Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 27 (1981)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LA FONCTION: NOMBRE DE FACTEURS PREMIERS DE N
Autor: Erdös, Paul / Nicolas, Jean-Louis
Kapitel: §4. Nombres -intéressants
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-51737

avec $a \geqslant 2$ qui est un cas particulier de l'équation de Catalan, n'admet qu'un nombre fini de solutions (cf. [Tij]).

L'existence d'une infinité d'entiers n tels que $\omega(n) + \omega(n+1) = 2$ est donc équivalente à l'existence d'une infinité de nombres premiers de Mersenne ou de Fermat.

§ 4. Nombres ω-intéressants

Définition. On dit que n est ω-intéressant, si l'on a

$$m > n \Rightarrow \frac{\omega(m)}{m} < \frac{\omega(n)}{n} .$$

Interprétation géométrique: pour $m > n$, le point $(m, \omega(m))$ est situé sous la droite joignant l'origine à $(n, \omega(n))$.

Propriété 1 : Pour $k \geqslant 1$, le nombre $A_k = 2 \cdot 3 \cdot \ldots p_k$ est ω-intéressant. En effet: si $\omega(m) \leqslant k$ on a bien: $\omega(m)/m < \omega(A_k)/A_k$ pour $m > A_k$. Et si $\omega(m) = k + \Delta$, $\Delta > 0$, on a alors $m \geqslant A_k 3^{\Delta}$ et:

$$\frac{\omega(m)}{m} \leqslant \frac{k+\Delta}{A_k 3^{\Delta}} = \frac{\omega(A_k)}{A_k} \frac{\left(1 + \frac{\Delta}{k}\right)}{3^{\Delta}} \leqslant \frac{\omega(A_k)}{A_k} \frac{1+\Delta}{3^{\Delta}} < \frac{\omega(A_k)}{A_k} .$$

Propriété 2: Soit n vérifiant :

$$A_k < n < A_{k+1} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \quad \text{et} \quad \omega(n) = k$$

alors n est ω-intéressant.

Démonstration : Soit $m > n$, ou bien on a: $m \geqslant A_{k+1}$ et d'après la propriété 1:

$$\frac{\omega(m)}{m} < \frac{\omega(A_{k+1})}{A_{k+1}} \leqslant \frac{(k+1)\left(1 - \frac{1}{k}\right)}{n} < \frac{\omega(n)}{n}$$

ou bien on a: $n < m < A_{k+1}$ et cela entraine $\omega(m)/m < k/n = \omega(n)/n$.

Propriété 3 : Pour une infinité de valeurs de k, il existe un nombre ω-intéressant, plus grand que A_k et ayant $k - 1$ facteurs premiers.

Démonstration : Soit k tel que

$$\frac{p_{k+1}}{p_k+1} > 1 + \frac{1}{k-1}\,; \tag{3}$$

alors $n = 2 \cdot 3 \cdot \ldots p_{k-1}(p_k+1)$ est ω-intéressant:

Remarquons d'abord que l'on a $A_k < n < n' = A_k \dfrac{p_{k+1}}{p_k}$ et que pour $k \geqslant 2$, d'après la propriété 2, n' est ω-intéressant. Ensuite, $\omega(n) = k-1$; si m vérifie $n < m < n'$ on a: $\omega(m) \leqslant k-1$; si m vérifie $n' \leqslant m$, on a

$$\frac{\omega(m)}{m} < \frac{\omega(n')}{n'} = \frac{k}{n'} < \frac{k-1}{n}\,;$$

d'après l'hypothèse.

On sait qu'il existe une infinité de nombres premiers tels que $p_{k+1} - p_k > 2 \log p_k$ (cf. [Pra], p. 157). Pour ces nombres on aura

$$\frac{p_{k+1}}{p_k+1} > 1 + \frac{2\log p_k - 1}{p_k+1}$$

et comme $p_k \sim k \log k$, cela entraine la relation (3).

Remarque 1. Si k vérifie $p_{k+1} - p_k < \dfrac{p_k}{k-1}$ il est facile de voir qu'il n'existe aucun nombre ω-intéressant compris entre A_k et $n' = A_k \dfrac{p_{k+1}}{p_k}$. Cette situation se produit pour une infinité de k. On peut donc conjecturer que pour une infinité de k, les nombres ω-intéressants compris entre A_k et A_{k+1} vérifient $\omega(n) \geqslant k$.

