

<b>Zeitschrift:</b>	L'Enseignement Mathématique
<b>Herausgeber:</b>	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
<b>Band:</b>	27 (1981)
<b>Heft:</b>	1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
<b>Artikel:</b>	SUR L'USAGE DE CRITÈRES POUR RECONNAÎTRE UN GROUPE LIBRE, UN PRODUIT AMALGAMÉ OU UNE HNN-EXTENSION
<b>Autor:</b>	Hausmann, Jean-Claude
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-51750">https://doi.org/10.5169/seals-51750</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 24.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

SUR L'USAGE DE CRITÈRES  
POUR RECONNAÎTRE UN GROUPE LIBRE,  
UN PRODUIT AMALGAMÉ OU UNE *HNN*-EXTENSION

par Jean-Claude HAUSMANN

INTRODUCTION

Soit  $G$  un groupe agissant sur un ensemble  $X$  et soit  $H$  un sous-groupe de  $G$ . Il existe dans la littérature divers critères pour décider si  $H$  est un groupe libre, un produit amalgamé ou une *HNN*-extension, ceci à l'aide de conditions sur l'action de  $G$  sur  $X$ . Le lecteur trouvera un résumé de ces travaux aux pages 167-169 du § III.12 de [L-S].

Le but principal de cet article est de montrer le profit que l'on peut tirer de critères analogues lorsque  $X$  est un arbre. Nous présentons ainsi dans le § 3 une simplification de la démonstration combinatoire de Serre qu'un groupe est libre s'il agit librement sur un arbre [Se, § 3.3]. Nous obtenons aussi quelques résultats sur la liberté de certains sous-groupe du groupe d'automorphismes d'un arbre.

Les sections 4 et 5 sont consacrées à la détection des produits amalgamés et des *HNN*-extensions, avec des critères différents de ceux indiqués dans [L-S]. On obtient ainsi une démonstration simple des théorèmes de Bass-Serre affirmant qu'un groupe qui agit sur un arbre de manière que le graphe quotient ait exactement une arête est un produit amalgamé non-trivial ou une *HNN*-extension.

Cet article se termine par un nouvel éclairage sur les structures bipolaires de Stallings [St], dans leur version généralisée par Lyndon-Schupp [L-S, IV.6]. On donne une nouvelle démonstration du théorème de Stallings qu'un groupe admet une structure bipolaire si et seulement si il est un produit amalgamé non-trivial ou une *HNN*-extension.<sup>1)</sup> Dans un sens, on démontre qu'un groupe qui

<sup>1)</sup> Ce résultat fut utilisé par Stallings dans sa preuve originale du théorème de structure pour les groupes à une infinité de bouts. Par ailleurs, d'autres démonstrations de ce théorème de structures furent ensuite trouvées, qui utilisent la théorie de Bass-Serre (voir [Du], [S-W, §6], par exemple). Mais ces preuves n'utilisent plus le passage par les structures bipolaires.

agit sur un arbre avec un élément qui agit sans sommet fixe admet une structure bipolaire. Or un produit amalgamé non-trivial ou une *HNN*-extension agit toujours sur un arbre de cette façon par la réciproque du théorème de Bass-Serre cité plus haut. L'autre direction s'obtient par un usage de nos critères.

Les résultats présentés ici constituèrent quelques chapitres d'un cours de 2<sup>e</sup> cycle donné par l'auteur à l'université de Genève pendant l'année académique 1979-1980. Je tiens à remercier P. de la Harpe pour de très utiles conversations.

## 2. DÉFINITIONS ET GÉNÉRALITÉS SUR LES ACTIONS DE GROUPES ET LES GRAPHES

(2.1) Soit  $G$  un groupe agissant sur un ensemble  $X$ . Sauf mention du contraire, une telle action est toujours à gauche. L'ensemble des orbites est noté  $G \backslash X$ . Pour  $x \in X$ , on définit comme de coutume le *groupe d'isotropie*  $G_x$  de  $x$ :

$$G_x = \{ g \in G \mid gx = x \}$$

et on dit que l'action est *libre* si  $G_x = \{ 1 \}$  pour tout  $x \in X$ . Un sous-ensemble de  $X$  qui contient exactement un représentant par orbite est appelé un *ensemble de représentants* pour l'action de  $G$  sur  $X$ .

(2.2) Un *graphe*  $\Gamma$  est une paire d'ensembles  $(\text{Som } \Gamma, \text{Ar } \Gamma)$ , appelés l'ensemble des *sommets* et l'ensemble des *arêtes* de  $\Gamma$ , munis de deux applications  $o, e : \text{Ar } \Gamma \rightarrow \text{Som } \Gamma$  (*origine* et *extrémité*). Comme d'habitude, on rend compte de cette donnée par un dessin où une arête  $a$  est un arc orienté allant de  $o(a)$  à  $e(a)$ ; ce dessin correspond à la réalisation géométrique du graphe qui est un *CW-complexe* de dimension 1.

Une action d'un groupe  $G$  sur un graphe  $\Gamma$  est une action de  $G$  sur  $\text{Som } \Gamma$  et sur  $\text{Ar } \Gamma$  telle que

$$o(ga) = go(a) \quad \text{et} \quad e(ga) = ge(a)$$

pour tout  $a \in \text{Ar } \Gamma$  et tout  $g \in G$ . Les applications  $o$  et  $e$  passent alors aux quotients  $G \backslash \text{Som } \Gamma$  et  $G \backslash \text{Ar } \Gamma$  ce qui donne un *graphe quotient*  $G \backslash \Gamma$ .

(2.3) *Chemins dans un graphe.* On appelle  $CH_n$  tout graphe satisfaisant à :

$$\begin{aligned} \text{Som } CH_n &= \{ 0, 1, 2, \dots, n \} \\ \text{Ar } CH_n &= \{ [0, 1], [1, 2], \dots, [n-1, n] \} \\ \{ o([k-1, k]), e([k-1, k]) \} &= \{ k-1, k \} \end{aligned}$$

FIG. 1. — Deux graphes de type  $CH_4$ 

Un *chemin* (*de longueur*  $n$ ) dans un graphe  $\Gamma$  est un morphisme de graphe  $c : CH_n \rightarrow \Gamma$ . Si  $a$  et  $b \in \text{Som } \Gamma$  sont dans l'image de  $\text{Som } CH_n$  par  $c$ , on dit que le chemin  $c$  relie  $a$  à  $b$ . Cette notion de chemin définit celle de *connexité* et de *composante connexe* d'un graphe.

Le lecteur aura remarqué la non-unicité du modèle  $CH_n$ , qui provient bien entendu de ce que nous travaillons dans la catégorie des graphes orientés. On peut contourner cette difficulté technique en doublant formellement chaque arête, comme dans [Se]. Mais cela rendrait d'autres points plus compliqués et notre solution, malgré cette petite imperfection formelle, nous a paru permettre une exposition plus légère.

(2.4) Si  $U$  et  $V$  sont deux sous-ensembles de  $\text{Som } \Gamma$ , la *distance*  $d(U, V)$  entre  $U$  et  $V$  est l'entier positif ou nul défini comme le minimum des longueurs de chemins reliant un point de  $U$  à un point de  $V$ . Pour  $u, v \in \text{Som } \Gamma$ , on usera des allégements de notation :

$$d(u, V) = d(\{u\}, V) \quad \text{et} \quad d(u, v) = d(\{u\}, \{v\}).$$

(2.4) PROPOSITION. Soit  $G$  un groupe agissant sur un graphe connexe  $\Gamma$ , et soit  $U \subset \text{Som } \Gamma$  un ensemble de représentants pour l'action de  $G$  sur  $\text{Som } \Gamma$ . Soit  $u \in U$ . Alors  $G$  est engendré par  $G_u \cup R_U$ , où  $R_U$  est défini par :

$$R_U = \{ r \in G \mid \text{il existe } a \in \text{Ar } \Gamma \text{ telle que } o(a) \in U \text{ et } e(a) \in rU \}$$

Démonstration. Soit  $H$  le sous-groupe de  $G$  engendré par  $G_u \cup R_U$ . Soit  $g \in G$ . On va démontrer que  $g \in H$  par récurrence sur la distance  $d(U, gu)$ . Si  $d(U, gu) = 0$ , cela signifie que  $gu \in U$ . Comme  $U$  est un ensemble de représentants, cela n'est possible que si  $gu = u$ , auquel cas  $g \in G_u \subset H$ .

Prenons donc comme hypothèse de récurrence que  $h \in H$  pour tout  $h \in G$  tel que  $d(U, hu) \leq d$ . Soit  $g \in G$  satisfaisant à  $d(U, gu) = d + 1$ . Soit  $c : CH_{d+1} \rightarrow \Gamma$  un chemin reliant  $v \in U$  à  $gu$ . On a alors  $c(\{0, 1\}) = \{v, x\}$ , avec  $x \notin U$ . Soient  $r \in G$  et  $p \in U$  tels que  $x = rp$ , et dénotons par  $a$  l'arête  $c([0, 1]) \in \text{Ar } \Gamma$ .

