

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 27 (1981)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LA FONCTION: NOMBRE DE FACTEURS PREMIERS DE N
Autor: Erdős, Paul / Nicolas, Jean-Louis
Kapitel: §3. Valeurs extrêmes de $f(n) + f(n + 1)$
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-51737>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 15.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

On obtient alors

$$f_c(x) \leq \frac{x(l_2 + B)^k (l/\log 2)^k}{(k!)^2} \left(1 + O\left(\frac{l_2^3}{l}\right)\right)$$

et en remplaçant $\log k!$ par $k \log k + O(k)$, on obtient

$$f_c(x) \leq x^{1-c} \exp \left(3c(1+o(1)) \frac{\log x \log \log \log x}{\log \log x} \right),$$

ce qui achève la démonstration du théorème 2.

§ 3. VALEURS EXTRÊMES DE $f(n) + f(n+1)$

1) *Fonction $\sigma(n)$ = somme des diviseurs de n .*

On remarque d'abord que, lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$(2) \quad \begin{aligned} \sigma(n) &= n \prod_{p^a \parallel n} \left(1 + \frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{p^a}\right) \\ &= n(1+o(1)) \prod_{\substack{p^a \parallel n \\ p \leq \log n}} \left(1 + \frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{p^a}\right) \end{aligned}$$

autrement dit, les facteurs premiers supérieurs à $\log n$ ne modifient guère $\sigma(n)$. De tels facteurs, il y en a au plus $\log n / \log \log n$ et:

$$\begin{aligned} \prod_{\substack{p^a \parallel n \\ p > \log n}} \left(1 + \frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{p^a}\right) &\leq \prod_{\substack{p^a \parallel n \\ p > \log n}} \frac{1}{1-1/p} \leq \left(1 - \frac{1}{\log n}\right)^{-\frac{\log n}{\log \log n}} \\ &= 1 + \frac{O(1)}{\log \log n} \end{aligned}$$

ce qui démontre (2).

Ensuite, on a pour tout n , $\sigma(n) \geq n$ et pour n pair, $\sigma(n) \geq \frac{3}{2}n$. On a

donc pour tout n : $\sigma(n) + \sigma(n+1) \geq \frac{5}{2}n$. Inversement, pour k fixé, le

nombre $n = 4p_2 p_3 \dots p_k + 1$ est tel que n et $n+1$ n'ont pas (à part 2) de facteurs premiers inférieurs à $(1-\varepsilon)\log n$ et donc vérifie: $\sigma(n) + \sigma(n+1)$

$$= \frac{5}{2}n(1+o(1)).$$

On obtient les grandes valeurs de $\sigma(n) + \sigma(n+1)$ de la façon suivante:
Il résulte de (2) que

$$\sigma(n) + \sigma(n+1) \leq n(1 + o(1)) (P_1 + P_2)$$

avec

$$P_1 = \prod_{\substack{p|n \\ p \leq \log n}} \frac{1}{1-1/p} \quad \text{et} \quad P_2 = \prod_{\substack{p|n+1 \\ p \leq \log n}} \frac{1}{1-1/p}.$$

Comme P_1 et P_2 sont supérieurs à 1, $P_1 + P_2 \leq P_1 P_2 + 1$ et

$$P_1 P_2 \leq \prod_{p \leq \log n} \frac{1}{1-1/p} \sim e^\gamma \log \log n,$$

où γ est la constante d'Euler d'après la formule de Mertens (cf. [Wri] § 22.8). Cela donne pour tout n

$$\sigma(n) + \sigma(n+1) \leq n(1 + o(1)) e^\gamma \log \log n.$$

Ce résultat est le meilleur possible puisque pour une infinité de n , on a (cf. [Wri] § 22.9):

$$\sigma(n) \sim n e^\gamma \log \log n.$$

Pour que la majoration $P_1 + P_2 \leq P_1 P_2 + 1$ soit bonne, il faut choisir P_1 ou P_2 voisin de 1. L'examen des tables de $\max_{n \leq x} \sigma(n)$ et de

$$\max_{n \leq x} (\sigma(n) + \sigma(n-1))$$

montre que souvent un nombre N hautement abondant (c'est-à-dire vérifiant $n < N \Rightarrow \sigma(n) < \sigma(N)$) vérifie: $\max_{n \leq N+1} (\sigma(n) + \sigma(n-1)) = \sigma(N) + \sigma(N-1)$ ou $\sigma(N+1) + \sigma(N)$.

