Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 27 (1981)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LA FONCTION: NOMBRE DE FACTEURS PREMIERS DE N
Autor: Erdös, Paul / Nicolas, Jean-Louis
Kapitel: §5. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 4
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-51737

si $r^{3/2} \leqslant u \leqslant r^{\log \log r}$, on a: $P(u, r) > r^{1+2\lambda}$ avec $\lambda = -\left(8 + \dfrac{\log u}{\log r}\right)$ permet de montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $n'' \leqslant A_k \left(1 + \dfrac{1}{p_k^{1+\alpha}}\right)$. On peut prendre $\alpha = 0,000974$.

Propriété 4. Soit n *un nombre* ω*-intéressant,* $n \geqslant (k-1)\, A_k$ *alors* $\omega(n) \geqslant k$. *Cela entraine qu'un nombre* ω*-intéressant compris entre* A_k *et* A_{k+1} *a plus de* $(k-1)$ *facteurs premiers.*

Démonstration. Soit $n \geqslant (k-1)\, A_k$ vérifiant $\omega(n) \leqslant k-1$; on écrit

$$A_k(t-1) \leqslant n < A_k\, t, \quad t \text{ entier.}$$

On a donc $t \geqslant k$. Ce nombre n ne peut pas être ω-intéressant puisque

$$\frac{\omega(n)}{n} \leqslant \frac{k-1}{A_k(t-1)} \leqslant \frac{k}{A_k t} \leqslant \frac{\omega(A_k t)}{A_k t}.$$

Conjecture: Peut-on remplacer $n \geqslant (k-1)\, A_k$ par $n \geqslant (1+\varepsilon(k))\, A_k$ avec $\lim\limits_{k \to +\infty} \varepsilon(k) = 0$?

Finalement, on voit que l'ensemble des nombres ω-intéressants coïncide presque avec l'ensemble des nombres ω-largement composés: Les deux ensembles ont une infinité de points communs, mais il existe une infinité de nombres ω-largement composés non ω-intéressants (exemple: $n = (p_{k+1} - 1)\, A_k$ par la propriété 2) et la propriété 3 fournit un exemple de la situation inverse.

§ 5. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 4

PROPOSITION 3. *Posons* $N_k(x) = \text{card}\{n \leqslant x \mid \omega(n) > k\}$. *Pour* α *fixé,* $\alpha > 1$, *on a lorsque* $x \to +\infty$ *(avec les notations de l'introduction)*

$$N_{[\alpha \log \log x]}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{F(\alpha)}{\alpha - 1} \alpha^{\frac{1}{2} + \{\alpha \log \log x\}} \frac{x(1 + O(1/\log \log x))}{(\log x)^{1-\alpha+\alpha \log \alpha} \sqrt{\log \log x}}$$

où $\{y\}$ *désigne la partie fractionnaire de* y.

Pour $0 < \alpha < 1$, *la formule ci-dessus est valable* $\left(\text{\textit{en remplaçant}}\ \dfrac{F(\alpha)}{\alpha - 1}\ \text{\textit{par}}\ \dfrac{F(\alpha)}{1-\alpha}\right)$ *pour estimer* $\text{card}\{n \leqslant x \mid \omega(n) \leqslant \alpha \log \log x\}$.

Démonstration (communiquée par H. Delange). Soit $P_x(z) = \sum_{n \leqq x} z^{\omega(n)}$. Le théorème des résidus montre que:

$$N_k(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{P_x(z)}{(z-1)\, z^{k+1}}\, dz$$

où γ est un cercle de centre 0 et de rayon $r > 1$. On applique la formule de Selberg (1)

$$N_k(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{z F(z)\, x (\log x)^{z-1}}{(z-1)\, z^{k+1}}\, dz + R_1(x),$$

avec

$$R_1(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{O\left(x (\log x)^{\mathrm{Re}\, z-2}\right)}{(z-1)\, z^{k+1}}\, dz = O\left(\frac{x (\log x)^{r-2}}{(r-1)\, r^k}\right)$$

On pose $\dfrac{z F(z)}{z-1} = G(z)$. G est holomorphe en $z = r$ et l'on écrit

$$G(z) = G(r) + (z-r)\, G'(r) + (z-r)^2 H(z, r),$$

avec $H(r, r) = \dfrac{1}{2} G''(r)$. Par la formule de Taylor, il existe λ, $0 < \lambda < 1$ tel que $H(z, r) = \dfrac{1}{2} G''\left(\lambda z + (1-\lambda) r\right)$.La fonction H est donc continue et $H(z, r)$ est bornée uniformément pour $z \in \gamma$, $1 < r_1 \leqslant r \leqslant r_2$. On pose $\log \log x = l$. On obtient