Supposons que  $e(a) = x$ . Par hypothèse, on a alors  $r \in R_U$ . Le chemin  $c' : CH_d \rightarrow \Gamma$  défini par  $c'(k) = r^{-1} c(k+1)$  sur les sommets et

$$c'([k, k+1]) = c([k+1, k+2])$$

sur les arêtes relie  $p \in U$  à  $r^{-1}gu$ . On en déduit par l'hypothèse de récurrence que  $r^{-1}g \in H$ , d'où  $g \in H$ .

Dans le cas où  $o(a) = x$ , on a alors  $r^{-1} \in R_U$  puisque  $o(r^{-1}a) = p$  et  $e(r^{-1}a) = r^{-1}p$ . Le même raisonnement que précédemment montre que  $rg \in H$ , d'où  $g \in H$ . ■

(2.5) *Arbres.* Un *arbre*  $\Gamma$  est un graphe connexe tel que pour toute arête  $a$  de  $\Gamma$ , le sous-graphe maximal  $\Gamma_a$  de  $\Gamma$  qui ne contient pas l'arête  $a$  est non-connexe. On vérifie alors que  $\Gamma_a$  est formé de deux composantes connexes, l'une contenant  $o(a)$  et l'autre contenant  $e(a)$ . Nous appellerons  $\mathcal{B}(a)$  la composante connexe de  $\Gamma_a$  qui contient  $e(a)$  (« *branches* de  $a$  ») et  $\mathcal{R}(a)$  (« *racines* de  $a$  ») celle où se trouve  $o(a)$ . (L'arête  $a$  est momentanément pressentie comme étant le « *tronc* » de l'arbre). Les sous-graphes  $\mathcal{B}(a)$  et  $\mathcal{R}(a)$  sont des sous-arbres de  $\Gamma$ . Si  $g$  est un automorphisme de  $\Gamma$ , on a  $g\mathcal{B}(a) = \mathcal{B}(ga)$  et  $g\mathcal{R}(a) = \mathcal{R}(ga)$ .

Notre définition d'un arbre est évidemment équivalente à celle plus courante d'un graphe sans circuit ou d'un graphe dont la réalisation géométrique est contractile.

(2.6) *Chaînes infinies.* On définit les graphes  $CH_\infty$  de la même manière que  $CH_n$ , sauf que  $\text{Som } CH_\infty = \mathbb{Z}$ . Une *chaîne infinie* d'un graphe  $\Gamma$  est un morphisme  $c : CH_\infty \rightarrow \Gamma$  qui est injectif sur les ensembles de sommets et d'arêtes (condition qui n'est pas requise dans la définition d'un chemin).

(2.7) Si  $G$  est un groupe qui agit sur un graphe connexe  $\Gamma$ , on peut toujours trouver un ensemble de représentants de l'action de  $G$  sur  $\text{Som } \Gamma$  qui soit l'ensemble des sommets d'un sous-arbre  $A$  de  $\Gamma$ . C'est un relevé d'un arbre maximal de  $G \backslash \Gamma$ . Pour une démonstration de ces faits, voir [Se, § 3]. L'arbre  $A$  s'appelle un *arbre de représentants*, mais nous attirons l'attention du lecteur que  $\text{Ar } A$  n'est pas un ensemble de représentants pour l'action de  $G$  sur  $\text{Ar } \Gamma$ .

## 3. CRITÈRE POUR GROUPES LIBRES

Il s'agit du critère suivant :

(3.1) PROPOSITION. *Soient  $G$  un groupe agissant sur un ensemble  $X$ ,  $B$  un sous-ensemble de  $G$  et  $H$  le sous-groupe de  $G$  engendré par  $B$ . Supposons qu'il existe une collection  $L_v (v \in B)$  de sous-ensembles de  $X$  et un élément  $d$  de  $X - \bigcup_{v \in B} L_v$  tels que  $b^n(L_v \cup \{d\}) \subset L_b$  pour tout  $b$  et  $v \in B$  avec  $b \neq v$  et tout  $n \in \mathbf{Z} - \{0\}$ . Alors  $H$  est libre de base  $B$ .*

Démonstration. Soit  $w = v_1^{n_1} v_2^{n_2} \dots v_k^{n_k}$ , avec  $v_i \in B$ ,  $n_i \in \mathbf{Z}$  et  $v_i \neq v_{i+1}$ . On sait que  $H$  est libre de base  $B$  si, pour tout élément  $w$  satisfaisant aux conditions ci-dessus, l'équation  $w = 1$  n'est possible que si  $n_i = 0$  pour tout  $i$  (conséquence de [L-S, Chap. 1, Prop. 1.9], par exemple). Or, les hypothèses de (3.1) impliquent que  $wd \in L_{v_1}$ . Comme  $d \notin L_{v_1}$ , on a  $wd \neq d$ , d'où  $w \neq 1$ . ■

Le critère (3.1) est un cas particulier d'un énoncé de Tits [Ti 2, Prop. 1.1] (énoncé qui sera lui-même généralisé au § 4). Mais son usage implicite est plus ancien. Dans [F-K, pp. 190-194] ou [Le, pp. 118-120], on l'utilise pour démontrer la liberté des groupes de Schottky : soient  $(P_i, Q_i)$   $m$  paires de cercles dans  $\mathbf{C}$  tels que tous les cercles soient extérieurs les uns aux autres. Soient  $b_i : \mathbf{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbf{C} \cup \{\infty\}$  des transformations de Möbius telles que  $b_i$  (extérieur  $(P_i)$ )  $\subset$  intérieur  $(Q_i)$ , ( $i = 1, \dots, m$ ). On déduit que les  $b_i$  engendrent un groupe libre de rang  $n$  dans le groupe de Möbius en appliquant (3.1) à  $L_{b_i} =$  intérieur  $(P_i) \cup$  intérieur  $(Q_i)$  et  $d = \infty$ .

Nous allons maintenant utiliser notre critère (3.1) pour donner une nouvelle démonstration du théorème de Serre [Se, Théorème 4', § 3.3] :

(3.2) THÉORÈME. *Soit  $G$  un groupe agissant librement sur un arbre  $\Gamma$  et soit  $A$  un arbre de représentants. Alors  $G$  est libre de base  $R_{\text{Som } A}$  (voir (2.4)).*

Démonstration. Comme l'action est libre,  $G$  est engendré par  $R_{\text{Som } A}$  en vertu de (2.4). Puisque  $A$  est connexe et que  $\Gamma$  est un arbre, il existe, pour chaque  $r \in R_{\text{Som } A}$  une unique arête  $a_r \in \text{Ar } \Gamma$  telle que  $o(a_r) \in \text{Som } A$  et  $e(a_r) \in r \text{ Som } A$ . On va appliquer le critère (3.1) à la situation :

$$X = \text{Som } \Gamma \quad L_r = \text{Som } \mathcal{B}(a_r) \cup \text{Som } \mathcal{R}(r^{-1}a_r) \quad d \in \text{Som } A$$

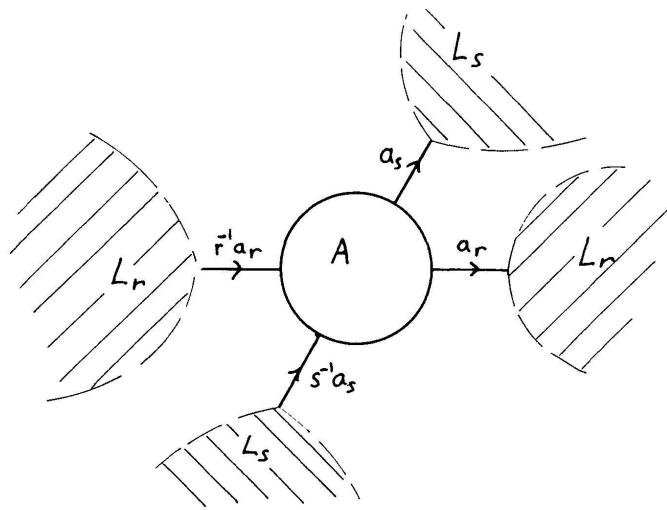


FIG. 2.

Soit  $M_r = \text{Som } A \cup \left[ \bigcup_{s \neq r} L_s \right]$  ( $r \in R_{\text{Som } A}$ ). On déduit de la définition de  $R_{\text{Som } A}$  que l'orbite de  $a_r$  ne contient aucune des arêtes de  $A$  et que

$$M_r \subset \mathcal{B}(r^{-1}a_r) \cap \mathcal{R}(a_r).$$

Il s'en suit que, pour tout  $n > 0$ , on a

$$r^n M_r \subset \mathcal{B}(a_r) \subset L_r \quad \text{et} \quad r^{-n} M_r \subset \mathcal{R}(r^{-1}a_r) \subset L_r. \quad \blacksquare$$

Rappelons maintenant la classification de Tits [Ti, Proposition 3.2] des automorphismes d'un arbre :

(3.3) PROPOSITION. *Soit  $g$  un automorphisme d'un arbre  $\Gamma$ . Alors,  $g$  possède l'une des deux propriétés suivantes (qui s'excluent mutuellement) :*

- 1)  *$g$  laisse fixe un sommet de  $\Gamma$ ;*
- 2) *il existe une unique chaîne infinie  $C_g$  de  $\Gamma$  stable par  $g$  et sur laquelle  $g$  agit par translation non-triviale.*

*Remarque.* Comme nos graphes sont orientés, le cas (ii) de la proposition 3.2 de [Ti] ne se produit pas. C'est pourquoi il n'y a que deux possibilités dans (3.3).

