

# IV. Absolute Finiteness theorems

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1981)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

By Cartier duality, it is equivalent to show that both  $\text{Hom}(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$  and  $\text{Ext}^1(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$  have order  $p$ , and this is obvious (resolve the “first”  $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$  by

$$0 \rightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{p} \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \rightarrow 0).$$

For another proof in this case, cf. Oort, [10], 85.

#### IV. ABSOLUTE FINITENESS THEOREMS

**THEOREM 3.** *Let  $\mathcal{O}$  be the ring of integers in a finite extension  $K$  of  $\mathbf{Q}$ . Let  $X$  be a smooth  $\mathcal{O}$ -scheme of finite type whose geometric generic fibre  $X \otimes_{\mathcal{O}} \overline{K}$  is connected, and which maps surjectively to  $\text{Spec}(\mathcal{O})$  (i.e. for every prime  $\mathfrak{p}$  of  $\mathcal{O}$ , the fibre over  $\mathfrak{p}$ ,  $X \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{O}/\mathfrak{p})$ , is non empty). Then the group  $\pi_1(X)^{ab}$  is finite.*

*Proof.* This follows immediately from Theorem 1 and global classfield theory, according to which  $\pi_1(\text{Spec}(\mathcal{O}))^{ab}$ , the galois group of the maximal unramified abelian extension of  $K$ , is finite. QED

**THEOREM 4.** *Let  $\mathcal{O}$  be the ring of integers in a finite extension  $K$  of  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$  a finite set of primes of  $\mathcal{O}$ ,  $N = p_1 \dots p_n$  the product of their residue characteristics, and  $\mathcal{O}[1/\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_n]$  the ring of “integers outside  $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ ” in  $K$ . Let  $X$  be a smooth  $\mathcal{O}[1/\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_n]$ -scheme of finite type, whose geometric generic fibre  $X \otimes_{\mathcal{O}} \overline{K}$  is connected, and which maps surjectively to  $\text{Spec}(\mathcal{O}[1/\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_n])$  (i.e. for every prime  $\mathfrak{p} \notin \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n\}$ , the fibre*

$$X \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{O}/\mathfrak{p})$$

*is non-empty). Then the group  $\pi_1(X)^{ab}$  is the product of a finite group and a pro- $N$  group.*

*Proof.* Again an immediate consequence of Theorem 1 and global classfield theory, according to which  $\pi_1(\text{Spec}(\mathcal{O}[1/\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_n]))^{ab}$ , the galois group of the maximal abelian, unramified outside  $\{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n\}$ -extension of  $K$  is finite times pro- $N$ . QED

**THEOREM 5.** *Let  $S$  be a normal, connected noetherian scheme, whose function field  $K$  is absolutely finitely generated. Let  $f: X \rightarrow S$  be a smooth surjective morphism of finite type whose geometric generic fibre is connected, and which admits a cross-section  $X \xrightarrow{\varepsilon} S$ . Then there are only finitely many connected finite etale  $X$ -schemes  $Y/X$  which are galois over  $X$  with abelian galois group of order prime to  $\text{char}(K)$  and which are completely decomposed over the marked section. If in addition we suppose  $X/S$  proper, we can drop the proviso "of order prime to  $\text{char}(K)$ ".*

*Proof.* This is just the concatenation of Theorems 1 and 2 with the physical interpretation (1.3) of the group  $\text{Ker}(X/S)$  in the presence of a section. QED

## V. APPLICATION TO $l$ -ADIC REPRESENTATIONS

Let  $l$  be a prime number,  $\overline{\mathbf{Q}}_l$  an algebraic closure of  $\mathbf{Q}_l$ . By an  $l$ -adic representation  $\rho$  of a topological group  $\pi$ , we mean a finite-dimensional continuous representation

$$\rho: \pi \rightarrow GL(n, \overline{\mathbf{Q}}_l)$$

whose image lies in  $GL(n, E_\lambda)$  for some finite extension  $E_\lambda$  of  $\mathbf{Q}_l$ .

**THEOREM 6.** (cf. Grothendieck, *via* [2], 1.3). *Let  $K$  be an absolutely finitely generated field,  $X/K$  a smooth, geometrically connected  $K$ -scheme of finite type,  $\bar{x}$  a geometric point of  $X \otimes \overline{K}$ ,  $x$  the image geometric point of  $\bar{x}$  in  $X$ . Let  $l$  be a prime number, and  $\rho$  an  $l$ -adic representation of  $\pi_1(X, x)$ ;*

$$\rho: \pi_1(X, x) \rightarrow GL(n, \overline{\mathbf{Q}}_l).$$

*Let  $G$  be the Zariski closure of the image  $\rho(\pi_1(X \otimes \overline{K}, \bar{x}))$  of the geometric fundamental group  $\pi_1(X \otimes \overline{K}, \bar{x})$  in  $GL(n, \overline{\mathbf{Q}}_l)$  and  $G^0$  its identity component. Suppose that either  $l$  is different from the characteristic  $p$  of  $K$ , or that  $X/K$  is proper. Then:*

- (1) *the radical of  $G^0$  is unipotent, or equivalently:*
- (2) *if the restriction of  $\rho$  to the geometric fundamental group  $\pi_1(X \otimes \overline{K}, \bar{x})$  is completely reducible, then the algebraic group  $G^0$  is semi-simple.*