$$N_k(x) = \frac{1}{2i\pi \log x} \int_\gamma \frac{x\, G(z) e^{zl}}{z^{k+1}}\, dz + R_1(x)$$

$$= \frac{1}{2i\pi \log x} \left(\int_\gamma \frac{x\, G(r)\, e^{zl}}{z^{k+1}}\, dz + \int_\gamma \frac{x (z-r)\, e^{zl} G'(r)}{z^{k+1}}\, dz \right) + R_1(x) + R_2(x)$$

$$= \frac{x}{\log x} G(r) \frac{l^k}{k!} + \frac{x}{\log x} G'(r) \left(\frac{l^{k-1}}{(k-1)!} - \frac{r\, l^k}{k!} \right) + R_1(x) + R_2(x).$$

On choisit $r = \dfrac{k}{l}$ de telle sorte que le coefficient de $G'(r)$ s'annule, et on a

$$R_2(x) = \frac{1}{2i\pi \log x} \int_\gamma \frac{x (z-r)^2\, H(z, r)\, e^{zl}}{z^{k+1}}\, dz.$$

Si l'on pose $z = r\, e^{i\theta}$, on a $|z - r|^2\, |e^{zl}| = 2r^2 (1 - \cos\theta)\, e^{rl \cos\theta}$.

On peut montrer que, lorsque $\alpha \to +\infty$, on a $\int_0^{2\pi} (1-\cos\theta)\, e^{\alpha\cos\theta}\, d\theta = O(e^{\alpha}\alpha^{-3/2})$ (cf. par exemple, [Dieu], ch. IV). On en déduit que

$$R_2(x) = O\left(\frac{x}{\log x}\,\frac{e^{rl}}{l^{3/2}\, r^{k-1/2}}\right)$$

et finalement

$$N_k(x) = \frac{x}{\log x}\, G(r)\,\frac{l^k}{k!} + O\left(\frac{x}{\log x}\,\frac{e^{rl}}{l^{3/2}\, r^{k-1/2}}\right) + O\left(\frac{x\,(\log x)^{r-2}}{(r-1)\, r^k}\right)$$

On pose $k = [\alpha \log\log x]$, $r = \dfrac{k}{l} = \alpha + O\left(\dfrac{1}{\log\log x}\right)$, on a donc $G(r) = G(\alpha)\left(1 + O\left(\dfrac{1}{l}\right)\right)$, on évalue chacun des termes ci-dessus (en particulier $k!$ par la formule de Stirling: $k! \sim k^k e^{-k} \sqrt{2\pi k}$) et on obtient la proposition 3.

Lorsque $0 < \alpha < 1$, on suit la même méthode, en intégrant sur un cercle de rayon $r = \dfrac{k}{l} < 1$.

PROPOSITION 4. *Soit* $(n_0, A) = 1$, *et* $\alpha > 0$. *Alors on a, avec* $d(n) = \sum_{d \mid n} 1$,

(i) $$\sum_{\substack{n \equiv n_0 \bmod A \\ n \leq x}} d(n) \leqslant \frac{2x}{A}\left(1 + \frac{1}{2}\log x\right) + 2\sqrt{x},$$

(ii) $$\sum_{\substack{n \equiv n_0 \bmod A \\ n \leq x \\ \omega(n) \geq \alpha \log\log x}} 1 \leqslant \frac{1}{(\log x)^{\alpha \log 2}}\left(\frac{2x}{A}\left(1 + \frac{1}{2}\log x\right) + 2\sqrt{x}\right)$$

En particulier cette dernière somme est $O\left(\dfrac{x}{A}\,\dfrac{1}{(\log x)^{\alpha\log 2 - 1}}\right)$ *lorsque* $A = O(\sqrt{x})$.

Démonstration. La formule (ii) est une conséquence immédiate de (i): Les nombres pour lesquels $\omega(n) \geqslant \alpha \log\log x$ vérifient $d(n) \geqslant 2^{\omega(n)}$ soit $d(n) \geqslant (\log x)^{\alpha \log 2}$.

On a

$$\sum_{\substack{n \equiv n_0 \bmod A \\ n \leq x}} d(n) \leqslant \sum_{\substack{n \equiv n_0 \bmod A \\ n \leq x}} \; \sum_{\substack{d \leq \sqrt{n} \\ d \mid n}} 2 \leqslant \sum_{d \leq \sqrt{x}} 2 \sum_{\substack{n \equiv n_0 \bmod A \\ d \mid n \\ n \leq x}} 1 .$$

