Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 26 (1980)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR CERTAINES GÉNÉRALISATIONS DE L'ÉQUATION DE THUE-MAHLER

Autor: Györy, K.

Kapitel: 3. DÉMONSTRATIONS

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-51072

$c_i = c_i(K, L, A, A', d) > 0, i = 1, 2,$ *et* $N_o = N_o(K, L, A, A', d)$ *telles que*

$$s \log(s+1) + \log P > c_1 \log \log N \tag{3}$$

et

$$P > c_2 \log \log N \tag{4}$$

pour tout $x \in \mathbf{Z}_L^m$ *avec* $N((x_1, \dots, x_m)) \leqslant d$ *et* $N = \max_{1 \leq i \leq m} |N_{L/Q}(x_i)| \geqslant N_o$, *où* $s = \omega(F(x))$ *et* $P = P(F(x))$.

Le Théorème 2 généralise certains récents résultats de Kotov [10] et Györy [4].

3. Démonstrations

La démonstration du Théorème 1 sera basée sur le théorème ci-dessous. Avec les notations du paragraphe précédent, on a le

Théorème A. *Soit* $M = \{\mu_1, \dots, \mu_t\} \subset \mathbf{Z}_K$ *un* $\mathbf{Z}_L$*-module. Supposons* $\mu_1, \dots, \mu_t$ *L-linéairement indépendants, connexes par rapport à* K/L *et* $\max_j \overline{|\mu_j|} \leqslant A'$. *Si* $y \in M$ *et*

$$N_{K/L}(y) = \beta \pi_1^{z_1} \dots \pi_s^{z_s}$$

avec des entiers $z_i \geqslant 0$, *alors* $y = \pi_1^{u_1} \dots \pi_s^{u_s} y'$, *où* $u_1, \dots, u_s \geqslant 0$ *sont des entiers*, $y' \in \mathbf{Z}_K$,

$$\overline{|y'|} < T$$

et

$$T = \exp\{c_3 R_L^* h_L P^g (\log P)^5 R_G \log^3(R_G^* h_G)(R_G + h_G \log P)^{sf+2} .$$
$$. (\log \mathscr{P})(R_G + h_G \log P + \log(A'b))\}$$

avec

$$c_3 = (25(r + sf + 3)g)^{22r + 13sf + 2rsf + 44}.$$

Ce théorème est une conséquence [1]) du théorème 2 du travail [6] (voir encore la majoration (45) de [4]). Dans la démonstration du théorème 2 de [6], nous avons utilisé la méthode de Baker.

[1]) Le théorème 2 de [6] est vrai pour toute extension galoisienne de L contenant le corps de décomposition de F.

Démonstration du Théorème 1. Démontrons d'abord par récurrence sur k que $y \in M = M_1 \dots M_k$ *et* $N_{K/L}(y) = \beta \pi_1^{z_1} \dots \pi_s^{z_s}$ impliquent $y = \pi_1^{u_1} \dots \pi_s^{u_s} y'$ avec $u_1, \dots, u_s \geqslant 0$, où $y' \in \mathbf{Z}_K$ *et*

$$(5) \qquad \overline{|y'|} < n\,A' \exp\{(\log T)\big(nl\,(s+1)\,(\log \mathscr{P})\,(\log T_4)\big)^{k-1}\} = n\,A'\,U_k$$

avec le T_4 défini ci-dessous. Pour $k = 1$ cela découle du Théorème A. Supposons (5) prouvé pour $k-1$ avec $k \geqslant 2$. Posons $K_{k-1} = K'$, $[K' : L] = n_1$, $[K : K'] = n_2$ et $M' = M_1 \dots M_{k-1}$. Désignons par $D_{K'}$ et $h_{K'}$ le discriminant et le nombre de classes de K'. Comme

$$N_{K/L}(y) = N_{K'/L}\big(N_{K/K'}(y)\big),$$

dans K' on a la décomposition en idéaux premiers

$$\big(N_{K/K'}(y)\big) = \mathfrak{a}\,\mathfrak{P}_1^{z'_1} \dots \mathfrak{P}_q^{z'_q} = (\delta\,\gamma_1^{w_1} \dots \gamma_q^{w_q}),$$

où $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_q$ sont les idéaux premiers distincts de K' au-dessus de $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$, $(\mathfrak{a}, \mathfrak{P}_i) = 1$, $(\delta) \mid (\beta)\,(\mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_q)^{h_{K'}-1}$, $(\gamma_i) = \mathfrak{P}_i^{h_{K'}}$, et, en vertu du Lemme 6 de [8] et $D_{K'}^{n_2} \mid D_K$, on peut supposer

$$\max_i \overline{|\gamma_i|} < \exp\{(\log P)\big(31\,(ln_1)^3 \log |D_K|\big)^{ln_1} |D_K|^{1/6}\} = T_1 .$$