(3.4) PROPOSITION. *Soient  $g$  et  $h$  deux automorphismes d'un arbre  $\Gamma$  qui ne laissent aucun sommet fixe. Alors, si  $\text{Ar } C_g \cap \text{Ar } C_h = \emptyset$ , les automorphismes  $g$  et  $h$  engendrent un sous-groupe libre de rang 2 dans le groupe  $\text{Aut } \Gamma$  des automorphismes de  $\Gamma$ .*

*Démonstration.* Deux cas peuvent se présenter :

- a)  $\text{Som } C_g \cap \text{Som } C_h = \{v\} \subset \text{Som } \Gamma$ ;
- b)  $\text{Som } C_g \cap \text{Som } C_h = \emptyset$ .

Envisageons tout d'abord le cas a), et supposons qu'il existe des arêtes  $a_g, a'_g \in C_g$  et  $a_h, a'_h \in C_h$  satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\begin{aligned} o(a_g) &= e(a'_g) = v = o(a_h) = e(a'_h), \\ ga_g &\in \mathcal{B}(a_g) \quad \text{et} \quad ha_h \in \mathcal{B}(a_h). \end{aligned}$$

Cette supposition est anodine car, dans les autres cas, la démonstration serait identique après adaptation des notations : changement éventuel de «  $o(\cdot)$  » en «  $e(\cdot)$  », de «  $\mathcal{B}$  » en «  $\mathcal{R}$  », etc. De la même manière que dans (3.2), la proposition (3.4) est une conséquence du critère (3.1) appliqué à la situation :

$$\begin{aligned} X &= \text{Som } \Gamma, \quad d = v \\ L_g &= \text{Som } \mathcal{B}(a_g) \cup \text{Som } \mathcal{R}(a'_g) \\ L_h &= \text{Som } \mathcal{B}(a_h) \cup \text{Som } \mathcal{R}(a'_h) \end{aligned}$$

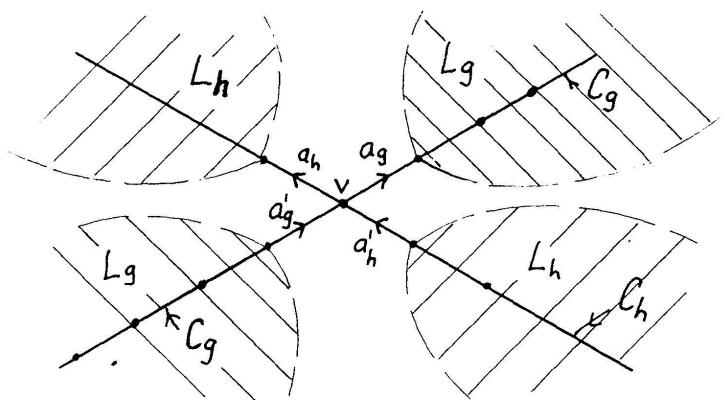


FIG. 3.

Dans le cas b), soit  $c : CH_n \rightarrow \Gamma$  un chemin minimal reliant  $C_g$  à  $C_h$ . On peut supposer que  $c(0) \in C_g$  et  $c(n) \in C_h$ , les autres cas donnant des démonstrations identiques à changement de notations près. On applique alors le critère (3.1) à la situation :

$$\begin{aligned} X &= \text{Som } \Gamma, & d &\in \text{Som } c(CH_n) - \{c(0), c(n)\} \\ L_g &= \text{Som } \mathcal{R}(c([0, 1])), & L_h &= \text{Som } \mathcal{B}(c([n-1, n])) \end{aligned}$$

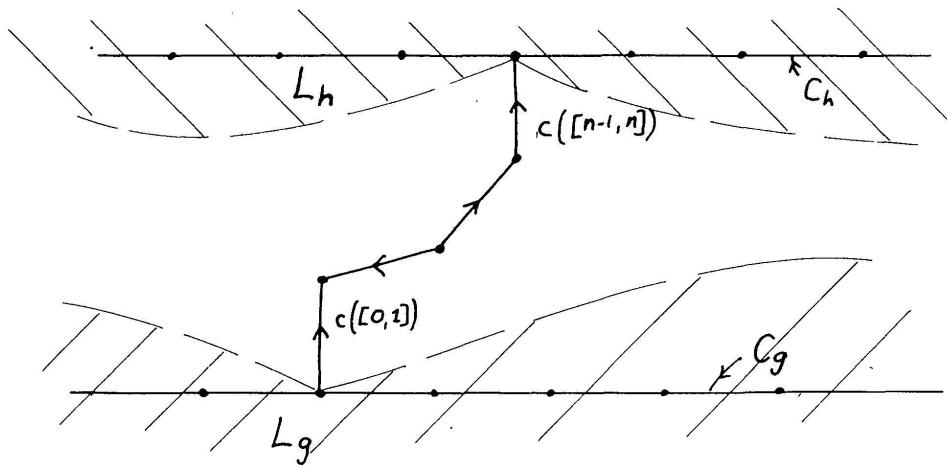


FIG. 4.

La seule difficulté est que le choix du sommet  $d$  ci-dessus n'est pas possible si  $n = 1$ . Ce cas fâcheux s'évite facilement en passant au premier subdivisé barycentrique de  $\Gamma$ . ■

(3.5) PROPOSITION. Soient  $g_1$  et  $g_2$  deux automorphismes d'un arbre  $\Gamma$  qui ne laissent aucun sommet fixe. On suppose que  $g_i$  induit une translation d'amplitude  $k_i$  sur sa chaîne  $C_i = C_{g_i}$  et que

$$\text{Card}(\text{Ar } C_1 \cap \text{Ar } C_2) = q < \infty.$$

Soient  $r$  et  $s$  deux entiers satisfaisant à  $rk_1 > q < sk_2$ . Alors, les automorphismes  $g_1^r$  et  $g_2^s$  engendrent un groupe libre de rang 2 dans  $\text{Aut } \Gamma$ .

Démonstration. Puisque  $\Gamma$  est un arbre, le graphe  $C_1 \cap C_2$  est connexe ; il s'agit donc d'un chemin  $B$  de longueur  $q$ . On peut supposer que la première arête  $a$  de  $B$  a son origine à l'origine de  $B$  et que  $g_i a \in \mathcal{B}(a)$  (les autres cas donnent lieu à des arguments identiques). De même, on peut supposer que les arêtes  $a_1 \in \text{Ar } C_1$  et  $a_2 \in \text{Ar } C_2$  « précédent »  $a$  sont orientées de façon que  $e(a_1) = e(a_2) = o(a)$ . L'hypothèse  $rk_1 > q < sk_2$  implique que

$$B \subset (\mathcal{B}(a_1) \cap \mathcal{R}(g_1^r a_1)) \cap (\mathcal{B}(a_2) \cap \mathcal{R}(g_2^s a_2)).$$

On va appliquer le critère (3.1) à la situation :

$$X = \text{Som } \Gamma \quad d = e(a)$$

$$L_1 = \text{Som } \mathcal{R}(a_1) \cup \text{Som } \mathcal{B}(g_1^r a_1)$$

$$L_2 = \text{Som } \mathcal{R}(a_2) \cup \text{Som } \mathcal{B}(g_2^s a_2))$$

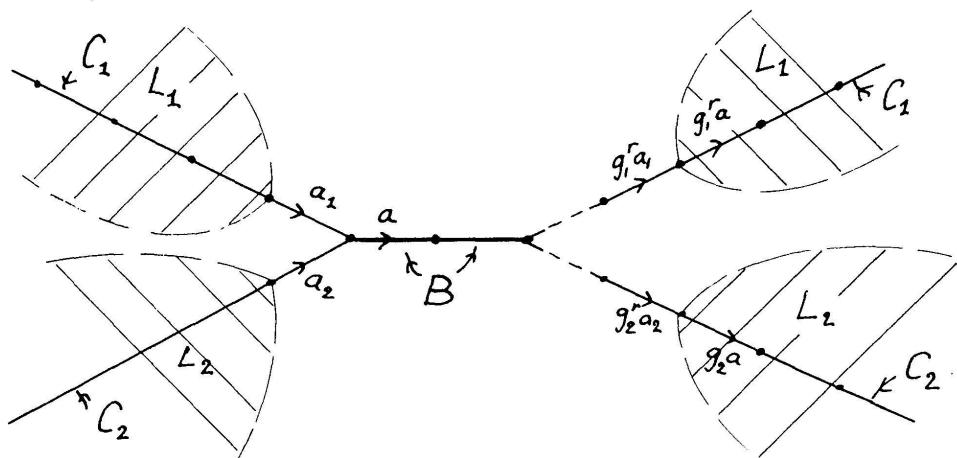


FIG. 5.