Or les nombres n sur lesquels s'effectue cette dernière sommation vérifient $n = n_0 + yA \equiv 0 \bmod d$. Si $(A, d) = 1$, cette congruence a une solution et une seule en y dans chaque intervalle de longueur d. Si $(A, d) \neq 1$, pour que cette congruence ait une solution, on doit avoir $(A, d) \mid n_0$, d'où $(A, n_0) \neq 1$; il n'y a donc pas de solutions. Finalement, il y a au plus une solution dans chaque intervalle de longueur d et la somme est

$$\leqslant \sum_{d \leq \sqrt{x}} 2\left(\frac{x}{Ad} + 1\right) \leqslant 2\sqrt{x} + \frac{2x}{A}\left(1 + \frac{1}{2}\log x\right).$$

Remarque. Dans le cas $A = 1, \alpha = 2$, on trouve dans l'estimation (ii) le même exposant pour $\log x$ que dans la proposition 3. Ceci est à rapprocher du fait que (cf. [And])

$$\sum_{n \leq x;\ \omega(n) \sim 2 \log\log x} d(n) \sim x \log x .$$

Par des méthodes plus compliquées, il est possible d'obtenir pour (ii) une meilleure majoration.

LEMME 2. *Soit $M = (a_{ij})$ une matrice à m lignes et n colonnes à coefficients dans un corps K. Soit $\mathscr{P}$ une partie de K et soit L_i le nombre d'éléments de la $i^{\text{ème}}$ ligne de M qui sont dans $\mathscr{P}$. Alors il y a au moins $n - \sum_{i=1}^{m} L_i$ colonnes de M dont tous les éléments sont dans $K - \mathscr{P}$.*

Démonstration. Soit C_j le nombre d'éléments de la $j^{\text{ème}}$ colonne qui sont dans $\mathscr{P}$. On a

$$\sum_{j=1}^{n} C_j = \sum_{i=1}^{m} L_i \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ C_j = 0}} 1 = n - \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ C_j \neq 0}} 1 \geqslant n - \sum_{j=1}^{n} C_j$$
$$= n - \sum_{i=1}^{m} L_i .$$

PROPOSITION 5. *Supposons que pour n assez grand, il existe $k > 0$ et $j < n$ tel que*

i) $k \leqslant \omega(n)$,

ii) $\omega(n) \leqslant j$,

iii) $\omega(n-r) \geqslant j$ pour $r = 1, 2, ..., j-1$,

iv) $\omega(n+s) \leqslant k$ pour $s = 1, 2, ..., [2 \log n]$.

Alors n est un point d'étranglement pour la fonction $n \mapsto n - \omega(n)$.

Démonstration. Soit $m < n$.

Ou bien on a $m \leqslant n - j$ et d'après ii), $m - \omega(m) < n - j \leqslant n - \omega(n)$, ou bien on a $n = m + r$ avec $1 \leqslant r \leqslant j - 1$ et iii) et ii) donnent

$$m - \omega(m) \leqslant m - j \leqslant m - \omega(n) < n - \omega(n) .$$

Soit maintenant $m > n$.
Ou bien on a $m > n + 2 \log n$ et en remarquant que pour tout entier m, on a $\omega(m) \leqslant \dfrac{\log m}{\log 2} \leqslant \dfrac{3}{2} \log m$, on obtient, pour n assez grand:

$$m - \omega(m) \geqslant m - \frac{3}{2} \log m > n + 2 \log n - \frac{3}{2} \log (n + 2 \log n)$$

$$> n > n - \omega(n) ,$$

par la croissance de la fonction $x \mapsto x - \dfrac{3}{2} \log x$.
Ou bien on a $m \leqslant n + [2 \log n]$ et iv) donne alors

$$\omega(m) \leqslant k \leqslant \omega(n)$$

ce qui entraîne

$$m - \omega(m) > n - \omega(n) .$$

Démonstration du théorème 4. La méthode suivante est celle de [Erd 2]. Pour assurer les hypothèses i) et iii) de la proposition 5, on va demander à n d'être solution du système de congruences

$$\begin{cases} n \equiv 0 & \mod B_0 \\ n \equiv 1 & \mod B_1 \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ n \equiv j - 1 & \mod B_{j-1} \end{cases}$$

où B_0 est un produit de k nombres premiers et $B_1, \ldots, B_{j-1}$ des produits de j nombres premiers. On pose

$$A = \prod_{i=0}^{j-1} B_i .$$

D'après le théorème chinois, les solutions de ce système de congruences sont de la forme

$$n = n_0 + y A \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant n_0 < A \quad \text{et} \quad y \in \mathbf{N} .$$