Si $(\pi_i, \gamma_j) \neq 1$, alors $N_{K'/L}(\gamma_j^{h_L}) = \eta\,\pi_i^{h_{K'} f_j^*}$ avec $f_j^* \leqslant n_1$ et avec une unité $\eta \in L$ vérifiant

$$\overline{|\eta|} \leqslant T_1^{n_1\, l\, h_L \log \mathscr{P}} = T_2 .$$

Nous avons

$$(6) \qquad N_{K/K'}(y) = \beta_1\,(\gamma'_1)^{u'_1} \dots (\gamma'_q)^{u'_q}$$

avec

$$\gamma'_i = \eta^{-1}\,\gamma_i^{n_1 h_L}, \quad \beta_1 = \delta\,\eta^{u'_1 + \dots + u'_q}\,\gamma_1^{d_1} \dots \gamma_q^{d_q},$$

où

$$w_i = h_L\,u_i + r_i, \; 0 \leqslant r_i < h_L, \; u_i = n_1\,u'_i + u''_i, \; 0 \leqslant u''_i < n_1$$

et

$$d_i = r_i + u''_i\,h_L .$$

Ici $\overline{|\gamma'_i|} \leqslant T_1^{n_1 h_L}\,T_2^l$. En comparant les normes sur L des membres de gauche et de droite de (6), on obtient

$$\overline{|N_{K'/L}(\beta_1)|} \leqslant (b^{n_1 l}\,T_1^{(s+1)\,h_L})^{2l(s+1)\log \mathscr{P}} = T_3 .$$

Le Lemme 6 de [8] implique qu'il existe une unité ε dans K' telle que $N_{K'/L}(\varepsilon) = 1$, $\beta_1 = \varepsilon^{n_2}\beta'$ et $\overline{|\beta'|} \leqslant T_3 T_1$.

Par hypothèse on a $y = y_1 \mu_1 + \ldots + y_t \mu_t$, où $y_j \in M'$, $t \leqslant n_2$, $\mu_1, \ldots, \mu_t$ sont K'-linéairement indépendants, connexes par rapport à K/K' et $\overline{|\mu_j|} \leqslant A'$. En utilisant le Théorème A, il résulte de (6) que

$$\varepsilon^{-1} y = (\gamma'_1)^{v_1} \ldots (\gamma'_q)^{v_q} y^*, \quad y^* \in \mathbf{Z}_K$$

et, d'après une majoration de Siegel [16] concernant $R^*_{K'} h_{K'}$,

$$\overline{|y^*|} < \exp \{ (s+1)\, l\, h_L^2 c_3 \log (T_1 T_2) \,|\, D_K \,|^{1/6} (\log |\, D_K \,|)^{n_1 l} P^g \cdot$$
$$\cdot (\log P)^5 R_G \log^3 (R^*_G h_G) (R_G + h_G \log P)^{sf+2} (R_G + h_G \log P$$
$$+ \log (A'b)) (\log \mathscr{P}) (\log T_1) \} =$$
$$= \exp \{ (\log T_4) \big(R_G + h_G \log P + \log (A'b) \big) \} = T_5 \, .$$

En considérant les conjugués $\varepsilon^{-1} y^{(i)} = (\varepsilon^{-1} y_1)\, \mu_1^{(i)} + \ldots + (\varepsilon^{-1} y_t)\, \mu_t^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, n_2)$ de $\varepsilon^{-1} y$ sur K', on obtient $\varepsilon^{-1} y_j = (\gamma'_1)^{v'_1} \ldots (\gamma'_q)^{v'_q} \sigma_j$ avec $v_i \geqslant 0$ et $\sigma_j \in \mathbf{Z}_{K'}$, où $\overline{|\sigma_j|} < T_5^2, j = 1, \ldots, t$. Comme

$$N_{K'/L}(y_j) = N_{K'/L}(\varepsilon^{-1} y_j) = (\pi_1^{v''_1} \ldots \pi_s^{v''_s})^{n_1 h_{K'}} N_{K'/L}(\sigma_j)$$

avec $v''_i \geqslant 0$, d'après l'hypothèse de récurrence nous obtenons

$$y_j = \pi_1^{w_{1j}} \ldots \pi_s^{w_{sj}} \tilde{y}_j \, , \quad w_{ij} \geqslant 0 \, , \quad \tilde{y}_j \in \mathbf{Z}_{K'} \quad \text{et} \quad \overline{|\tilde{y}_j|} < T_6 \, ,$$

où T_6 coïncide avec U_{k-1} avec la restriction suivante sur U_{k-1}: il faut prendre $T_5^{2n_1}$ au lieu de b. Avec la notation $w'_i = \min\limits_j w_{ij}$ nous avons

$$y_j = \kappa\, y'_j \, , \quad \kappa = \pi_1^{w'_1} \ldots \pi_s^{w'_s} \, , \quad y'_j \in \mathbf{Z}_{K'}$$

et

$$\overline{|y'_j|} < T_6^{1,\, 1\, (s+1)\, l \log \mathscr{P}} < U_k \, .$$

Pour

$$y' = y'_1 \mu_1 + \ldots + y'_t \mu_t$$

on a $y = \kappa\, y'$ et y' vérifie (5).