2) *Indicateur d'Euler ϕ .*

On a une relation analogue à (2):

$$\phi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = n(1 + o(1)) \prod_{\substack{p|n \\ p \leq \log n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

On démontre comme précédemment que pour tout $n > 1$, on a

$$\phi(n) + \phi(n+1) \leq \frac{3}{2} n$$

et que, pour une infinité de n

$$\phi(n) + \phi(n+1) \sim \frac{3}{2}n.$$

Pour les petites valeurs de $\phi(n) + \phi(n+1)$, on a

$$\phi(n) + \phi(n+1) \geq n(1+o(1))(P_1+P_2) \geq 2n(1+o(1))\sqrt{P_1P_2},$$

avec

$$P_1 = \prod_{\substack{p|n \\ p \leq \log n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \quad \text{et} \quad P_2 = \prod_{\substack{p|n+1 \\ p \leq \log n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

et comme

$$P_1P_2 \geq \prod_{p \leq \log n} (1 - 1/p) \sim \frac{e^{-\gamma}}{\log \log n},$$

on a

$$\phi(n) + \phi(n+1) \geq \frac{2e^{-\gamma/2}n(1+o(1))}{\sqrt{\log \log n}}.$$

Cette inégalité est une égalité pour les n construits de la façon suivante: Soit $k \in \mathbf{N}^*$. On pose $P_k = \prod_{p \leq p_k} (1 - 1/p)$. Soit k' le plus grand entier tel

que $P_{k'} \geq \sqrt{P_k}$; on pose alors $R = p_1 p_2 \dots p_{k'}$; $S = p_{k'+1} \dots p_k$; on a $\frac{\phi(R)}{R} = \frac{\phi(S)}{S} (1+o(1))$ et l'on prend pour n la plus petite solution des

congruences: $n \equiv 0 \pmod{R}$; $n+1 \equiv 0 \pmod{S}$. Cette solution vérifie $R \leq n < RS = \exp(\theta(p_k))$, ce qui montre que n tend vers l'infini avec k ,

$$\text{et } \frac{\phi(n)}{n} \leq \frac{\phi(R)}{R} \quad \text{et} \quad \frac{\phi(n+1)}{n+1} \leq \frac{\phi(S)}{S}.$$

3) Fonction Ω : Démonstration du théorème 3.

PROPOSITION 1. Soit $\varepsilon > 0$ et $k > 0$. On écrit $n(n+1) = U_k V_k$ où U_k est le produit des facteurs premiers $\leq k$. Alors il existe $n_0(k, \varepsilon)$ tel que pour $n \geq n_0$, on ait $U_k \leq n^{1+\varepsilon}$.

Le théorème 3 résulte de cette proposition puisque pour $k \geq 2$:

$$\begin{aligned} \Omega(n) + \Omega(n+1) &= \Omega(n(n+1)) = \Omega(U_k) + \Omega(V_k) \\ &\leq \frac{\log U_k}{\log 2} + \frac{\log V_k}{\log k} \\ &\leq (1 + \varepsilon) \frac{\log n}{\log 2} + \frac{2 \log n}{\log k}, \quad \text{pour } n \geq n_0. \end{aligned}$$

Etant donné η , il suffit donc de choisir ε assez petit et k assez grand pour obtenir: $\Omega(n) + \Omega(n+1) \leq \frac{\log n}{\log 2} (1 + \eta)$ pour $n \geq n_0$.

La proposition 1 résulte de la proposition 2 (cf. [Rid] et [Sch], th 4F), comme nous l'a précisé M. Langevin:

PROPOSITION 2 (Ridout). Soit θ un nombre algébrique $\neq 0$. Soit $P_1, P_2, \dots, P_s, Q_1, Q_2, \dots, Q_t$ des nombres premiers distincts, et $\delta > 0$. Il y a un nombre fini de nombres rationnels a/b avec :

$$a = a' P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_s^{\alpha_s} \quad \text{et} \quad b = b' Q_1^{\beta_1} Q_2^{\beta_2} \dots Q_t^{\beta_t}$$

avec: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t \in \mathbf{N}$ et $a', b' \in \mathbf{N}^*$ tels que

$$\left| \theta - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{|a'b'| |ab|^\delta}.$$

Démonstration de la proposition 1. Supposons que pour une infinité de n , on ait $U_k > n^{1+\varepsilon}$. On peut partager les nombres premiers $\leq k$ en deux parties P_1, P_2, \dots, P_s et Q_1, Q_2, \dots, Q_t , de telle sorte qu'il y ait une infinité de n tels que $U_k > n^{1+\varepsilon}$ et tels que

$$p \leq k \quad \text{et} \quad p \mid n \Rightarrow p \in \{P_1, \dots, P_s\},$$

$$p \leq k \quad \text{et} \quad p \mid n+1 \Rightarrow p \in \{Q_1, \dots, Q_t\}.$$

On écrit $n = n' P_1^{\alpha_1} \dots P_s^{\alpha_s}$ et $(n+1) = n'' Q_1^{\beta_1} \dots Q_t^{\beta_t}$ et l'on choisit $\theta = 1$, $\delta = \varepsilon/3$. Il y aurait alors une infinité de nombres rationnels $\frac{n+1}{n}$, solution de

$$\left| 1 - \frac{n+1}{n} \right| < \frac{1}{|n'n''| (n(n+1))^\delta}$$

puisque $n'n'' = V_k \leq n^{1-\varepsilon} + n^{-\varepsilon}$, ce qui contredirait la proposition 2.