On vérifie les hypothèses de (3.1) comme pour la démonstration de (3.2), en utilisant que

$$L_1 \cup \{ d \} \subset \mathcal{B}(a_2) \cap \mathcal{R}(g_2^s a_2)$$

et

$$L_2 \cup \{ d \} \subset \mathcal{B}(a_1) \cap \mathcal{R}(g_1^r a_1). \blacksquare$$

(3.6) *Exemple.* Considérons l'action habituelle par transformations homographiques du groupe  $SL_2(\mathbb{Z})$  sur le demi-plan de Poincaré  $H = \{ z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0 \}$ . L'orbite de l'arc de cercle

$$a = \{ z = e^{i\theta} \mid \pi/2 < z < 2\pi/3 \}$$

constitue, comme le remarque Serre [Se, p. 52], la réalisation géométrique d'un arbre (voir figure 6 ci-dessous).

Soient  $g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , c'est-à-dire, en termes de transformations homographiques :  $g(z) = z + 1$  et  $g(z) = \frac{z}{z + 1}$ . On vérifie par calcul direct que  $ga$ ,  $g^{-1}a$ ,  $ha$  et  $h^{-1}a$  sont les arêtes dessinées sur la figure 6 :

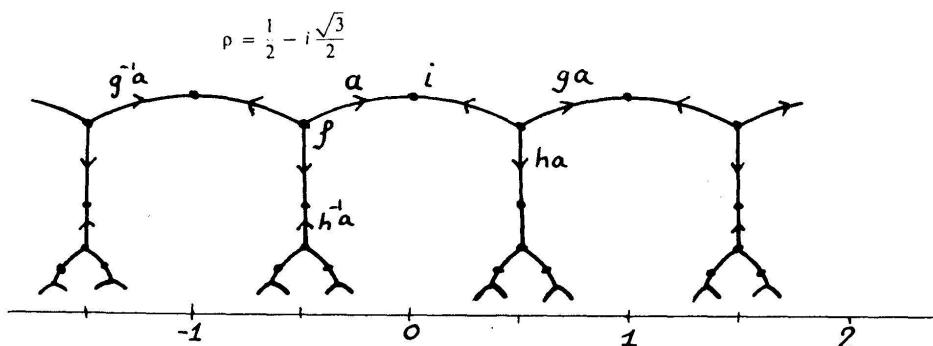


FIG. 6.

On en déduit que  $g$  et  $h$  translatent avec amplitude 2 des chaînes  $C_g$  et respectivement  $C_h$ , et  $C_g \cap C_h$  contient l'arête  $a$  ainsi que sa transformée par  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . La proposition (3.5) implique alors le fait (classique) que  $g^2$  et  $h^2$  engendrent un groupe libre de rang 2 dans  $SL_2(\mathbf{Z})$ . Observons que le sous-groupe de  $SL_2(\mathbf{Z})$  engendré par  $g$  et  $h^2$  n'est pas libre, comme en témoigne la relation  $(gh^{-2})^4 = 1$ . Ceci montre que l'hypothèse  $rk_g > q < sk_h$  de (3.5) est essentielle.

#### 4. CRITÈRES POUR PRODUITS AMALGAMÉS

Soit  $B_i$ ,  $i \in J$ , une famille de sous-groupes d'un groupe  $G$  et soit  $F$  un sous-groupe de  $\bigcap_{i \in J} B_i$ . Les inclusions  $B_i \subset G$  s'étendent en un unique homomorphisme  $\Psi: *_F B_i \rightarrow G$ , où  $*_F B_i$  dénote le produit de tous les  $B_i$  amalgamé sur  $F$ .

(4.1) **PROPOSITION.** *Soient  $B_i$ ,  $G$  et  $F$  comme ci-dessus. On suppose que le groupe  $G$  agit sur un ensemble  $X$  et qu'il existe une famille  $L_i$  ( $i \in J$ ) de sous-ensembles de  $X$  et un élément  $d \in X - \bigcup_{i \in J} L_i$  tels que :*

- 1)  $F \subset G_d$
- 2)  $(B_i - F)(L_j \cup \{d\}) \subset L_i$ , pour tout  $i, j \in J$  avec  $i \neq j$ .

*Alors, l'homomorphisme  $\Psi: *_F B_i \rightarrow G$  induits par les inclusions  $B_i \subset G$  est injectif.*

*Démonstration.* Tout élément  $g \in *_F B_i$  peut s'écrire  $g = g_1 f$  avec  $f \in F$  et  $g_1 = b_n b_{n-1} \dots b_1$ , où les  $b_k$  sont des éléments de  $B_{i(k)} - F$ , avec  $i(k) \in J$  et  $i(k) \neq i(k+1)$ . Si  $\Psi(g) = 1$  et  $g \neq 1$ , cela entraîne que  $g_1 \neq 1$ , puisque  $\Psi|F$  est injectif. Mais alors, si  $g_1 \neq 1$ , nos hypothèses font que  $\Psi(g)d \in L_{i(n)}$ . Comme  $d \notin L_{i(n)}$ , cela montre que  $\Psi(g) \neq 1$ , d'où  $\Psi$  est injectif. ■

(4.2) *Remarques.* 1) Il résulte de la démonstration ci-dessus que l'hypothèse 2) de (4.1) peut être affaiblie en :  $X_i(L_j \cup \{d\}) \subset L_i$ , pour tout  $i, j \in J$  avec  $i \neq j$ , où  $X_i$  est un ensemble de représentants des classes à gauche non-triviales de  $B_i$  modulo  $F$ .

2) Le cas  $F = 1$  redonne la Proposition 1.1 de [Ti 2].

(4.3) COROLLAIRE. Soit  $G$  un groupe agissant sur un arbre  $\Gamma$ . Soit  $a \in \text{Ar } \Gamma$  avec  $o(a) = u$  et  $e(a) = v$ . Alors, l'homomorphisme  $\Psi: G_u *_{G_a} G_v \rightarrow G$  induit par les inclusions dans  $G$  des groupes d'isotropie de  $u, v$  et  $a$  est injectif.

Démonstration. Soit  $\dot{\Gamma}$  le premier subdivisé barycentrique de  $\Gamma$ . Rappelons que le graphe  $\dot{\Gamma}$  peut être défini par :

$$\text{Som } \dot{\Gamma} = \text{Som } \Gamma \cup \text{Ar } \Gamma$$

$$\begin{aligned} \text{Ar } \dot{\Gamma} = & \{ (x, b) \in \text{Som } \Gamma \times \text{Ar } \Gamma \mid o(b) = x \} \\ & \cup \{ (b, x) \in \text{Ar } \Gamma \times \text{Som } \Gamma \mid e(b) = x \} \end{aligned}$$

avec

$$o(x, b) = x, \quad e(x, b) = b,$$

$$o(b, x) = b \quad \text{et} \quad e(b, x) = x.$$

Le graphe  $\dot{\Gamma}$  est un arbre si et seulement si  $\Gamma$  en est un.

Le corollaire (4.3) se déduit par application du critère (4.1) à la situation :

$$X = \text{Som } \dot{\Gamma}, \quad B_1 = G_u, \quad B_2 = G_v, \quad F = G_a = G_{(u, a)} = G_{(a, v)}$$

$$L_1 = \text{Som } \mathcal{R}(u, a), \quad L_2 = \text{Som } \mathcal{B}(a, v), \quad d = a \in \text{Som } \dot{\Gamma}$$

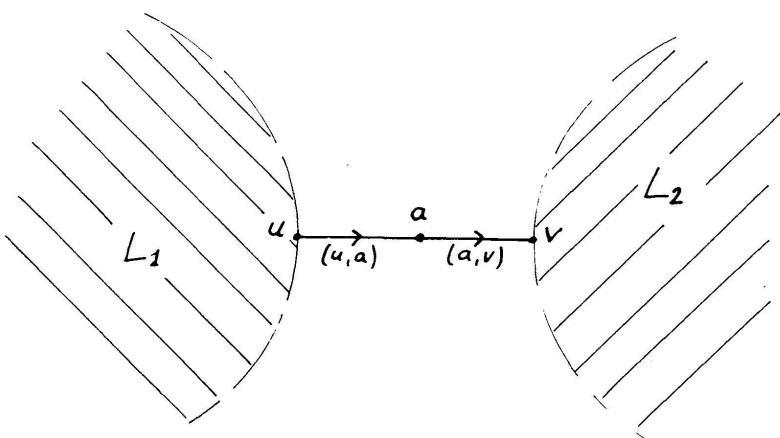


FIG. 7.

