

# §1. Genus and self maps

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1981)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

**THEOREM.** Let  $M = M(n_1, \dots, n_k)$  be a generalized flag manifold for which the Conjecture C holds. Then

$$G(M) = \{[M]\}.$$

In particular the Grassmann manifolds  $G_p(\mathbb{C}^{p+q})$  for  $p \neq q$  and the flag manifolds  $U(n)/T^n$  are all generically rigid.

§1. GENUS AND SELF MAPS

Let  $P$  denote a fixed set of primes. Two  $P$ -sequences

$$S_1, S_2: P \rightarrow E(X_0)$$

are called *equivalent*, if there exist maps  $h(0) \in E(X_0)$  and

$$h(p) \in \text{im}(E(X_p) \xrightarrow{\text{can}} E(X_0))$$

such that for all  $p \in P$  one has

$$h(0) S_1(p) = S_2(p) h(p).$$

*Definition 1.1.* We denote by  $P\text{-Seq}(E(X_0))$  the set of equivalence classes of  $P$ -sequences in  $E(X_0)$ .

If  $P$  is a finite set of primes and  $X$  a nilpotent space of finite type, then there is a canonical map

$$\theta: G(X) \rightarrow P\text{-Seq}(E(X_0)).$$

It is defined as follows. Let  $Y \in G(X)$  and  $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ . Then the localization  $Y_P$  is a pull-back of maps  $X_{p_i} \xrightarrow{\lambda_i} X_0$ , i.e.  $Y_P \simeq \text{hoinvlim} \{X_{p_i} \xrightarrow{\lambda_i} X_0\}$ . The maps  $\lambda_i$  induce equivalences  $\bar{\lambda}_i \in E(X_0)$  and we put

$$\theta(Y) = \{[\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_n]\}.$$

If  $Y_P$  may also be represented by  $\text{hoinvlim} \{X_{p_i} \xrightarrow{\mu_i} X_0\}$ , then there exist maps  $h(0) \in E(X_0)$  and  $\tilde{h}(p_i) \in E(X_{p_i})$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  rendering the diagrams

$$\begin{array}{ccc}
 X_{p_i} & \xrightarrow{\tilde{h}(p_i)} & X_{p_i} \\
 \lambda_i \downarrow & & \downarrow \mu_i \\
 X_0 & \xrightarrow{h(0)} & X_0
 \end{array}$$

homotopy commutative and thus inducing  $\text{hoinvlim} \{\lambda_i\} \simeq \text{hoinvlim} \{\mu_i\}$ . Hence

$$\{[\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n]\} = \{[\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_n]\} \in P\text{-Seq}(E(X_0))$$

and therefore  $\theta$  is well defined.

LEMMA 1.2. Let  $X$  be a nilpotent space of finite type and let  $P$  denote a finite set of primes. Then

$$\theta: G(X) \rightarrow P\text{-Seq}(E(X_0))$$

is surjective with fibers of the form

$$\theta^{-1}(\theta(Y)) = \{Z \in G(X) \mid Z_P \simeq Y_P\}.$$

*Proof.* Let  $P = \{p_1, \dots, p_n\}$  and

$$\{[\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n]\} \in P\text{-Seq}(E(X_0)).$$

Let  $e_i: X_{p_i} \rightarrow X_0$  denote the canonical maps and put

$$f_i = \bar{f}_i \circ e_i: X_{p_i} \rightarrow X_0.$$

Define  $W = \text{hoinvlim} \{f_i\}$ ;  $W$  comes equipped with a canonical map  $f: W \rightarrow X_0$ . Let  $Z$  be the homotopy pull back of  $W \xrightarrow{f} X_0 \xleftarrow{\text{can}} X_{\bar{P}}$ , where  $\bar{P}$  denotes the set of primes complementary to  $P$ . Then  $Z \in G(X)$  and

$$\theta(Z) = \{[\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n]\};$$

thus  $\theta$  is surjective. It is clear from the definition of  $\theta$  that for  $Y, Z \in G(X)$  one has  $\theta(Y) = \theta(Z)$  if and only if  $Y_P \simeq Z_P$ .

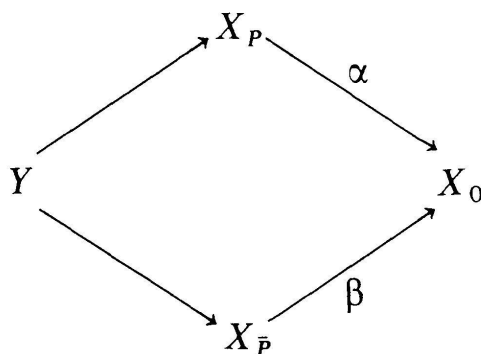
The next lemma provides a sufficient condition for  $\theta$  to be monic "at the basepoint".