On se donne x assez grand. On choisit

$$k = [3 \log \log x], \quad j = [6 \log \log x] .$$

On prend les facteurs premiers de $B_0, \ldots, B_{j-1}$ distincts et compris entre $3 \log x$ et $4 \log x$, ce qui est possible d'après le théorème des nombres premiers. On a donc:

$$\log A \leqslant 6 (\log \log x)^2 \log (4 \log x) = O (\log \log x)^3 .$$

Maintenant, pour $1 \leqslant s \leqslant 2 \log x$, grâce au choix des facteurs premiers de A on a, pour la solution n_0 des congruences

$$(n_0 + s, A) = 1$$

et

$$(n_0, A) = B_0 .$$

Considérons le tableau $(a_{s,y})$, $0 \leqslant s \leqslant 2 \log x$, $0 \leqslant y \leqslant \frac{x}{A} - 1$ défini par

$$\begin{aligned} a_{s,y} &= \omega (n_0 + s + y A) && \text{si} \quad s \neq 0 , \\ &= \omega \left(\frac{n_0 + y A}{B_0} \right) && \text{si} \quad s = 0 . \end{aligned}$$

D'après la proposition 4, la $s^{\text{ième}}$ ligne de ce tableau contient au plus

$$O \left(\frac{x}{A} \frac{1}{(\log x)^{3 \log 2 - 1}} \right)$$

termes supérieures à $3 \log \log x$. D'après le lemme 2, il y a $\frac{x}{A} (1 + o (1))$ colonnes y pour lesquelles

$$\begin{aligned} &\omega (n_0 + s + y A) \leqslant 3 \log \log x && \text{pour} \quad s = 1, \ldots, 2 [\log x] , \\ &\omega (n_0 + y A) \leqslant 6 \log \log x && \text{pour} \quad s = 0 . \end{aligned}$$

Pour une de ces valeurs de y, $n = n_0 + y A$ vérifie les 4 hypothèses de la proposition 5 et est donc un point d'étranglement de la fonction $n \mapsto n - \omega (n)$.

On peut raisonnablement conjecturer que pour ε assez petit, la fonction $n \mapsto n - d(n)^{\varepsilon}$ a une infinité de points d'étranglement, mais il semble peu vraisemblable que ce soit encore vrai pour $\varepsilon = 1$. D'après le théorème des nombres premiers, on peut voir que pour $n = 2 \cdot 3 \cdot \ldots p_k$, $n - (\omega(n) \log n)^{\omega(n)}$ est négatif, et donc cette fonction n'a qu'un nombre fini de points d'étranglement. On ne peut pas démontrer que $n - \omega(n)^{\omega(n)}$ n'a pas de points d'étranglement: La raison en est qu'il n'y a pas de résultats non triviaux pour la question suivante: Quel est le plus petit t_k tel que $\omega(n+t_k) \geqslant k$. On a évidemment $t_k \leqslant 2 \cdot 3 \cdot \ldots p_k$ et malheureusement, nous ne pouvons améliorer ce résultat. C'est une question beaucoup plus importante que l'étude de $n - \omega(n)^{\omega(n)}$.

Il n'est pas difficile de montrer que si n est un point d'étranglement pour la fonction $n - \omega(n)^{\omega(n)}$, alors $\omega(n) < (\log n)^{1/2+\varepsilon}$. Il semble vraisemblable que pour $n > n_0$, il existe $m > n$ avec $m - \omega(m)^{\omega(m)} < n$ et même, $m - \omega(m)^{\omega(m)} < n - e^{(\log n)^{1-\varepsilon}}$, ce qui montrerait que le nombre de points d'étranglement est fini. Peut-être, pour tout $n > n_0$, existe-t-il un $m > n$ tel que $m - d(m) < n - 2$. On a besoin de $n - 2$, parce que $\min_{m = n+1, n+2} m - d(m) \leqslant n - 2$, mais on ne sait rien à ce sujet.

Enfin, il est facile de voir que toute fonction additive qui possède une infinité de points d'étranglement est croissante, et donc (cf. [Erd 3] et [Pis]) proportionnelle au logarithme: La démonstration suivante a été proposée par D. Bernardi et W. Narkiewicz.

Soit f additive ayant une suite infinie $n_1 < n_2 < \ldots n_k < \ldots$ de points d'étranglement et $a < b$. On peut trouver, pour n_k assez grand, dans l'intervalle $\left(\frac{n_k}{b}, \frac{n_k}{a}\right)$ un nombre c, premier à $a\,b$; on aura alors

$$c\,a < n_k < c\,b\,,$$

ce qui entraîne

$$f(c) + f(a) < f(n_k) < f(c) + f(b)$$

et $f(a) < f(b)$.

RÉFÉRENCES

[And] Anderson, I. On primitive sequences. *J. London Math. Soc. 42* (1967), 137-148.

[Com] Comtet, L. *Analyse combinatoire.* Collection Sup, Presses Universitaires de France, 1970.

[Del 1] Delange, H. Sur des formules dues à A. Selberg. *Bull. Sci. Math. 83* (1959), 101-111.