$$

ρ_g désignant la courbure géodésique sur le bord ∂P d'un pavé P, α_i les discontinuités angulaires de ∂P et Ω la 2-forme de courbure d'une connexion ∇, quelconque (pas forcément celle de Levi-Civita), respectant la métrique g.



A partir de ce théorème local, on retrouve classiquement le « théorème global » de Gauss-Bonnet quand V est une surface compacte (orientée ou non):

$$\frac{1}{2\pi}\iint_V \Omega = \chi_V \qquad \text{(invariant d'Euler-Poincaré)},$$

en munissant V d'un pavage $(P_1, \ldots, P_\lambda, \ldots, P_F)$, et en décomposant l'intégrale $\iint_V \Omega$ sous la forme $\sum_{\lambda=1} \iint_{P\lambda} \Omega$.

Si l'on suppose, maintenant, que la métrique g et la connexion ne sont plus définies qu'au-dessus d'un ouvert $U = V - S$ contenant les sommets et les arêtes du pavage utilisé, autrement dit si $\mathscr{S} = \coprod_{\lambda=1}^{F} \mathscr{S}_\lambda$ où $\mathscr{S}_\lambda$

---

[1]) ERA au CNRS n° 07-590.

désigne un fermé (éventuellement vide) inclus dans l'intérieur du pavé P_λ, le terme de droite dans la formule locale de Gauss-Bonnet conserve une signification, bien que le terme de gauche $\frac{1}{2\pi}\iint_{P_\lambda} \Omega$ puisse ne plus en avoir: on appellera alors « résidu » de (∇, g) on P_λ l'expression

$$\text{Rés}_{P_\lambda}(\nabla, g) = 1 - \frac{1}{2\pi}\left[\int_{\partial P} \rho_g \, ds + \sum_{P\lambda} \alpha_i\right],$$

et on démontrera le « théorème des résidus »

$$\sum_{\lambda=1}^{F} \text{Rés}_{P_\lambda}(\nabla, g) = \chi_V ,$$

dont on verra qu'il contient comme cas particuliers, outre le théorème global de Gauss-Bonnet, le théorème de Hopf relatif à l'indice des champs de vecteurs. [Il contient d'ailleurs aussi la formule de Riemann-Hurwitz pour les revêtements ramifiés (cf. [4]).]

Plus généralement, pour les G-fibrés principaux différentiables $E \to V$ (G groupe de Lie), on peut étendre la théorie de Chern-Weil pour les classes caractéristiques réelles de dimension $\leqslant 2k$ (k entier >0) au cas de connexions définies seulement au-dessus du complémentaire $U = V - \mathscr{S}$ d'une partie fermée $\mathscr{S}$ de V vérifiant la propriété suivante: il existe une triangulation différentiable K de V dont le $2k-1$ squelette $sk^{2k-1}K$ ne rencontre pas $\mathscr{S}$. Lorsque $\mathscr{S} = \varnothing$, on retrouve évidemment la théorie classique de Chern-Weil. On retrouve par contre la théorie de l'obstruction à prolonger à $sk^{2k}K$ une section σ_1 de E définie au-dessus de $sk^{2k-1}K$, prenant pour $\mathscr{S}$ le complémentaire dans V d'un voisinage tubulaire ouvert U de $sk^{2k-1}K$ dans V, pour ω la connexion plate sur $E|_U$ associée à la trivialisation définie par une section différentiable σ de $E|_U$ dont la restriction à $sk^{2k-1}K$ est homotope à σ_1. (La théorie de Chern-Weil généralise le théorème de Gauss-Bonnet, tandis que la théorie de l'obstruction généralise le théorème de Hopf.)

Bien que cette généralisation ait été rédigée dans [4], il nous a semblé utile d'exposer à part le cas élémentaire de l'invariant d'Euler Poincaré des surfaces compactes, étant donné ses retombées dans l'enseignement universitaire « sous gradué » (cf. par exemple [1] [3] [5] [6] [7]).

2. Connexions métriques sur une surface (Rappels)

Soit V une surface différentiable (variété C^∞ de dimension 2), non nécessairement compacte pour le moment, et $g = \langle\, , \rangle$ une métrique riemannienne sur V.

Soit ∇ une *connexion métrique* sur V. Pour tout couple (X, Y) de champ de vecteurs, $\nabla_X Y$ désigne un autre champ de vecteurs

(i) dépendant $\mathscr{C}^\infty(V)$-linéairement de X ($\mathscr{C}^\infty(V)$ désignant l'algèbre des fonctions C^∞ de V dans $\mathbf{R}$),

(ii) dépendant additivement de Y,

(iii) vérifiant, pour toute $u \in \mathscr{C}^\infty(V)$,

$$\nabla_X (uY) = (X.u)\, Y + u\, \nabla_X Y,$$

(iv) respectant la métrique g au sens suivant: pour tous champs de vecteurs, X, Y, Z, on a

$$X\,.\,< Y, Z > \;=\; < \nabla_X Y, Z > \;+\; < Y, \nabla_X Z > .$$

On sait qu'il existe toujours de telles connexions métriques, par exemple celle de Levi-Civita caractérisée par la formule supplémentaire

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]\,.$$

Mais nous ne nous limiterons pas à celle-ci.