Remarque 2. Désignons par n'' le plus petit entier suivant A_k et ayant $(k-1)$ facteurs premiers. On a $n'' \leqslant n = A_k\left(1 + \dfrac{1}{p_k}\right)$. Il est possible d'obtenir une meilleure majoration de n'' de la façon suivante: Le théorème de Sylvester-Schur affirme que $P(u, r)$, le plus grand facteur premier du produit $(u+1) \ldots (u+r)$ est plus grand que r si $u \geqslant r$. (cf. [Lan]).

Considérons le produit: $\prod\limits_{t=1}^{p_{k-2}} (p_{k-1}\,p_k + t)$. Il doit avoir un facteur premier $q > p_{k-2}$, et soit $t = t_q$ tel que q divise $p_{k-1}\,p_k + t$. Alors le nombre $n = 2 \cdot 3 \cdot \ldots p_{k-2}\,(p_{k-1}\,p_k + t_q)$ a $k-1$ facteurs premiers et l'on a $n \leqslant A_k\,(1 + p_{k-2}/p_k\,p_{k-1})$. Le résultat de Ramachandra (cf. [Ramac]):

si $r^{3/2} \leqslant u \leqslant r^{\log \log r}$, on a: $P(u, r) > r^{1+2\lambda}$ avec $\lambda = -\left(8 + \frac{\log u}{\log r}\right)$ permet de montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $n'' \leqslant A_k \left(1 + \frac{1}{p_k^{1+\alpha}}\right)$. On peut prendre $\alpha = 0,000974$.

Propriété 4. Soit n un nombre ω-intéressant, $n \geqslant (k-1) A_k$ alors $\omega(n) \geqslant k$. Cela entraine qu'un nombre ω-intéressant compris entre A_k et A_{k+1} a plus de $(k-1)$ facteurs premiers.

Démonstration. Soit $n \geqslant (k-1) A_k$ vérifiant $\omega(n) \leqslant k - 1$; on écrit

$$A_k (t-1) \leqslant n < A_k t, \quad t \text{ entier.}$$

On a donc $t \geqslant k$. Ce nombre n ne peut pas être ω-intéressant puisque

$$\frac{\omega(n)}{n} \leqslant \frac{k-1}{A_k(t-1)} \leqslant \frac{k}{A_k t} \leqslant \frac{\omega(A_k t)}{A_k t}.$$

Conjecture: Peut-on remplacer $n \geqslant (k-1) A_k$ par $n \geqslant (1 + \varepsilon(k)) A_k$ avec $\lim_{k \to +\infty} \varepsilon(k) = 0$?

Finalement, on voit que l'ensemble des nombres ω-intéressants coïncide presque avec l'ensemble des nombres ω-largement composés: Les deux ensembles ont une infinité de points communs, mais il existe une infinité de nombres ω-largement composés non ω-intéressants (exemple: $n = (p_{k+1} - 1) A_k$ par la propriété 2) et la propriété 3 fournit un exemple de la situation inverse.

§ 5. Démonstration du théorème 4

Proposition 3. *Posons* $N_k(x) = \text{card}\{n \leqslant x \mid \omega(n) > k\}$. *Pour α fixé, $\alpha > 1$, on a lorsque $x \to +\infty$ (avec les notations de l'introduction)*

$$N_{[\alpha \log \log x]}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{F(\alpha)}{\alpha - 1} \alpha^{\frac{1}{2} + \{\alpha \log \log x\}} \frac{x(1 + O(1/\log \log x))}{(\log x)^{1-\alpha+\alpha \log \alpha} \sqrt{\log \log x}}$$

où $\{y\}$ désigne la partie fractionnaire de y.

Pour $0 < \alpha < 1$, la formule ci-dessus est valable $\left(\text{en remplaçant } \frac{F(\alpha)}{\alpha - 1} \text{ par } \frac{F(\alpha)}{1 - \alpha}\right)$ pour estimer $\text{card}\{n \leqslant x \mid \omega(n) \leqslant \alpha \log \log x\}$.