Les valeurs de $n \leq 300\,000$ vérifiant

$$m < n \Rightarrow \Omega(m(m+1)) < \Omega(n(n+1))$$

sont (avec, entre parenthèses la valeur de $\Omega(n(n+1))$): 2 (2); 3 (3); 7 (4); 8 (5); 15 (6); 32 (7); 63 (9); 224 (10); 255 (11); 512 (13); 3968 (14); 4095 (17); 14436 (18); 32768 (19); 65535 (20); 180224 (22); 262143 (24).

On constate que les nombres $2^n + \{-1, 0, +1\}$, lorsque n a de nombreux facteurs premiers, figurent en bonne place dans cette table. Malheureusement, la proposition 2 n'est pas effective, et il n'est pas possible de montrer par cette méthode que la table en contient une infinité.

4) Fonction ω .

Nous avons rappelé dans l'introduction que pour tout n , on a

$$\omega(n) \leq \frac{\log n}{\log \log n} (1 + o(1)).$$

Soit $l = \liminf \frac{\omega(n) + \omega(n+1)}{\log n / \log \log n}$.

On a $1 \leq l \leq 2$ de façon évidente. On a probablement $l = 1$, mais il semble impossible de le démontrer.

La suite des nombres n tels que $m < n \Rightarrow \omega(m(m+1)) < \omega(n(n+1))$ est: 1, 2, 5, 14, 65, 209, 714, 7314, 28570, 254540, etc ... On a en particulier $714 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 17$ et $715 = 5 \cdot 11 \cdot 13$. L'équation

$$n(n+1) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot p_k$$

a-t-elle des solutions > 714 ? (cf. [Nel]).

Pour les petites valeurs de $\omega(n) + \omega(n+1)$, le résultat de Chen (pour une infinité de nombres premiers p , on a $\Omega(2p+1) \leq 2$, cf. [Hal 1], chap 11) montre que pour une infinité de n , on a

$$\omega(n) + \omega(n+1) \leq \Omega(n) + \Omega(n+1) \leq 4.$$

L'ultime amélioration du résultat de Chen ($\Omega(2p+1) = 1$) permettrait de remplacer 4 par 3 qui est le meilleur résultat possible pour Ω .

Si l'on a $\omega(n) + \omega(n+1) = 2$, n et $n+1$ doivent être des puissances de nombres premiers. L'un des deux étant pair, doit donc être une puissance de 2. Cette situation se produira en particulier si n est un nombre premier de Mersenne ($n = 2^p - 1$ avec p premier) ou si $n+1$ est un nombre premier de Fermat ($n+1 = 2^{2^k} + 1$). D'autre part l'équation $2^n \pm 1 = p^a$

avec $a \geq 2$ qui est un cas particulier de l'équation de Catalan, n'admet qu'un nombre fini de solutions (cf. [Tij]).

L'existence d'une infinité d'entiers n tels que $\omega(n) + \omega(n+1) = 2$ est donc équivalente à l'existence d'une infinité de nombres premiers de Mersenne ou de Fermat.

§ 4. NOMBRES ω -INTÉRESSANTS

Définition. On dit que n est ω -intéressant, si l'on a

$$m > n \Rightarrow \frac{\omega(m)}{m} < \frac{\omega(n)}{n}.$$

Interprétation géométrique: pour $m > n$, le point $(m, \omega(m))$ est situé sous la droite joignant l'origine à $(n, \omega(n))$.

Propriété 1: Pour $k \geq 1$, le nombre $A_k = 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p_k$ est ω -intéressant. En effet: si $\omega(m) \leq k$ on a bien: $\omega(m)/m < \omega(A_k)/A_k$ pour $m > A_k$. Et si $\omega(m) = k + \Delta$, $\Delta > 0$, on a alors $m \geq A_k 3^\Delta$ et:

$$\frac{\omega(m)}{m} \leq \frac{k + \Delta}{A_k 3^\Delta} = \frac{\omega(A_k)}{A_k} \frac{\left(1 + \frac{\Delta}{k}\right)}{3^\Delta} \leq \frac{\omega(A_k)}{A_k} \frac{1 + \Delta}{3^\Delta} < \frac{\omega(A_k)}{A_k}.$$

Propriété 2: Soit n vérifiant:

$$A_k < n < A_{k+1} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \quad \text{et} \quad \omega(n) = k$$

alors n est ω -intéressant.

Démonstration: Soit $m > n$, ou bien on a: $m \geq A_{k+1}$ et d'après la propriété 1:

$$\frac{\omega(m)}{m} < \frac{\omega(A_{k+1})}{A_{k+1}} \leq \frac{(k+1) \left(1 - \frac{1}{k}\right)}{n} < \frac{\omega(n)}{n}$$

ou bien on a: $n < m < A_{k+1}$ et cela entraîne $\omega(m)/m < k/n = \omega(n)/n$.

Propriété 3: Pour une infinité de valeurs de k , il existe un nombre ω -intéressant, plus grand que A_k et ayant $k - 1$ facteurs premiers.