Si U désigne un ouvert parallélisable de V (c'est-à-dire dont le module des champs de vecteurs est libre) et si (A, B) désigne un champ de repères *orhtonormés* sur U, l'expression

$$\Omega(X, Y) = < \nabla_X \nabla_Y B - \nabla_Y \nabla_X B - \nabla_{[X, Y]} B, A >$$

ne dépend que de l'orientation du champ de repères (A, B) mais non à proprement parler de A et B, et dépend $\mathscr{C}^\infty(V)$-bilinéairement de X et Y: c'est donc une 2-forme sur U, que l'on peut définir sur la surface V toute entière si celle-ci est orientable, et qu'on appelle *2-forme de courbure* (si on change l'orientation de U, Ω est changée en $-\Omega$). [Rappelons, lorsque ∇ est la connexion de Levi-Civita, que la courbure représente l'obstruction à l'existence d'une isométrie locale avec le plan euclidien.]

Soit $s \to \gamma(s)$ un arc de courbe différentiable sur V, supposé paramétré par l'abscisse curviligne s; le champ des vecteurs tangents $\tau = \dfrac{d\gamma}{ds}$ est donc

partout de longueur 1: on déduit de (iv) que $\nabla_\tau \tau$ est normal à τ en tout point de γ. Supposons alors le support de γ inclus dans un ouvert orientable U de V et soit $v(s)$ le vecteur tangent à V en $\gamma(s)$ déduit de $\tau(s)$ par rotation de $+\pi/2$ (une orientation de U ayant été choisie). Il existe donc une fonction différentiable $s \to \rho_g(s)$ telle que

$$\nabla_\tau \tau = \rho_g v :$$

c'est cette fonction que nous appellerons la *courbure géodésique de* γ (elle dépend de l'orientation de γ et de l'orientation de U).

Calculs locaux. Soit U un ouvert parallélisable de V, et (A, B) un champ de repères orthonormés sur U: Les formules (i), (ii), (iii), (iv) prouvent l'existence d'une 1-forme $\omega_{(A,B)}$ sur U telle que

$$\begin{cases} \nabla_Y B = +\omega_{(A,B)}(Y) A \\ \nabla_Y A = -\omega_{(A,B)}(Y) B \end{cases}$$

pour tout champ de vecteurs Y sur U. (On notera en abrégé: $\nabla B = +\omega A$, $\nabla A = -\omega B$). Si (A', B') est un autre champ de repères orthonormés sur U déduit de (A, B) par rotation θ ($A' = \cos\theta.A + \sin\theta.B$, $B' = -\sin\theta.A + \cos\theta.B$), où $\theta : U \to R/2\pi Z$ est une fonction différentiable, on vérifie aisément que

$$(v) \qquad \omega_{(A',B')} = \omega_{(A,B)} - d\theta$$

ATTENTION: malgré la notation, la 1-forme fermée $d\theta$ peut ne pas être un cobord si U n'est pas simplement connexe; la fonction θ prend en effet ses valeurs dans $\mathbf{R}/2\pi\, Z$, et non dans $\mathbf{R}$).

Si on oriente U en décrétant le champ de repères (A, B) direct, la 2-forme de courbure est donnée par

$$(vi) \qquad \Omega = d\omega_{(A,B)}$$

Enfin, si γ est une courbe orientée dans U, et si l'angle polaire $(A_{\gamma(s)}, \tau(s))$ de son vecteur tangent unitaire $\tau(s)$ est égal à $\varphi(s)$

