Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 27 (1981)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR L'USAGE DE CRITÈRES POUR RECONNAÎTRE UN GROUPE LIBRE, UN PRODUIT AMALGAMÉ OU UNE HNN-EXTENSION

Autor: Hausmann, Jean-Claude

Kapitel: Introduction

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-51750

SUR L'USAGE DE CRITÈRES POUR RECONNAÎTRE UN GROUPE LIBRE, UN PRODUIT AMALGAMÉ OU UNE *HNN*-EXTENSION

par Jean-Claude HAUSMANN

INTRODUCTION

Soit G un groupe agissant sur un ensemble X et soit H un sous-groupe de G. Il existe dans la littérature divers critères pour décider si H est un groupe libre, un produit amalgamé ou une HNN-extension, ceci à l'aide de conditions sur l'action de G sur X. Le lecteur trouvera un résumé de ces travaux aux pages 167-169 du § III.12 de [L-S].

Le but principal de cet article est de montrer le profit que l'on peut tirer de critères analogues lorsque X est un arbre. Nous présentons ainsi dans le § 3 une simplification de la démonstration combinatoire de Serre qu'un groupe est libre s'il agit librement sur un arbre [Se, § 3.3]. Nous obtenons aussi quelques résultats sur la liberté de certains sous-groupe du groupe d'automorphismes d'un arbre.

Les sections 4 et 5 sont consacrées à la détection des produits amalgamés et des HNN-extensions, avec des critères différents de ceux indiqués dans [L-S]. On obtient ainsi une démonstration simple des théorèmes de Bass-Serre affirmant qu'un groupe qui agit sur un arbre de manière que le graphe quotient ait exactement une arête est un produit amalgamé non-trivial ou une HNN-extension.

Cet article se termine par un nouvel éclairage sur les structures bipolaires de Stallings [St], dans leur version généralisée par Lyndon-Schupp [L-S, IV.6]. On donne une nouvelle démonstration du théorème de Stallings qu'un groupe admet une structure bipolaire si et seulement si il est un produit amalgamé non-trivial ou une HNN-extension.[1]) Dans un sens, on démontre qu'un groupe qui

[1]) Ce résultat fut utilisé par Stallings dans sa preuve originale du théorème de structure pour les groupes à une infinité de bouts. Par ailleurs, d'autres démonstrations de ce théorème de structures furent ensuite trouvées, qui utilisent la théorie de Bass-Serre (voir [Du], [S-W, §6], par exemple). Mais ces preuves n'utilisent plus le passage par les structures bipolaires.

agit sur un arbre avec un élément qui agit sans sommet fixe admet une structure bipolaire. Or un produit amalgamé non-trivial ou une *HNN*-extension agit toujours sur un arbre de cette façon par la réciproque du théorème de Bass-Serre cité plus haut. L'autre direction s'obtient par un usage de nos critères.

Les résultats présentés ici constituèrent quelques chapitres d'un cours de 2^e cycle donné par l'auteur à l'université de Genève pendant l'année académique 1979-1980. Je tiens à remercier P. de la Harpe pour de très utiles conversations.

2. Définitions et généralités sur les actions de groupes et les graphes

(2.1) Soit G un groupe agissant sur un ensemble X. Sauf mention du contraire, une telle action est toujours à gauche. L'ensemble des orbites est noté $G\backslash X$. Pour $x \in X$, on définit comme de coutume le *groupe d'isotropie* G_x de x:

$$G_x = \{ g \in G \mid gx = x \}$$

et on dit que l'action est *libre* si $G_x = \{ 1 \}$ pour tout $x \in X$. Un sous-ensemble de X qui contient exactement un représentant par orbite est appelé un *ensemble de représentants* pour l'action de G sur X.

(2.2) Un *graphe* Γ est une paire d'ensembles ($\mathrm{Som}\,\Gamma$, $\mathrm{Ar}\,\Gamma$), appelés l'ensemble des *sommets* et l'ensemble des *arêtes* de Γ, munis de deux applications $o, e : \mathrm{Ar}\,\Gamma \to \mathrm{Som}\,\Gamma$ (*origine* et *extrémité*). Comme d'habitude, on rend compte de cette donnée par un dessin où une arête a est un arc orienté allant de $o(a)$ à $e(a)$; ce dessin correspond à la réalisation géométrique du graphe qui est un CW-complexe de dimension 1.

Une action d'un groupe G sur un graphe Γ est une action de G sur $\mathrm{Som}\,\Gamma$ et sur $\mathrm{Ar}\,\Gamma$ telle que

$$o(ga) = go(a) \qquad \text{et} \qquad e(ga) = ge(a)$$

pour tout $a \in \mathrm{Ar}\,\Gamma$ et tout $g \in G$. Les applications o et e passent alors aux quotients $G\backslash\mathrm{Som}\,\Gamma$ et $G\backslash\mathrm{Ar}\,\Gamma$ ce qui donne un *graphe quotient* $G\backslash\Gamma$.

(2.3) *Chemins dans un graphe.* On appelle CH_n tout graphe satisfaisant à:

$$\mathrm{Som}\, CH_n = \{ 0, 1, 2, ..., n \}$$
$$\mathrm{Ar}\, CH_n = \{ [0, 1], [1, 2], ..., [n-1, n] \mathrm{N}$$

$$\{ o([k-1, k]), e([k-1, k]) \} = \{ k-1, k \}$$