

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 27 (1981)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LA FONCTION: NOMBRE DE FACTEURS PREMIERS DE N  
**Autor:** Erdős, Paul / Nicolas, Jean-Louis  
**Kapitel:** §2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-51737>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 13.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

$$Q_l(X) \leq \sum_{k=1}^{k_0} \exp(O(\sqrt{p_k})) \leq k_0 \exp(O(\sqrt{p_{k_0}})) \leq \exp(c_2 \sqrt{\log X}).$$

*Remarque.* On peut conjecturer que  $\log Q_l(X) \sim \pi \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\log X}$ . En effet si l'on calcule la constante  $c_2$  dans la majoration ci-dessus, on trouve  $c_2 = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3}}(1+\varepsilon)$ , le « 2 » venant de la formule de Brun-Titchmarsh. Si l'on suppose les nombres premiers très bien répartis autour de  $p_k$ , on peut assimiler  $\log \frac{p_{k+r}}{p_k}$  à  $r \frac{\log p_{k+1}}{p_k}$  et le nombre d'éléments de  $E'_k$  serait le nombre de solutions de l'inéquation

$$\sum_{r=1}^{\infty} r x_r + \sum_{r=1}^{\infty} r y_r \leq p_k \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{\infty} x_i = \sum_{i=1}^{\infty} y_i$$

$x_i, y_i \in \{0, 1\}$ . Le logarithme de ce nombre de solutions est équivalent à  $\pi \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{p_k}$ .

## § 2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2

*Minoration :* Posons  $k = \left[ \frac{c \log x}{\log \log x} \right] + 1$  et  $A_k = e^{\theta(p_k)} = 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p_k$ , où  $\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$  est la fonction de Chebichev. Les multiples  $n$  de  $A_k$  vérifient  $\omega(n) > \frac{c \log x}{\log \log x}$ . Il y en a  $\left[ \frac{x}{A_k} \right]$  qui sont inférieurs à  $x$ . On a (cf. [Land], § 57):

$$\log A_k = \theta(p_k) = p_k + O(p_k / \log^2 p_k) = k(\log k + \log \log k - 1 + o(1)).$$

Il vient en posant  $l = \log x$ ,  $l_2 = \log \log x$ ,  $l_3 = \log \log \log x$ :

$$k = \frac{cl}{l_2} + O(1)$$

$$\log A_k = cl + c(\log c - 1)(1 + o(1))l/l_2$$

et

$$f_c(x) \geq \left[ \frac{x}{A_k} \right] \geq x^{1-c} \exp \left( c(1 - \log c)(1 + o(1)) \frac{\log x}{\log \log x} \right).$$

*Majoration* : En développant par la formule multinomiale (cf. [Com], t. 1, p. 38 ou [Hal 2], p. 147), on obtient :

$$\left( \sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \right)^k \geq k! \sum_{2 \leq p_{i_1} < \dots < p_{i_k} \leq x} \frac{1}{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_k}}$$

On a donc, pour  $k \in \mathbb{N}$ , en désignant par  $S$  l'ensemble des nombres sans facteur carrés,

$$\frac{1}{x} \sum_{\substack{n \leq x, n \in S \\ \omega(n) = k}} 1 \leq \sum_{\substack{n \leq x, n \in S \\ \omega(n) = k}} \frac{1}{n} \leq \frac{1}{k!} \left( \sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \right)^k.$$

Evaluons maintenant le nombre d'entiers  $n \leq x$  dont les facteurs premiers sont exactement  $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k}$ . On doit avoir

$$n = p_{i_1}^{\alpha_1} p_{i_2}^{\alpha_2} \dots p_{i_k}^{\alpha_k} \leq x; \quad \alpha_j \geq 1.$$

Ce qui entraîne

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k \leq \left[ \frac{\log x}{\log 2} \right]; \quad \alpha_j \geq 1.$$

Or le nombre de solutions de cette inéquation est un nombre de combinaisons avec répétition et vaut  $\binom{[\log x / \log 2]}{k} \leq \frac{1}{k!} \left( \frac{\log x}{\log 2} \right)^k$ .

On a donc

$$\frac{1}{x} \sum_{\substack{n \leq x \\ \omega(n) = k}} 1 \leq \frac{1}{(k!)^2} \left( \sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \right)^k \left( \frac{\log x}{\log 2} \right)^k$$

et

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ \omega(n) \geq k}} 1 \leq x \sum_{j \geq k} \frac{\left( \sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \right)^j (\log x / \log 2)^j}{(j!)^2}$$

On utilise la majoration  $\sum_{j \geq k} \frac{a^j}{(j!)^2} \leq \frac{a^k}{(k!)^2} \frac{1}{1 - a/(k+1)^2}$  valable pour  $a < (k+1)^2$ . On sait d'autre part (cf. [Land] § 28) qu'il existe  $B$  tel que

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \leq \log \log x + B, \text{ et on choisit:}$$

$$k = \left[ \frac{c \log x}{\log \log x} \right] + 1.$$

On obtient alors

$$f_c(x) \leq \frac{x(l_2 + B)^k (l/\log 2)^k}{(k!)^2} \left(1 + O\left(\frac{l_2^3}{l}\right)\right)$$

et en remplaçant  $\log k!$  par  $k \log k + O(k)$ , on obtient

$$f_c(x) \leq x^{1-c} \exp \left( 3c(1+o(1)) \frac{\log x \log \log \log x}{\log \log x} \right),$$

ce qui achève la démonstration du théorème 2.

### § 3. VALEURS EXTRÊMES DE $f(n) + f(n+1)$

1) *Fonction  $\sigma(n)$  = somme des diviseurs de  $n$ .*

On remarque d'abord que, lorsque  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$(2) \quad \begin{aligned} \sigma(n) &= n \prod_{p^a \parallel n} \left(1 + \frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{p^a}\right) \\ &= n(1+o(1)) \prod_{\substack{p^a \parallel n \\ p \leq \log n}} \left(1 + \frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{p^a}\right) \end{aligned}$$

autrement dit, les facteurs premiers supérieurs à  $\log n$  ne modifient guère  $\sigma(n)$ . De tels facteurs, il y en a au plus  $\log n / \log \log n$  et:

$$\begin{aligned} \prod_{\substack{p^a \parallel n \\ p > \log n}} \left(1 + \frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{p^a}\right) &\leq \prod_{\substack{p^a \parallel n \\ p > \log n}} \frac{1}{1-1/p} \leq \left(1 - \frac{1}{\log n}\right)^{-\frac{\log n}{\log \log n}} \\ &= 1 + \frac{O(1)}{\log \log n} \end{aligned}$$

ce qui démontre (2).

Ensuite, on a pour tout  $n$ ,  $\sigma(n) \geq n$  et pour  $n$  pair,  $\sigma(n) \geq \frac{3}{2}n$ . On a

donc pour tout  $n$ :  $\sigma(n) + \sigma(n+1) \geq \frac{5}{2}n$ . Inversement, pour  $k$  fixé, le

nombre  $n = 4p_2 p_3 \dots p_k + 1$  est tel que  $n$  et  $n+1$  n'ont pas (à part 2) de facteurs premiers inférieurs à  $(1-\varepsilon)\log n$  et donc vérifie:  $\sigma(n) + \sigma(n+1)$

$$= \frac{5}{2}n(1+o(1)).$$