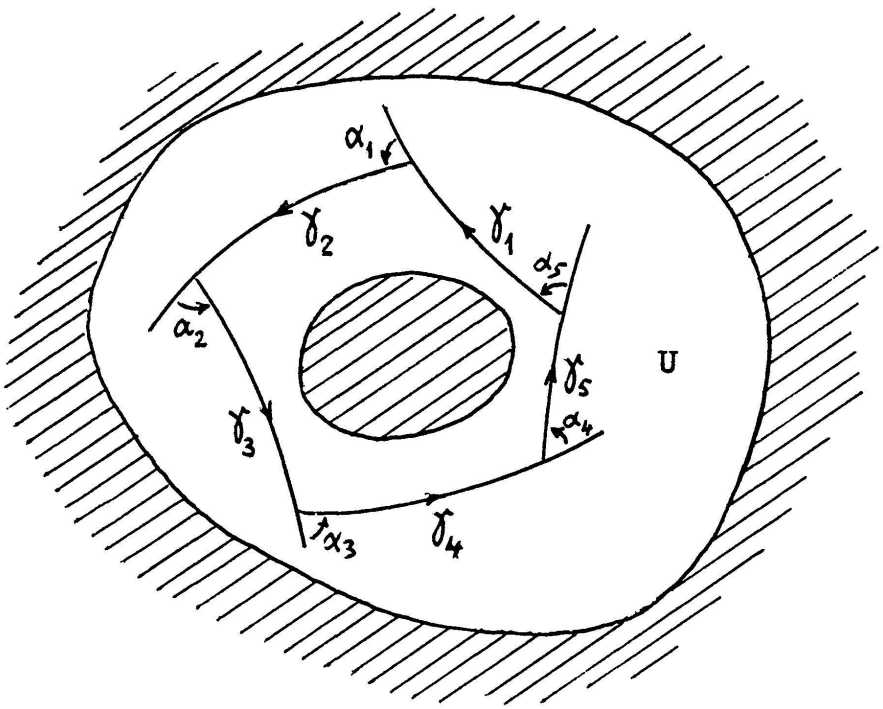
$$(\tau = \cos\varphi\, A + \sin\varphi\, B),$$

on vérifie aisément:

$$(vii) \qquad \rho_g(s) = \frac{d\varphi(s)}{ds} - \omega(\tau).$$

3. Résidus et formule locale de Gauss-Bonnet

Soit P un pavé différentiable de V, dont nous supposerons le bord inclus dans un ouvert parallélisable U de V.



Supposons l'ouvert U muni d'une métrique riemannienne g, et d'une connexion ∇ respectant cette métrique.

Choisissons une orientation de U et notons $\partial P = \Sigma\gamma_i$ le bord orienté de P (orientation de ∂P compatible avec celle de U au sens habituel).

Notons enfin $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ les discontinuités angulaires de ∂P avec la convention suivante: α_i désigne la mesure comprise entre $-\pi$ et $+\pi$ de l'angle orienté $\left(\left(\frac{d\gamma_i}{ds}\right)_{M_i}, \left(\frac{d\gamma_{i+1}}{ds}\right)_{M_i}\right)$ où M_i désigne le sommet de P qui est extrémité de γ_i et origine de γ_{i+1}.

Définition. On appellera résidu de (∇, g) en P le nombre

$$\text{Rés}_P(\nabla, g) = 1 - \frac{1}{2\pi}\left[\int_{\partial P} \rho_g \, ds + \sum_P \alpha_i\right].$$

Théorème 1. (i) La définition ci-dessus du résidu ne dépend pas du choix de l'orientation de U.

(ii) Soit $\tilde{U}$ un ouvert contenant U et contenant *tout l'intérieur* de P; soit $\tilde{A}$ un champ de vecteurs *sans singularité* sur $\tilde{U}$, et définissons sur U un champ de repères orthonormés (A, B) en imposant à A d'être positivement colinéaire à $\tilde{A}$ $(A = \tilde{A}/\|\tilde{A}\|)$ sur U. Posant $\omega = \omega_{(A,B)}$, on a alors:

$$\text{Rés}_P(\nabla, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial P} \omega .$$

COROLLAIRE *(formule locale de Gauss-Bonnet)*. Si l'intérieur de P est tout entier inclus dans U, $\quad \text{Rés}_P(\nabla, g) = \dfrac{1}{2\pi} \iint_P \Omega \quad$ (Ω désignant la courbure de ∇).

Pour tout arc différentiable γ de ∂P, dont on note τ le champ des vecteurs tangents, posons en effet

$$\varphi(s) = (A_{\gamma(s)}, \tau_{(s)}) \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} .$$

D'après 2 (vii), $\rho_g = \dfrac{d\varphi}{ds} - \omega(\tau)$.

Donc

$$\int_{\partial P} \rho_g(s)\, ds = \sum_i \int_{\gamma_i} d\varphi - \int_{\partial P} \omega .$$

Mais $\sum_i \int_{\gamma_i} d\varphi = 2\pi - \sum_i \alpha_i$ puisque $\tilde{A}$ est défini sur tout l'intérieur de P, d'où la partie (ii) du théorème.

Supposons maintenant que l'on change l'orientation de U.