LEMMA 1.3. Let  $X$  be a nilpotent space of finite type. Suppose that there exists a finite set of primes  $P$  with complement  $\bar{P}$  such that

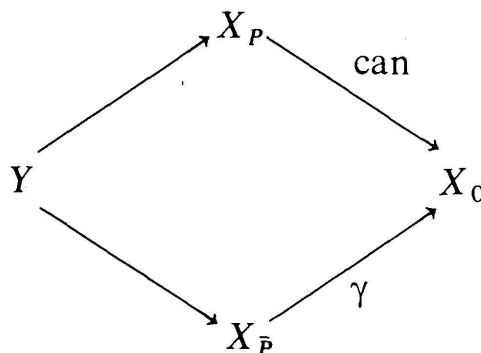
- a)  $Y \in G(X)$  implies  $Y_{\bar{P}} \simeq X_{\bar{P}}$
- b) every  $f \in E(X_0)$  can be written as  $f_1 \circ f_2$  with  $f_1 \in \text{im}(E(X_P) \xrightarrow{\text{can}} E(X_0))$  and  $f_2 \in \text{im}(E(X_{\bar{P}}) \rightarrow E(X_0))$ .

Then for  $\theta: G(X) \rightarrow P\text{-Seq}(E(X_0))$  as above, one has  $\theta^{-1}(\theta(X)) = \{X\}$ .

*Proof.* Let  $Y \in G(X)$  with  $\theta(Y) = \theta(X)$ . Then  $Y_P \simeq X_P$  by the definition of  $\theta$ , and  $Y_{\bar{P}} \simeq X_{\bar{P}}$  by assumption. Hence  $Y$  may be obtained as a homotopy pull back of the form



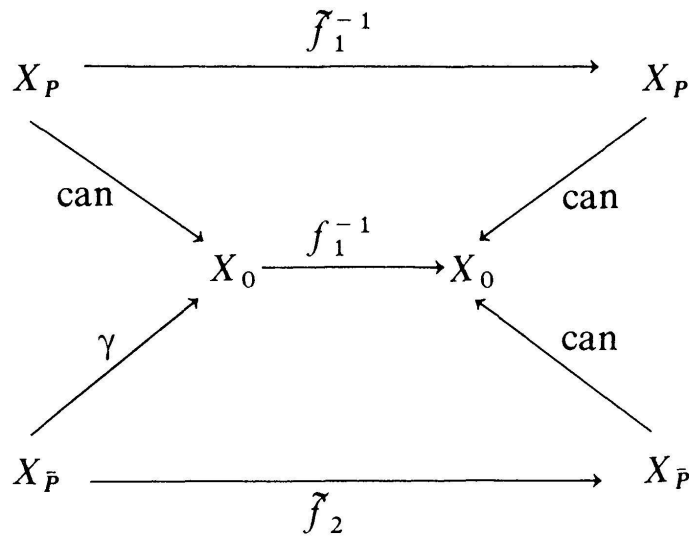
If  $\alpha$  induces  $\bar{\alpha} \in E(X_0)$  and if  $\gamma = \bar{\alpha}^{-1} \circ \beta$ , then  $Y$  is also a pull back of the form



Let  $\bar{\gamma} \in E(X_0)$  be the map induced by  $\gamma$  and write  $\bar{\gamma} = f_1 f_2$  with

$$f_1 \in \text{im}(E(X_P) \rightarrow E(X_0)), \quad f_2 \in \text{im}(E(X_{\bar{P}}) \rightarrow E(X_0)).$$

Choose a lift  $\tilde{f}_1^{-1} \in E(X_P)$  of  $f_1^{-1}$  and a lift  $\tilde{f}_2 \in E(X_{\bar{P}})$  of  $f_2$ . Then  $f_1^{-1} \bar{\gamma} = \text{can} \circ \tilde{f}_2$  and one can form a commutative diagram,



which shows that  $Y \simeq X$ .

§2. THE CASE OF GENERALIZED FLAG MANIFOLDS

The following result is an easy consequence of [F].

LEMMA 2.1. Let  $M$  be a generalized flag manifold. Then the following holds.

- a) If  $g(\lambda) \in Gr(M_0)$  is a grading map with  $\lambda \in \mathbf{Z}_Q^*$  for some (not necessarily finite) set of primes  $Q$ , then  $g(\lambda)$  lifts to a homotopy equivalence  $\tilde{g}(\lambda): M_Q \rightarrow M_Q$ .
- b) Let  $P$  be an arbitrary set of primes with complement  $\bar{P}$ . Then every

$$f \in \langle Gr(M_0), N(H)/H \rangle$$

may be written in the form  $f = f_1 \circ f_2$  with

$$f_1 \in \text{im}(E(M_P) \rightarrow E(M_0))$$

and

$$f_2 \in \text{im}(E(M_{\bar{P}}) \rightarrow E(M_0)).$$

*Proof.* Let  $\lambda = k/l$  with  $k$  and  $l$  relatively prime integers. Then  $g(k)$  and  $g(l)$  lift to equivalences

$$\tilde{g}(k), \tilde{g}(l): M_Q \rightarrow M_Q.$$