(4.4) COROLLAIRE. (Bass-Serre, [Se, § 4]). Soit  $G$  un groupe agissant sur un arbre  $\Gamma$  de manière que le graphe quotient  $G \backslash \Gamma$  soit un segment (arbre comportant une seule arête). Soit  $a \in \text{Ar } \Gamma$ , avec  $o(a) = u$  et  $e(a) = v$ . Alors, l'homomorphisme  $\Psi: G_u *_{G_a} G_v \rightarrow G$  induit par les inclusions est un isomorphisme.

*Démonstration.* L'homomorphisme  $\Psi$  est injectif par (4.3). Pour démontrer la surjectivité de  $\Psi$ , on observe que l'arête  $a$  se projette sur l'unique arête  $\bar{a}$  de  $G \setminus \Gamma$ , ce qui entraîne que  $B = \{u, v\}$  est un ensemble de représentants pour l'action de  $G$  sur  $\text{Som } \Gamma$ . La proposition (2.4) assure alors que  $G$  est engendré par  $G_u \cup R_B$ , avec  $R_B = \{r \in G \mid \text{il existe } s_r \in \text{Ar } \Gamma \text{ telle que } o(s_r) \in B \text{ et } e(s_r) \in rB\}$ . Soit  $r \in R_B$ . Comme toutes les arêtes de  $\Gamma$  sont dans l'orbite de  $a$ , il existe  $h_r \in G$  tel que  $s_r = h_r a$ . De plus,  $o(s_r) = o(a) = u$ , d'où  $h_r \in G_u$ . Donc  $e(s_r) = rv = h_r v$ , d'où  $h_r^{-1} r \in G_v$ . On en déduit que  $G$  est engendré par  $G_u \cup G_v$ , d'où la surjectivité de  $\Psi$ . ■

## 5. CRITÈRE POUR LES $HNN$ -EXTENSIONS

Soit  $F$  un sous-groupe d'un groupe  $H$ . Soit  $\phi : F \rightarrow H$  un homomorphisme injectif (un autre plongement de  $F$  dans  $H$ ). Désignons par  $\langle z \rangle$  le groupe cyclique infini de générateur  $z$ . Rappelons que l'on définit le groupe  $HNN(H, F, \phi)$  comme le quotient du produit libre  $H * \langle z \rangle$  par la clôture normale des éléments  $z^{-1} f z \phi(f)^{-1}$  pour  $f \in F$ . On dit que le groupe  $H^* = HNN(H, F, \phi)$  est obtenu de  $H, F$  et  $\phi$  par la *construction HNN*. Le groupe  $H$  s'appelle la *base* de  $H^*$ ,  $z$  s'appelle la *lettre stable* et  $F$  et  $\phi(F)$  sont les *sous-groupes associés* [L-S, Chap. IV, § 2]. Nous allons démontrer le critère suivant pour reconnaître une  $HNN$ -extension dans un groupe :

(5.1) **THÉORÈME** Soit  $G$  un groupe,  $F \subset H \subset G$  des sous-groupes de  $G$  et  $z \in G$  tel que  $z^{-1} F z \subset H$ . Désignons par  $\phi : F \rightarrow H$  l'homomorphisme  $\phi(f) = z^{-1} f z$ . On suppose que  $G$  agit sur un ensemble  $X$  et qu'il existe des sous-ensembles  $L_F$  et  $L_\phi$  de  $X$  ainsi qu'un élément  $d \in X - (L_F \cup L_\phi)$  satisfaisant aux conditions suivantes : (notation :  $\bar{L}_F = L_F \cup \{d\}$ ,  $\bar{L}_\phi = L_\phi \cup \{d\}$ )

- 1)  $F \subset G_d$
- 2)  $(H - F) \bar{L}_\phi \subset L_F$
- 3)  $z(H - \phi(F)) z^{-1} \bar{L}_F \subset L_\phi$
- 4)  $z^{-1} \bar{L}_F \subset L_F$  et  $z \bar{L}_\phi \subset L_\phi$
- 5)  $z(L_F - z^{-1} \bar{L}_F) \subset L_\phi$  et  $z^{-1}(L_\phi - z \bar{L}_\phi) \subset L_F$
- 6)  $(H - F) \bar{L}_\phi \cap z^{-1} \bar{L}_F = \emptyset$  et  $z(H - \phi(F)) z^{-1} \bar{L}_F \cap z \bar{L}_\phi = \emptyset$

Alors, l'homomorphisme  $\Psi : HNN(H, F, \phi) \rightarrow G$  induit par les inclusions (avec  $z$  comme lettre stable) est injectif.

*Démonstration.* Soit  $H^* = HNN(H, F, \phi)$ . En utilisant les relations  $fz = z\phi(F)$  et  $z^{-1}f = \phi(f)z^{-1}$  pour  $f \in F$ , on peut écrire un élément  $g \in H$  sous la forme  $g = g_1f$  avec  $f \in F$  et

$$g_1 = h_k z^{\varepsilon(k)} h_{k-1} z^{\varepsilon(k-1)} \dots h_1 z^{\varepsilon(1)} h_0 \quad (*)$$

où  $h_i \in H$  et  $\varepsilon(i) = \pm 1$ , de manière que les conditions suivantes soient vérifiées :

- a)  $h_0 \in (H - F) \cup \{1\}$
- b) si  $\varepsilon(i) = -1$ , alors  $h_i \in (H - \phi(F)) \cup \{1\}$
- c) si  $\varepsilon(i) = 1$ , alors  $h_i \in (H - F) \cup \{1\}$
- d) il n'y a aucune suite  $z^\varepsilon 1 z^{-\varepsilon}$ .

Si  $\Psi(g) = 1$  et que  $g \neq 1$ , cela implique que  $g_1 \neq 1$  puisque  $\Psi|F$  est l'inclusion  $F \subset G$ . Or, si  $g_1 \neq 1$ , nous allons montrer que  $\Psi(g)d \neq d$ . Il suffit pour cela de montrer que  $\Psi(g_1)d \neq d$ , puisque  $\Psi(f)d = d$  par l'hypothèse 1).

Décomposons l'écriture (\*) de  $g_1$  en un produit  $w_r w_{r-1} \dots w_0$  de sous-mots tels que :

$$w_0 = h_{k(0)} z h_{k(0)-1} z \dots z h_0 \\ \text{sous-mot maximal ne contenant pas de symbole } \langle\langle z^{-1} \rangle\rangle$$

$$w_1 = h_{k(1)} z^{-1} h_{k(1)-1} z^{-1} \dots z^{-1} h_{k(0)+1} z^{-1} \\ \text{sous-mot maximal ne contenant pas de symbole } z^1.$$

$$w_2 = h_{k(2)} z h_{k(2)-1} z \dots z h_{k(1)+1} z \\ \text{sous-mot maximal sans symbole } z^{-1}$$

etc., avec  $k(r) = k$ . Observons que par maximalité de  $w_i$ , le mot  $w_{2j}$  commence à droite par  $z$  (sauf  $w_0$ ) et le mot  $w_{2j+1}$  commence à droite par  $z^{-1}$ . Il est possible que  $k = 0$ ; il est aussi possible que  $w_0 = 1$ , mais alors  $w_1 \neq 1$  puisque  $g_1 \neq 1$ .

Pour alléger la présentation, nous écrirons  $g_1d$ ,  $w_id$ , etc., à la place de  $\Psi(g_1)d$ ,  $\Psi(w_i)d$ , etc. Le fait que  $g_1d \neq d$  va résulter des assertions (A) à (F) suivantes :

- (A)  $w_0 \bar{L}_\phi \subset L_F \cup L_\phi$  si  $w_0 \neq 1$
- (B)  $w_0 \bar{L}_\phi \subset L_F$  si  $w_0 \neq 1$  et  $r \neq 0$
- (C)  $w_{2j-1} \bar{L}_F \subset L_F \cup L_\phi$  si  $w_{2j-1} \neq 1$
- (D)  $zw_{2j-1} \bar{L}_F \subset L_\phi$  si  $w_{2j-1} \neq 1$  et  $f \neq 2j-1$
- (E)  $w_{2j} z^{-1} \bar{L}_\phi \subset L_F \cup L_\phi$  si  $w_{2j} \neq 1$  ( $j \geq 1$ )
- (F)  $w_{2j} z^{-1} \bar{L}_\phi \subset L_F$  si  $w_{2j} \neq 1$  et  $r \neq 2j$ . ( $j \geq 1$ )

Pour tirer l'inéquation  $g_1d \neq d$  des assertions (A) à (F), il suffit d'écrire  $g_1$  sous la forme

$$g_1 = \dots (w_4z^{-1})(zw_3)(w_2z^{-1})(zw_1)w_0$$

et l'on déduit que  $g_1d \in L_F \cup L_\phi$ .