1) $\int_{\partial P} \rho_g\, ds$ ne change pas: en effet l'orientation de ∂P est changée, donc τ est changé en $-\tau$; l'orientation de U est changée aussi, donc ν ne change pas. $\nabla_{(-\tau)}(-\tau) = \nabla_\tau \tau = \rho_g \nu$ donc ρ_g ne change pas; ds est changé en $-ds$, et

$$\int_{-\gamma} \rho_g(-ds) = \int_\gamma \rho_g\, ds .$$

2) Les discontinuités angulaires α_i ne changent pas: en effet l'angle en M_i

$$\left(\left(\frac{d\gamma_i}{ds}\right)_{M_i}, \left(\frac{d\gamma_{i+1}}{ds}\right)_{M_i}\right)$$

est changé en

$$\left(-\left(\frac{d\gamma_{i+1}}{ds}\right)_{M_i}, -\left(\frac{d\gamma_i}{ds}\right)_{M_i}\right) = \left(\left(\frac{d\gamma_{i+1}}{ds}\right)_{M_i}, \left(\frac{d\gamma_i}{ds}\right)_{M_i}\right):$$

dans le groupe des angles, l'angle est changé en son opposé, mais la mesure des angles dépendant de l'orientation de $T_{M_i}(V)$ et celle-ci étant changée,

α_i = mesure par rapport à l'ancienne orientation (comprise entre $-\pi$ et $+\pi$) de l'angle

$$\left(\left(\frac{d\gamma_i}{ds}\right)_{M_i}, \left(\frac{d\gamma_{i+1}}{ds}\right)_{M_i}\right)$$

= mesure par rapport à la nouvelle orientation de

$$\left(\frac{d\gamma_{i+1}}{ds}\right)_{M_i}, \left(\frac{d\gamma_i}{ds}\right)_{M_i}\Bigg).$$

Donc α_i ne change pas.

Ceci achève la démonstration de la partie (i) du théorème.

Si l'intérieur de P est tout entier inclus dans U, la formule de Green-Riemann s'écrit:

$$\int_{\partial P} \omega = \iint_P d\omega = \iint_P \Omega,$$

d'où le corollaire.

Remarque. Si on change l'orientation de U, on change celle de P, et Ω est changé en $-\Omega$, de sorte que $\iint_{P_-} (-\Omega) = \iint_P \Omega$ ne change pas.

4. Théorème des résidus

Supposons désormais la surface V *compacte* (non nécessairement orientable), et soit $U = V - \mathscr{S}$ un ouvert de V. On munit U d'une métrique riemannienne g, et d'une connexion ∇ respectant cette métrique.

On supposera en outre qu'il existe un pavage différentiable $(P_1, ..., P_F)$ de V ayant les propriétés suivantes:

(i) chaque pavé P_λ est inclus dans un ouvert parallélisable U_λ de V,

(ii) $\mathscr{S} = \coprod_{\lambda=1}^{F} \mathscr{S}_\lambda$ où $\mathscr{S}_\lambda$ est un fermé de V (éventuellement vide) inclus dans l'intérieur du pavé P_λ.

Notons F, S et A le nombre de faces, sommets et arêtes de ce pavage. On a alors le

THÉORÈME 2 *(théorème des résidus).*

$$\sum_{\lambda=1}^{F} \text{Rés}_{P_\lambda}(\nabla, g) = F + S - A .$$

Démonstration. La définition du résidu s'écrit encore, en posant $\beta_i = \pi - \alpha_i$ et en notant n_λ le nombre de sommets (ou d'arêtes) du λ-ième pavé P_λ:

$$2\pi \text{ Rés}_{P_\lambda}(\nabla, g) = 2\pi + \sum_{P_\lambda} \beta_i - (n_\lambda \pi) - \int_{\partial P_\lambda} \rho_g \, ds .$$

Sommant toutes ces égalités terme à terme quand λ varie de 1 à F, on obtient:

$$2\pi \sum_{\lambda=1}^{F} \text{Rés}_{P_\lambda}(\nabla, g) = 2\pi F + \sum_\lambda \Big(\sum_{P_\lambda} \beta_i\Big) - \Big(\sum_\lambda n_\lambda\Big)\pi - \sum_\lambda \int_{\partial P_\lambda} \rho_g \, ds .$$

Mais $\sum_\lambda \Big(\sum_{P_\lambda} \beta_i\Big) = 2\pi S$

$\sum_\lambda n_\lambda = 2A$ (puisque chaque arête est commune à 2 pavés),

et

$\sum_\lambda \int_{\partial P_\lambda} \rho_g \, ds = 0$ (puisque les intégrales se détruisent 2 à 2, chaque arête étant commune à 2 pavés)

d'où

$$2\pi \sum_{\lambda=1}^{F} \text{Rés}_{P_\lambda}(\nabla, g) = 2\pi (F + S - A)$$

C.Q.F.D.