*Preuve de (A), (B), (E) et (F).* On a déjà observé que si  $j \geq 1$ , le mot  $w_{2j}z$  commençait à droite par  $z$ . Le mot  $w_{2j}z^{-1}$  commence donc par

$$h_{k(2j-1)+1} \in (H-F) \cup \{1\},$$

ce qui fait que la démonstration de (E) et (F) est identique à celle de (A) et (B) que nous allons donner : si  $h_0 \neq 1$ , on a  $h_0\bar{L}_\phi \subset L_F - z^{-1}\bar{L}_F$  par les hypothèses 2) et 6). Ensuite  $zh_0\bar{L}_\phi \subset z(L_F - z^{-1}L_F) \subset L_\phi$  par 5). Si  $h_0 = 1$ , on a  $z\bar{L}_\phi \subset L_\phi$  par 4), donc de toute façon on a  $zh_0\bar{L}_\phi \subset L_\phi$ . Si  $h_1 = 1$ , on aura  $zhh_0\bar{L}_\phi \subset zL_\phi$ . On voit qu'en continuant, on aura à chaque pas à appliquer l'une des hypothèses

$$h_i\bar{L}_\phi \subset L_F - z^{-1}L_F, \quad z(L_F - z^{-1}L_F) \subset L_\phi \quad \text{et} \quad z\bar{L}_\phi \subset L_\phi.$$

Il s'en suit l'assertion (A). Si  $r \neq 0$ , cela signifie que  $w_1 \neq 1$  et donc  $h_{k(0)} \neq 1$ , puisqu'on a la suite  $z^{-1}h_{k(0)}z$ . Dans ce cas,  $w_0\bar{L}_\phi \subset h_{k(0)}\bar{L}_\phi \subset L_F$ .

*Preuve de (C) et (D).* On utilise l'hypothèse 4)  $z^{-1}\bar{L}_F \subset L_F$  tant que l'on ne rencontre que des  $h_i$  égaux à 1. Dans la situation  $h_iz^{-1}$  avec  $h_i \neq 1$  (donc  $h_i \in H - \phi(F)$  par b)), on procède comme suit :  $h_iz^{-1}L_F = z^{-1}(zh_iz^{-1})\bar{L}_F$ . Or  $zh_iz^{-1}\bar{L}_F \subset L_\phi - z\bar{L}_\phi$  par les hypothèses 3) et 6), d'où  $h_iz^{-1}\bar{L}_F \subset z^{-1}(L_\phi - z\bar{L}_\phi) \subset L_F$  par 5). De proche en proche on démontre ainsi (C). Si  $r \neq 2j-1$ , cela signifie que  $w_{2j} \neq 1$  et donc  $h_{k(2j-1)} \neq 1$  puisqu'on a la suite  $zh_{k(2j-1)}z^{-1}$ . On a alors affaire à la situation

$$zw_{2j-1}\bar{L}_F \subset zz^{-1}(zh_{k(2j-1)}z^{-1})\bar{L}_F \subset L_\phi - z\bar{L}_\phi. \quad \blacksquare$$

(5.2) *Remarque.* Il résulte de la démonstration de (5.1) que les hypothèses de (5.1) peuvent être affaiblies de la manière suivante : on choisit un ensemble  $R_F$  (respectivement  $R_\phi$ ) de représentants de classes à gauche non-triviale de  $H$  modulo  $F$  (respectivement : modulo  $\phi(F)$ ). On peut alors remplacer dans les hypothèses 2), 3) et 6)  $(H-F)$  par  $R_F$  et  $(H-\phi(F))$  par  $R_\phi$ .

(5.3) **COROLLAIRE.** Soit  $G$  un groupe agissant sur un arbre  $\Gamma$ . Soit  $a \in \text{Ar } \Gamma$  avec  $o(a) = u$  et  $e(a) = v$ . Supposons qu'il existe  $z \in G$  tel que  $o(za) = v$ . Alors  $z^{-1}G_az \subset G_u$ , ce qui définit un homomorphisme injectif

$\phi: G_a \rightarrow G_u$  (par  $\phi(x) = z^{-1}xz$ ) et l'homomorphisme  $\Psi: HNN(G_u, G_a, \phi) \rightarrow G$  qui étend les inclusions est injectif.

*Démonstration.* Le fait que  $z^{-1}G_az \subset G_u$  provient simplement de l'inclusion  $G_a \subset G_v = G_{zu} = zG_uz^{-1}$ .

Soit  $\dot{\Gamma}$  le premier subdivisé barycentrique de  $\Gamma$  (voir démonstration de (4.3) pour les notations). On va appliquer le critère (5.1) à la situation :

$$\begin{aligned} X &= \text{Som } \dot{\Gamma}, \quad H = G_u, \quad F = G_a = G_{(u, a)} = G_{(a, v)} \\ L_F &= \text{Som } \mathcal{R}(u, a) \quad L_\phi = \text{Som } \mathcal{B}(a, v) \quad d = a \subset \text{Som } \dot{\Gamma} \end{aligned}$$

Le lecteur pourra donc visualiser la situation en utilisant la figure 7 de la démonstration de (4.3) en changeant  $L_1$  en  $L_F$  et  $L_2$  en  $L_\phi$ . Nous allons vérifier les points 1) à 6) de l'énoncé de (5.1).

Le point 1) est banal. Le point 2) provient du fait que  $H - F = G_u - G_a$  et le point 3) de ce que  $z(H - \phi(F))z^{-1} = G_v - G_a$ . Le point 4) se déduit de ce que

$$e(z^{-1}(a, v)) = u \quad \text{et} \quad o(z(u, a)) = v.$$

*Point 5).* L'ensemble  $z(\bar{L}_F - z^{-1}\bar{L}_F)$  constitue les sommets d'un sous-arbre relié à  $v$  par l'arête  $t = z(u, a)$ . Or  $t \neq (a, v)$  car  $o(t) = v$  et  $e(a, v) = v$ . Donc  $z(\bar{L}_F - z^{-1}\bar{L}_F) \subset L_\phi$ . Même raisonnement pour l'autre inclusion de 5).

*Point 6).* Soit  $h \in H - F$ . Le sous-arbre  $A$  dont l'ensemble de sommets est  $h\bar{L}_\phi$  est relié à  $u$  par l'arête  $h(u, a)$ , tandis que le sous-arbre  $B$  de  $\dot{\Gamma}$  dont l'ensemble de sommets est  $z^{-1}L_F$  est lui relié à  $u$  par l'arête  $z^{-1}(a, v)$ . Or, ces arêtes  $h(u, a)$  et  $z^{-1}(a, v)$  sont distinctes puisque

$$u = o(h(u, a)) = e(z^{-1}(a, v)).$$

Donc  $A \cap B = \emptyset$ . Même raisonnement pour la seconde partie du point 6). ■

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer l'énoncé suivant, dû à Bass-Serre [Se, p. 50 et aussi § 5].

(5.4) COROLLAIRE. Soit  $G$  un groupe agissant sur un arbre  $\Gamma$ , de manière que le graphe quotient  $G\backslash\Gamma$  soit un lacet (graphe comportant exactement un sommet et une arête). Soit  $a \in \text{Ar } \Gamma$ . Alors  $G$  est isomorphe à une HNN-extension de base  $G_{o(a)}$  et dont l'un des sous-groupes associés est  $G_a$ .

*Démonstration.* Posons  $u = o(a)$  et  $v = e(a)$ . Puisque  $\text{Som } G\backslash\Gamma = \{\bar{u}\}$ , il existe  $z \in G$  tel que  $zu = v$ . On en déduit, d'après le Corollaire (5.3) que  $z^{-1}G_az \subset G_u$  et que l'homomorphisme  $\Psi: HNN(G_u, G_a, \phi) \rightarrow G$  qui induit les

inclusions est injectif (avec  $\phi(x) = z^{-1}xz$ ). D'autre part, d'après (2.4),  $G$  est engendré par

$$G_u \cup R_{\{u,v\}}, \text{ où } R_{\{u,v\}} = \{ r \in G \mid \text{il existe } a_r \in \text{Ar } \Gamma \\ \text{avec } o(a_r) \in \{u, v\} \text{ et } e(a_r) \in r \{u, v\}\}.$$

Soit  $r \in R_{\{u,v\}}$ . Comme toutes les arêtes de  $\Gamma$  sont dans la même orbite, il existe  $d_r \in G$  tel que  $a_r = d_r a$ . On a donc

$$d_r v = d_r z u \in \{ru, rv\}.$$

Si  $o(a_r) = u$ , on a

$$d_r \in G_u \text{ et } e(a_r) = r_v = d_r v,$$

d'où

$$d_r^{-1} r \in G_v = z G_u z^{-1}.$$

Si  $o(a_r) = v$ , on a

$$z^{-1} d_r \in G_u \text{ et } e(z^{-1} a_r) = z^{-1} d_r v = z^{-1} r v,$$

d'où encore  $d_r^{-1} r \in G_v = z G_u z^{-1}$ . Dans tous les cas on déduit donc que  $r$  est dans le sous-groupe engendré par  $G_u$  et  $z$ , d'où la surjectivité de  $\Psi$ . ■

## 6. STRUCTURES BIPOLAIRES

Rappelons qu'une *structure bipolaire* sur un groupe  $G$  est une partition de  $G$  en cinq sous-ensembles  $F, EE, E^*E, E^*E^*$  et  $EE^*$  satisfaisant aux axiomes 1) à 6) ci-dessous, avec les conventions suivantes : Si  $A$  et  $B$  sont deux sous-ensembles de  $G$ , on définit l'ensemble

$$AB = \{g = ab \in G \mid a \in A \text{ et } b \in B\}$$

et l'ensemble

$$A^{-1} = \{g \in G \mid g^{-1} \in A\}.$$

Si  $X \in \{E, E^*\}$ , alors  $(X^*)^* = X$ .

Axiomes d'une structure bipolaire:

1)  $F$  est un sous-groupe de  $G$

Pour tout  $X, Y, Z, X_i \in \{E, E^*\}$  on a:

2)  $(XY)F \subset XY$ .

3)  $(XY)^{-1} \subset YX$ .

4)  $(XY)(Y^*Z) \subset XZ$ .

5) Pour tout  $g \in G$ , il existe un entier  $n(g)$  tel que si  $g = g_1 g_2 \dots g_k$  avec  $g_i \in X_{i-1}^* X_i$  pour  $i \geq 1$ , alors  $k \leq n(g)$ .

6)  $E^*E \neq \emptyset$ .

Cette définition d'une structure bipolaire est la généralisation due à Lyndon-Schupp [L-S, IV.6] du fameux concept de Stallings [St]. Remarquons que dans cette version, on ne demande pas que  $F$  soit un sous-groupe fini.

(6.1) THÉORÈME. Soit  $G$  un groupe agissant sur un arbre  $\Gamma$ . Soit  $p \in G$  un élément ne laissant aucun sommet fixe. Alors  $G$  admet une structure bipolaire avec  $p \in E^*E \cup EE^*$ .

Démonstration. Puisque  $p$  ne laisse aucun sommet fixe, il existe, par (3.3), une chaîne infinie  $C_p$  stable par  $p$  et sur laquelle  $p$  opère par translation non-triviale. On peut supposer qu'il existe  $a \in \text{Ar } C_p$  telle que  $pa \in \mathcal{R}(a)$ . Si ce n'est pas le cas, on change  $p$  en  $p^{-1}$ , ce qui n'a pas d'importance puisque  $p \in E^*E \cup EE^*$  si et seulement si  $p^{-1} \in E^*E \cup EE^*$  par l'axiome 3.

On définit alors  $F = G_a$  et les autres ensembles sont déterminés par les conditions suivantes:

$$h \in EE \cup EE^* \Leftrightarrow ha \in \mathcal{R}(a)$$

$$h \in EE^* \cup E^*E \Leftrightarrow d(o(a), o(ha)) = d(e(a), e(ha))$$

ce qui peut se visualiser de la manière suivante:

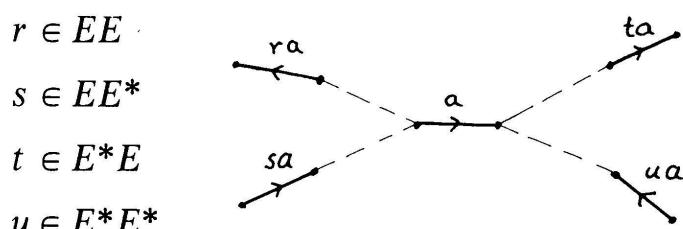


FIG. 8.

Il est clair que l'on a ainsi une partition de  $E$ . Les axiomes 1 et 2 sont banals. L'axiome 3 se vérifie par inspection facile des huit cas possibles. Par exemple, pour  $(EE)(E^*E) \subset EE$ , soit  $g \in E^*E$  et  $h \in EE$ . On utilise le principe que  $hga$  est relié à  $ga$  comme  $ga$  est relié à  $a$ , ce qui donne la figure suivante d'où l'on déduit que  $hg \in EE$ :

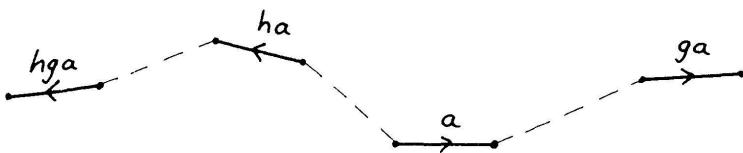


FIG. 9.

La vérification de ces huit cas montre que si  $h \in XY$  et  $g \in Y^*Z$ , alors

$$d(hga, a) > d(ga, a),$$

ce qui permet de vérifier l'axiome 5 en posant  $n(g) = d(ga, a)$ . Enfin,  $p \in E^*E$ , d'où l'axiome 6. ■

(6.2) COROLLAIRE. *Un groupe de génération finie qui agit sur un arbre  $\Gamma$  sans sommet fixe (i.e.  $(\text{Som } \Gamma)^G = \emptyset$ ) admet une structure bipolaire.*

*Démonstration.* Par [Se, Cor. 3, p. 90], il existe un élément  $g \in G$  qui ne laisse aucun sommet fixe. On applique alors (6.1). ■

Nous allons maintenant donner notre démonstration du théorème de Stallings-Lyndon-Schupp :

(6.3) THÉORÈME. *Un groupe  $G$  admet une structure bipolaire si et seulement si  $G$  est un produit amalgamé non-trivial ou une HNN-extension.*

*Démonstration.* Si  $G$  est isomorphe à  $B_1 *_A B_2$  (respectivement : si  $G$  est isomorphe à HNN  $(H, A, \phi)$ ), alors il existe un arbre  $\Gamma$  sur lequel  $G$  agit de telle manière que les groupes d'isotropies des sommets soient les conjugués des  $B_i$  (respectivement : les conjugués de  $H$ ) et les groupes d'isotropie des arêtes soient les conjugués de  $A$  (voir [Se, pp. 49-50 ou § 5]). Tout élément qui n'appartient pas à l'un de ces conjugués agit donc sur  $\Gamma$  sans sommet fixe, d'où  $G$ , par (6.1), peut être muni d'une structure bipolaire  $(F, EE, \dots)$  avec  $A = F$ .

La démonstration de la réciproque nécessite quelques préliminaires. Par définition, un élément  $g \in XY$  est dit *irréductible* si  $g \neq ab$ , avec  $a \in XZ$  et

$b \in Z^*Y$ . L'ensemble des éléments irréductibles de  $XY$  est noté  $I(XY)$ . Nous avons besoin des lemmes classiques sur les éléments irréductibles sous une forme légèrement plus précise que celle de [L-S, p. 209], aussi nous les redonnons ci-dessous complètement avec leur démonstration.

LEMME 0.  $I(XY)^{-1} \subset I(XY)$ .

*Démonstration.* Soit  $g \in I(XY)$ . On a  $g^{-1} \in YX$  par l'axiome 3. Si  $g^{-1} = ab$  avec  $a \in YZ$  et  $b \in Z^*X$ , alors  $g = b^{-1}a^{-1} \in (XZ^*)(ZY)$  par l'axiome 4, ce qui contredit l'irréductibilité de  $g$ . ■

LEMME 1.  $(XY)I(YZ) \subset F \cup XE \cup XE^*$  en général et

$$(XY)I(YZ) \subset XE \cup XE^* \quad \text{si } X \neq Z.$$

*Démonstration.* Soit  $g \in XY$  et  $h \in I(YZ)$ . Si  $gh \in X^*U$ , alors

$$h \in g^{-1}(X^*U) \subset (YX)(X^*U)$$

ce qui contredit l'irréductibilité de  $h$ . Si  $gh = f \in F$ , alors

$$YZ \quad hf^{-1} = g^{-1} \in YX$$

par les axiomes 2 et 3, d'où  $X = Z$ . ■

LEMME 2.  $I(XY)(YZ) \subset F \cup EZ \cup E^*Z$  en général et

$$I(XY)(YZ) \subset EZ \cup E^*Z \quad \text{si } X \neq Z.$$

*Démonstration.* Identique à celle du lemme 1. ■

LEMME 3.  $I(XY)I(YZ) \subset F \cup I(XZ)$  en général et

$$I(XY)I(YZ) \subset I(XZ) \quad \text{si } X \neq Z.$$

*Démonstration.* Après les lemmes 1 et 2, il suffit de montrer que si  $g \in I(XY)$  et  $h \in I(YZ)$ , alors  $gh$  est irréductible si  $gh \notin F$  (ce qui implique que  $gh \in XZ$ ). Supposons que  $gh = pq$ , avec  $p \in XW$  et  $q \in W^*Z$ , d'où  $g = pqh^{-1}$ . D'après le lemme 1,  $qh^{-1}$  appartient soit à  $W^*U$ , ce qui contredit l'irréductibilité de  $g$ , ou alors  $qh^{-1} \in F$ , mais ceci nécessite que  $W = Y^*$ . Dans ce dernier cas, on aurait

$$g = p(qh^{-1}) \in (XY^*)F \subset XY^*$$

par l'axiome 2, d'où  $g \in XY^* \cap XY$  ce qui est impossible puisque  $XY^* \cap XY = \emptyset$ . ■

LEMME 4.  $I(XY)F \cup FI(XY) \subset I(XY)$ .