5. CONNEXIONS MÉTRIQUES SANS SINGULARITÉS

Si $\mathscr{S}_\lambda = \varnothing$, $\text{Rés}_{P_\lambda}(\nabla, g) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\iint_{P_\lambda} \Omega$ d'après la formule locale de Gauss-Bonnet. Le théorème des résidus devient donc le

THÉORÈME 3 *(formule globale de Gauss-Bonnet).* Pour toute connexion ∇ sans singularité sur une surface compacte V, respectant une métrique riemannienne g, et pour tout pavage $(P_1, \ldots, P_F)$ de V, on a:

$$\frac{1}{2\pi} \iint_V \Omega = F + S - A .$$

Remarque. La 2-forme de courbure Ω n'est définie que si V est orientée. Cependant si V n'est pas orientée ni même orientable, on peut encore définir globalement l'expression $\iint_V \Omega$ comme étant égale à $\sum_{\lambda=1}^{F} \iint_{P_\lambda} \Omega$ (voir remarque finale du § 3).

On déduit aisément du théorème 3 le

COROLLAIRE

(i) $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\iint_V \Omega \in \mathbf{Z}$,

(ii) $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\iint_V \Omega$ ne dépend pas du choix de la métrique riemannienne g et de la connexion ∇ sans singularité respectant cette métrique,

(iii) $F + S - A$ ne dépend pas du pavage $(P_1, \ldots, P_F)$; ce nombre est un invariant topologique de V (appelé *invariant d'Euler-Poincaré*, noté χ_V dans la suite).

La 2-forme de courbure est en fait ce qu'on appelle une 2-forme « tordue » ou « impaire » (cf. de Rham [2]).

Remarque. Un cas particulier classique de la formule globale de Gauss-Bonnet consiste à supposer la métrique g définie par une immersion $\imath$ de V dans l'espace $\mathbf{E}^3$, et à prendre pour ∇ la connexion de Levi-Civita de g: si V est orientée, $\imath$ permet de définir une « application de Gauss » $\tilde{\imath} : V \to S^2$ de V dans la sphère S^2 en associant, à tout point x de V, la classe d'équipollence du vecteur normal unitaire N_x en x à $\imath(V)$. La « courbure totale » $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\iint_V \Omega$ devient alors égale au « degré de l'immersion $\imath$ » défini par

$$2 \frac{\displaystyle\iint_V \tilde{\imath}^* \sigma_0}{\displaystyle\iint_{S^2} \sigma_0} \quad \text{(où } \sigma_0 \text{ désigne la 2-forme surface de } S^2\text{).}$$

6. Connexions métriques plates a singularités isolées

D'une connexion ∇, on dit qu'elle est « plate » ou « sans courbure » si sa 2-forme de courbure (partout définie, au signe près si V n'est pas orientée) est nulle. Le théorème 3 implique en particulier que si $\chi_V \neq 0$, il n'existe pas sur V de métrique g avec connexion métrique sans courbure et sans singularité. Par contre il existera toujours sur V des connexions métriques plates à singularités isolées: on appelle ainsi la donnée d'un nombre *fini* de points $(x_1, ..., x_r)$ sur V, d'une métrique riemannienne g et d'une connexion métrique plate sur l'ouvert $U = V - \{x_1, ..., x_r\}$ de V. Les points x_λ sont appelés les singularités de ∇.

Exemple 1. Tout difféomorphisme du tronc de cône (ouvert) ou du tronc de cylindre (ouvert) sur la sphère S^2 privée de ses 2 pôles nord N et sud S permet de définir, par transport de structure, une métrique localement euclidienne sur $S^2 - \{S, N\}$, puisque cône et cylindre sont des surfaces développables: la courbure de la connexion de Levi-Civita correspondante est donc nulle.

Exemple 2. Soit X un champ de vecteurs sur V, n'ayant que des singularités isolées $x_1, ..., x_r$. Soit $g = \langle\, , \rangle$ une métrique riemannienne arbitraire sur $U = V - \{x_1, ..., x_r\}$ et A le champ de vecteurs $X/\| X \|$ sur U. Il existe alors une unique connexion métrique ∇ sur U telle que $\nabla A = 0$: si B est un champ de vecteurs unitaires orthogonal à A sur un ouvert parallélisable W de U, cette connexion ∇ est définie par $\omega_{(A,B)} = 0$. Cette connexion sur U est en particulier plate ($d\omega_{(A,B)} = 0$).

Remarque. On peut en particulier supposer la métrique g définie sur tout V. Admettant alors l'existence de champ de vecteurs X à singularités isolées sur toute surface compacte V (ou l'existence de fonctions de Morse), cet exemple 2 prouve que pour toute métrique g sur V, il existe une connexion plate avec un nombre fini de singularités, respectant g.