*Démonstration.* Si  $g \in I(XY)$  et  $f \in F$ , alors  $gf \in XY$  par l'axiome 2. Si  $gf = pq$  avec  $p \in XW$  et  $q \in W^*Y$ , on aurait  $g = p(qf^{-1}) \in (XW)(W^*Y)$  ce qui contredit l'irréductibilité de  $g$ . D'où  $I(XY)F \subset I(XY)$ , ce qui entraîne  $g^{-1}f^{-1} \in I(YX)$  par le lemme 0 et l'axiome 1. Cela implique  $fg \in I(XY)$  par le lemme 0 et donc  $FI(XY) \subset I(XY)$ . ■

Voici encore un lemme qui ne semble pas se trouver dans la littérature :

LEMME 5.  $I(XW)(W^*Y) \cap I(XW^*)(WY) = \emptyset$ .

*Démonstration.* Supposons que  $gu = hv$ , avec

$$g \in I(XW), u \in W^*Y, h \in I(XW^*) \text{ et } v \in WY.$$

Alors, les lemmes 0 et 3 ainsi que l'axiome 4 entraînent que

$$\begin{aligned} WY &\ni (h^{-1}g)u \in I(W^*X)I(XW)(W^*Y) \\ &\subset I(W^*W)(W^*Y) \subset W^*Y \end{aligned}$$

ce qui est impossible puisque  $WY \cap W^*Y = \emptyset$ . ■

Nous pouvons maintenant poursuivre la démonstration de (6.3). L'axiome 2 montre que la partition  $(F, EE, \dots)$  de  $G$  induit une partition en cinq sous-ensembles  $\{\bar{1}\}, \overline{EE}, \overline{E^*E}, \overline{EE^*}$  et  $\overline{E^*E^*}$  de l'ensemble  $G/F$  des classes à gauche de  $G$  modulo  $F$ .

Soient  $B_1 = F \cup I(EE)$  et  $B_2 = F \cup I(E^*E^*)$ . L'axiome 1 ainsi que les lemmes 0, 3 et 4 impliquent que  $B_i$  est un sous-groupe de  $G$ . On a donc un homomorphisme  $\Psi: B_1 *_F B_2 \rightarrow G$  qui étend les inclusions de  $B_i$  dans  $G$ .

*Affirmation:*  $\Psi$  est injectif. Cela se démontre en appliquant le critère (4.1) à la situation :

$$\begin{aligned} X &= G/F, \quad d = \bar{1}, \\ L_F &= \overline{EE} \cup \overline{EE^*} \quad L_\phi = \overline{E^*E} \cup \overline{E^*E^*} \end{aligned}$$

La condition 1 de (4.1) est banale et la condition 2 se vérifie facilement :

$$(B_1 - F)\overline{E^*X} \subset (EE)\overline{E^*X} \subset \overline{EX} \subset L_1 \text{ (axiome 4).}$$

Idem pour  $(B_2 - F)(L_1 \cup \{d\}) \subset L_2$ .

L'axiome 5 entraîne que  $G$  est engendré par les éléments irréductibles. Donc, si l'on suppose que  $I(E^*E) = \emptyset$ , cela implique que  $I(EE^*) = \emptyset$  par le lemme 0 et  $\Psi$  est surjectif. On a donc  $G = B_1 *_F B_2$  et l'axiome 6 empêche que  $F = B_i$

(donc le produit amalgamé est non-trivial). En effet, si par exemple  $F = B_2$ , alors  $G = F \cup EE$  ce qui est impossible puisque  $E^*E \neq \emptyset$ .

Il reste à examiner le cas où  $I(E^*E) \neq \emptyset$ . Soit donc  $z \in I(E^*E)$  et posons  $H = B_1$ . On a, par les lemmes 3 et 4 :

$$\begin{aligned} z^{-1} I(E^*E) &\subset I(EE^*) I(E^*E) \subset H \\ I(EE^*) z &\subset I(EE^*) I(E^*E) \subset H \\ z^{-1} I(E^*E^*) z &\subset I(EE^*) I(E^*E) I(EE) \subset H \end{aligned}$$

ce qui montre que  $G$  est engendré par  $z$  et  $H$  (puisque l'on a déjà vu que  $G$  est engendré par les éléments irréductibles). D'autre part, par les lemmes 3 et 4, on a

$$z^{-1} Fz \subset I(EE^*) I(E^*E) \subset H.$$

Soit  $\phi : F \rightarrow H$  l'homomorphisme injectif défini par  $\phi(x) = z^{-1}xz$ . On a donc un homomorphisme  $\zeta : HNN(H, F, \phi) \rightarrow G$  qui étend l'inclusion de  $H$  dans  $G$  et qui est surjectif. On va démontrer l'injectivité de  $\zeta$  en appliquant le critère (5.1) à la situation :

$$\begin{aligned} X &= G/F \quad d = \bar{1} \\ L_F &= \overline{EE} \cup \overline{EE^*} \quad L_\phi = \overline{E^*E} \cup \overline{E^*E^*} \end{aligned}$$

Il faut vérifier les conditions 1 à 6 de (5.1) :

*Point 1).* Banal.

*Point 2).*  $(H - F) \overline{E^*X} \subset (EE) \overline{E^*X} \subset \overline{EX}$  (axiome 4).

*Point 3).* Observons que  $zHz^{-1} \subset I(E^*E) \cup F$  par les lemmes 3 et 4. Mais si  $zhz^{-1} \in F$  avec  $h \in H$ , alors  $h \in z^{-1}Fz = \phi(F)$ . Donc

$$z(H - \phi(F)) z^{-1} \subset E^*E^*,$$

et le point 3) se démontre comme le point 2).

*Point 4).* Se démontre comme le point 2).

*Point 5).* L'axiome 5 implique que

$$EX = I(EE) E^*X \cup I(EE^*) EX.$$

Or  $I(EE^*) z \subset H$  par le lemme 3, d'où  $I(EE^*) \subset Hz^{-1}$ . On a donc

$$z(\overline{EX}) = zI(EE)(\overline{E^*X}) \cup zHz^{-1}(\overline{EX}).$$

Par le lemme 3, on a

$$zI(EE)(\overline{E^*X}) \subset I(E^*E) I(EE)(\overline{E^*X}) \subset \overline{E^*X} \subset L_\phi.$$

Soit  $x = hz^{-1}v$  avec  $h \in H$  et  $v \in \overline{EX}$ . Par les lemmes 3 et 4, on a

$$zhz^{-1} \in I(E^*E^*) \cup F.$$

Si  $zhz^{-1} \in I(E^*E^*)$ , on aura  $zx \in \overline{E^*X} \subset L_\phi$  par l'axiome 4. Or, ce dernier cas se produit toujours si  $x \notin z^{-1}L_F$ , puisque si  $zhz^{-1} \in F$ , on a  $h \in z^{-1}Fz$  et  $x \in z^{-1}F(\overline{EX}) \subset z^{-1}\overline{EX} \subset z^{-1}L_F$  (le fait que  $F(EX) \subset EX$  provient des axiomes 2 et 3). Idem pour la seconde partie du point 5.

*Point 6).*

$$\begin{aligned} (H - F) \overline{E^*X} \cap z^{-1}\overline{EY} &\subset I(EE) \overline{E^*X} \\ &\cap I(EE^*) \overline{EY} = \emptyset \end{aligned}$$

par le lemme 5. Idem pour la seconde partie du point 6), en utilisant le fait vu au point 3) que  $z(H - \phi(F))z^{-1} = I(E^*E^*)$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [Du] DUNWOODY, M. J. Accessibility and groups of cohomological dimension one. *Proc. London Math. Soc.* 38 (1979), 193-215.
- [F-K] FRICKE, R. und F. KLEIN. *Vorlesungen über die Theorie des Automorphen Functionen, Vol. 1.* Leipzig 1897.
- [L-S] LYNDON, R. and P. SCHUPP. *Combinatorial Group Theory.* Springer-Verlag 1977.
- [Le] LEHNER, J. *Discontinuous Groups and Automorphic Functions.* Providence, Amer. Math. Soc. 1964.
- [Se] SERRE, J.-P. Arbres, Amalgames,  $SL_2$ . *Astérisque N° 46*, 1977.
- [St] STALLINGS, J. *Group Theory and Three-dimensional Manifolds.* Yale University Press, 1971.
- [S-W] SCOTT, P. and C. T. C. WALL. Topological methods in group theory. In "Homological group theory", Proc. Conf. Durham 1977, *London Math. Soc. Lect. Note Series 36* (1979), 137-204.
- [Ti] TITS, J. Sur le Groupe des Automorphismes d'un Arbre. *Essays on Topology and related Topics* (dédié à G. de Rham), Springer-Verlag 1970, pp. 188-211.
- [Ti 2] —— Free Subgroups in Linear Groups. *J. of Algebra* 20 (1972), 250-270.

(Reçu le 15 août 1980)

Jean-Claude Hausmann

Université de Genève  
Case postale 124  
1211 Genève 24 (Suisse)