Exemple 3. Soient $(x_1, ..., x_r)$ des points de V tels que l'ouvert $U = V - \{x_1, ..., x_r\}$ soit parallélisable. Soit (A, B) un champ de repères sur U, et ω une 1-forme fermée sur U. On définit sur U une métrique g et une orientation en décrétant le champ de repères (A, B) orthonormé et direct. On définit une connexion métrique ∇ sur U en posant $\omega_{(A,B)} = \omega$

$$(\nabla B = \omega A,\ \nabla A = -\omega B)\,.$$

Puisque la 1-forme ω est fermée, la connexion ∇ est *plate*.

Soient $(x_1, ..., x_r)$ les singularités (isolées) d'une connexion *plate* ∇ sur $V - \{x_1, ..., x_r\}$ respectant une métrique g. Soit P_λ un pavé de V, inclus dans un ouvert parallélisable U_λ ne contenant aucune singularité sur son bord ∂P_λ, et en contenant exactement une, x_λ, en son intérieur. Soient (A_λ, B_λ) un champ de repères orthonormés sur $U_\lambda - \{x_\lambda\}$, et $\omega_\lambda = \omega_{(A_\lambda, B_\lambda)}$ la 1-forme fermée sur $U_\lambda - \{x_\lambda\}$ telle que

$$\nabla B_\lambda = \omega_\lambda \cdot A_\lambda ,$$
$$\nabla A_\lambda = -\omega_\lambda \cdot B_\lambda .$$

THÉORÈME 4.

$$\text{Rés}_{P_\lambda}(\nabla, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial P_\lambda} \omega_\lambda + I(A_\lambda, x_\lambda)$$

($I(A_\lambda, x_\lambda)$ indiquant l'indice du champ de vecteurs A_λ en x_λ).

COROLLAIRE. La définition du résidu ne dépend pas du choix du pavé P_λ satisfaisant aux conditions requises. (On notera encore Rés (∇, x_λ) ce résidu.)

Démonstration du corollaire. Si P'_λ est un autre pavé vérifiant les conditions, les courbes fermés ∂P_λ et $\partial P'_\lambda$ sont toutes deux de même indice 1 par rapport à x_λ (une fois choisie une orientation de U_λ). La forme ω_λ étant fermée, la formule de Stokes permet de conclure:

$$\int_{\partial P_\lambda} \omega_\lambda = \int_{\partial P'_\lambda} \omega_\lambda .$$

Quant à la définition de l'indice $I(A_\lambda, x_\lambda)$, on la suppose ici connue (et donc indépendante de P_λ). [Une définition et étude de cet indice, en bonne et due forme, pourrait éventuellement être faite ici dans un cours, si elle ne l'a pas été avant.]

Démonstration du théorème. Soit $\tilde{A}$ un champ de vecteurs sans singularités défini sur *tout* l'ouvert U_λ (y compris en x_λ). Posons $A' = \tilde{A}/\|\tilde{A}\|$ sur $U_\lambda - \{x_\lambda\}$, et soit B'_λ le champ de vecteur sur $U_\lambda - \{x_\lambda\}$ déduit de A'_λ par rotation de $+\pi/2$ (pour l'orientation de $U_\lambda - \{x_\lambda\}$ définie par (A_λ, B_λ)). Soient enfin $\theta_\lambda : U_\lambda - \{x_\lambda\} \to \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ l'angle de rotation per-

mettant de passer de (A'_λ, B'_λ) à (A_λ, B_λ), et $\omega' = \omega_{(A'_\lambda, B'_\lambda)}$. De la formule (v) du § 2, on déduit: $\omega'_\lambda = \omega_\lambda + d\theta_\lambda$. Du théorème 1, on déduit

$$\text{Rés}_{P_\lambda}(\nabla, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial P_\lambda} \omega'_\lambda .$$

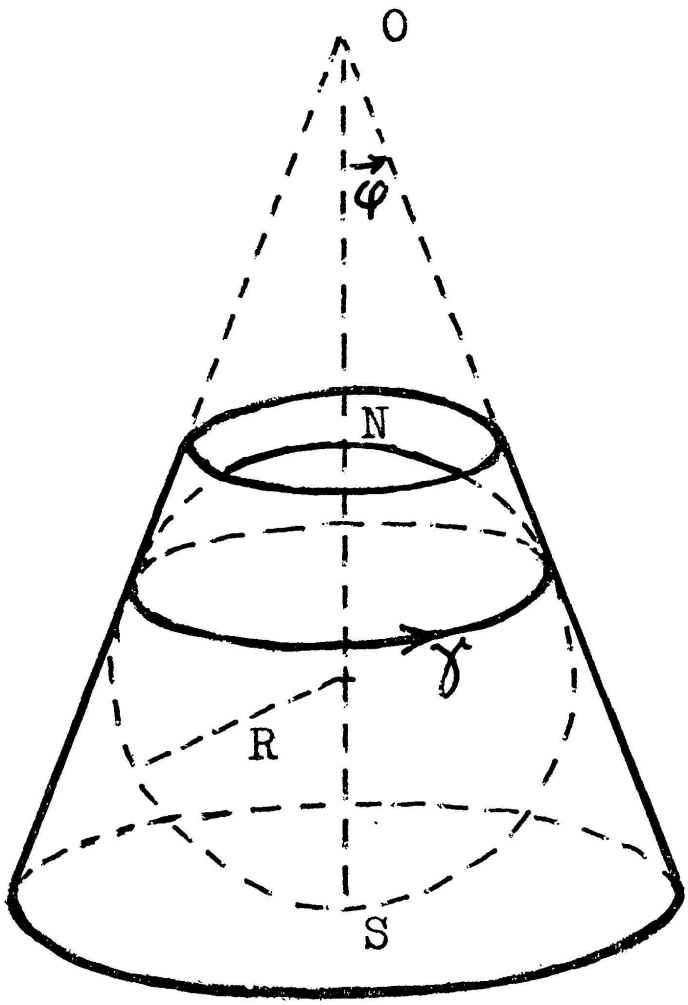
Puisque $I(A_\lambda, x_\lambda) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{\partial P_\lambda} d\theta_\lambda$, le théorème 4 en résulte.

Remarque. Notons $h_\lambda \in \mathbf{R}/2\pi\,\mathbf{Z}\,(= SO(2))$ l'holonomie de la connexion métrique plate ∇ le long du lacet ∂P_λ entourant x_λ. [Puisque ∂P_λ n'est pas simplement connexe dans le domaine U_λ de ∇, cette holonomie n'a aucune raison d'être triviale.] On vérifie aisément:

$$h_\lambda = 2\pi \text{ Rés}(\nabla, x_\lambda) \pmod{2\pi\,\mathbf{Z}} .$$

La notion de résidu est donc plus *précise* que celle d'holonomie.

Appliquons le théorème des résidus à chacun des exemples 1, 2 et 3 ci-dessus.



Exemple 1. Notons γ la courbe de contact du tronc de cône avec la sphère, φ $(0 < \varphi < \pi/2)$ l'angle au sommet du cône et R le rayon de la sphère. Par développement du tronc de cône dans le plan, γ se développe suivant un arc de cercle d'angle

$$\theta = \frac{2\pi R \cos\varphi}{R \operatorname{cotg}\varphi} = 2\pi \sin\varphi .$$

Donc

$$\int_\lambda \rho_g\, ds = 2\pi \sin\varphi .$$

γ entourant à la fois les pôles N et S, mais devant être muni d'orientations différentes, on en déduit, avec des notations évidentes:

$$\begin{cases} \text{Rés}\,(\nabla, N) = 1 + \sin\varphi \\ \text{Rés}\,(\nabla, S) = 1 - \sin\varphi \end{cases}$$

$$\text{Rés}\,(\nabla, N) + \text{Rés}\,(\nabla, S) = 2 = \chi_{S^2}\,.$$

Remarque. Pour le cylindre, un calcul analogue donne

$$\text{Rés}\,(\nabla, N) = \text{Rés}\,(\nabla, S) = 1\ ,$$

car γ se développe alors sur le plan suivant un segment de droite de sorte que $\int_\lambda \rho_g\, ds = 0$.

Exemple 2. Soit X un champ de vecteurs à singularités isolées $(x_1, ..., x_r)$, et g une métrique riemannienne sur la surface compacte V.

THÉORÈME 5 *(Hopf).*

$$\sum_{\lambda=1}^{r} I(X, x_\lambda) = \chi_V\,.$$

Posons en effet $A = X/\|X\|$ sur $U = V - \{x_1, ..., x_\lambda\}$. Soit U_λ un voisinage de x_λ dans V, et B_λ un champ de vecteurs sur $U_\lambda - \{x_\lambda\}$ tel que (A, B_λ) définisse un champ de repères orthonormés sur $U_\lambda - \{x_\lambda\}$: par définition de la connexion métrique plate de l'exemple 2, $\nabla A = 0$, soit $\omega_{(A, B_\lambda)} = 0$. On déduit du théorème 4 que

$$\text{Rés}\,(\nabla, x_\lambda) = I(A, x_\lambda) = I(X, x_\lambda)$$

d'où le théorème 5, par application du théorème des résidus.

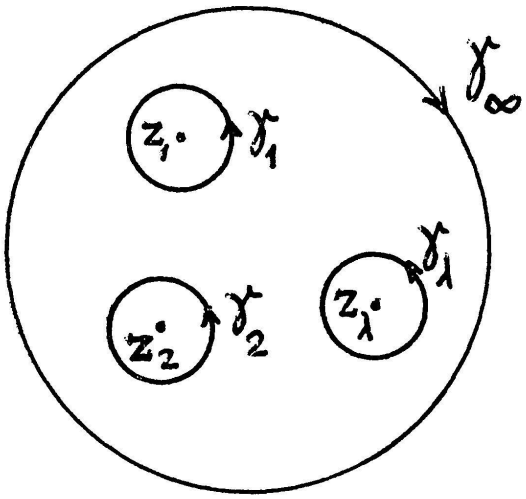
Exemple 3. Nous allons voir un cas particulier de la situation décrite à l'exemple 3, explicitant le lien entre les résidus des connexions métriques plates à singularités isolées, et les résidus des fonctions méromorphes.

Soit $f: \mathbf{C} - \{z_1, ..., z_r\} \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe. Par compactification à l'aide d'un point à l'infini, $U = \mathbf{C} - \{z_1, ..., z_r\}$ peut encore être considéré comme $S^2 - \{\infty, z_1, ..., z_r\}$.

Posons: $f(z)\,dz = \omega_1 + i\,\omega_2$ avec

$$\begin{cases} \omega_1 = P\,dx - Q\,dy \\ \omega_2 = Q\,dx + P\,dy \end{cases}$$

où P (resp. Q) désignent comme d'habitude les parties réelle et imaginaire de f, et $z = x + iy$.



Soit $A = \dfrac{\partial}{\partial x}$ et $B = \dfrac{\partial}{\partial y}$ et ∇_1, ∇_2 les deux connexions métriques associées définies sur U respectivement par ω_1 et ω_2. Dire que f est holomorphe signifie que les formes ω_1 et ω_2 sont fermées, et que par conséquent les connexions ∇_1 et ∇_2 sont plates. Le résidu, au sens habituel des fonctions méromorphes, est donné par

$$R(f, z_\lambda) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda} f(z)\,dz$$

$$R(f, \infty) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\infty} f(z)\,dz$$

THÉORÈME 6.

$$\text{Rés}\,(\nabla_1, z_\lambda) + i\,\text{Rés}\,(\nabla_2, z_\lambda) = i\,R(f, z_\lambda)\,,$$

$$\text{Rés}\,(\nabla, \infty) + i\,\text{Rés}\,(A_2, \infty) = 2(1+i) + i\,R(f, \infty)\,.$$

Appliquons en effet le théorème 4 avec $A = \dfrac{\partial}{\partial x}$, $B = \dfrac{\partial}{\partial y}$

1) Puisque le champ de repères (A, B) est prolongeable en tout point z situé à distance finie, le théorème 4 (ou 1) s'écrit:

$$\text{Rés}\,(\nabla_1, z_\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_\lambda} \omega_1\,,$$

$$\text{Rés}\,(\nabla_2, z_\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_\lambda} \omega_2\,,$$

et

$$\text{Rés}\,(\nabla_1, z_\lambda) + i\,\text{Rés}\,(\nabla_2, z_\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_\lambda} f(z)\,dz = i\,R(f, z_\lambda)$$

2) Puisque $I\left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \infty\right) = I\left(\dfrac{\partial}{\partial y}, \infty\right) = 2$, le théorème 4 s'écrit maintenant:

$$\text{Rés}\,(\nabla_1, \infty) = \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_\infty} \omega_1 + 2\,,$$

$$\text{Rés}\,(\nabla_2, \infty) = \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_\infty} \omega_2 + 2\,.$$

Donc

$$\begin{aligned}\text{Rés}\,(\nabla_1, \infty) + i\,\text{Rés}\,(\nabla_2, \infty) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_\infty} f(z)\,dz + 2(1+i)\\ &= i\,R(f, \infty) + 2(1+i)\end{aligned}$$

C.Q.F.D.

RÉFÉRENCES

[1] BERGER, M. et B. GOSTIAUX. *Géométrie différentielle*. Ed. Colin, 1971.

[2] DE RHAM, G. *Variétés différentielles*. Ed. Hermann, 1955.

[3] HICKS, N. J. *Notes on differential Geometry*. Ed. Van Nostrand, 1956.

[4] LEHMANN, D. *Résidus des connexions à singularités* (à paraître aux *Annales de L'institut Fourier*).

[5] —— *Cours de Géométrie et Topologie en maîtrise* (polycopiés de l'U.E.R. de Mathématiques de l'Université de Lille 1), 1979-80, chap. V.

[6] LELONG-FERRAND, J. *Géométrie différentielle*. Ed. Masson, 1963.

[7] THORPE, J. A. *Elementary topics in differential Geometry*. Ed. Springer, 1979.

(Reçu le 18 juillet 1980)

Daniel Lehmann

U.E.R. de Mathématiques pures et appliquées
Université des Sciences et Techniques de Lille
F-59650 Villeneuve d'Ascq

vide-leer-empty