Si $x_1, \ldots, x_m \in \mathbf{Z}_L$, $z_1, \ldots, z_s \geqslant 0$ est une solution quelconque de (1), en considérant les conjugués de $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_m x_m = y$ sur L on obtient

$x_i = \kappa\, v_i / v$ avec $v_i, v \in \mathbf{Z}_G$, où

$$\overline{|v|} \leqslant (mA)^m \, , \quad \overline{|v_i|} \leqslant (mA)^{m-1} n A' \, U_k \, .$$

Comme $\kappa \mid \nu(x_1, \dots, x_m)$, on déduit

$$\overline{|\kappa|} \leqslant \mathscr{P}^{s[ml \log(mA) + \log d]},$$

ce qui implique (2).

Démonstration du Corollaire 1. Considérons les $\mathbf{Z}_L$-modules $M_i = \{1, \alpha_i\}$, où $1, \alpha_i$ sont K_{i-1}-linéairement indépendants et connexes par rapport à K_i/K_{i-1}. Comme $1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in M_2 \dots M_m$ sont L-linéairement indépendants, le Corollaire 1 est une conséquence simple de notre Théorème 1.

Démonstration du Théorème 2. Soit $0 \neq x \in \mathbf{Z}_L^m$ avec $N((x_1, \dots, x_m)) \leqslant d$ et considérons la décomposition de $F(x)$ en idéaux premiers

$$(F(x)) = \mathfrak{p}_1^{u_1} \dots \mathfrak{p}_s^{u_s}. \tag{7}$$

Posons $\mathfrak{p}_i^{h_L} = (\pi_i)$ et $u_i = h_L z_i + r_i$ avec $0 \leqslant r_i < h_L$, $i = 1, \dots, s$. En vertu de (7) $\mathfrak{p}_1^{r_1} \dots \mathfrak{p}_s^{r_s} = (\beta)$ est un idéal principal dans L, et on a

$$F(x) = \eta \beta \pi_1^{z_1} \dots \pi_s^{z_s} \tag{8}$$

avec une unité $\eta \in L$ convenable. D'après le Lemme 3 de [5], on peut supposer que

$$\overline{|\pi_i|} \leqslant P^{h_L/l} c_4.$$

De plus, d'après ce lemme $\eta \beta = \varepsilon^{-n} \beta_1$ avec une unité $\varepsilon \in L$ et avec un $\beta_1 \in \mathbf{Z}_L$ vérifiant

$$\overline{|\beta_1|} \leqslant P^{sh_L/l} c_4^n,$$

où $c_4 = c_4(L)$ est effectivement calculable. (8) implique

$$F(\varepsilon x) = \beta_1 \pi_1^{z_1} \dots \pi_s^{z_s} \tag{9}$$

Nous pouvons maintenant appliquer le Théorème 1 à (9), et nous obtenons

$$\max_{1 \leq i \leq m} \overline{|\varepsilon x_i|} < \exp\{c_5 (c_6(s+1))^{C_7(s+1)} P^{c_8} \cdot (\log P)^{C_9(s+1)}\} \tag{10}$$

avec des constantes effectives $c_5 = c_5(K, L, A, A', d)$ et $c_i = c_i(K, L)$, $6 \leqslant i \leqslant 9$.

Il est évident que

$$|N_{L/Q}(x_i)| \leqslant \overline{|\varepsilon x_i|}^{\,l}, \quad i = 1, \dots, m. \tag{11}$$

De plus, d'après un théorème bien connu

$$s \leqslant 2l\,P/\log P\,. \tag{12}$$

Donc, si N_o est assez grand, alors en vertu de $N = \max_i |N_{L/\mathbf{Q}}(x_i)| \geqslant N_o$, (10), (11) et (12), P est également grand et (10) entraîne

$$s \log (s+1) + \log P + s \log\log P > c_7 \log\log N \tag{13}$$

avec une constante effective $c_{10} = c_{10}(K, L, A, A', d) > 0$. Comme

$$s \log\log P < 2 \;\max\;\big(s \log (s+1), \log P\big)\,,$$

(3) résulte de (13). Enfin, (3) et (12) impliquent (4).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Borevich, Z. I. and I. R. Shafarevich. *Number theory*. Academic Press, New York and London, 1967.

[2] Coates, J. An effective p-adic analogue of a theorem of Thue. *Acta Arith. 15* (1969), pp. 279-305.

[3] —— An effective p-adic analogue of a theorem of Thue II, The greatest prime factor of a binary form. *Acta Arith. 16* (1970), pp. 399-412.

[4] Györy, K. On the greatest prime factors of decomposable forms at integer points. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I, 4* (1978/1979), pp. 341-355.

[5] —— On the solutions of linear diophantine equations in algebraic integers of bounded norm. *Ann. Univ. Sci. Budapest, Sect. Math. 22-23* (1979/1980), pp. 225-233.

[6] —— Explicit upper bounds for the solutions of some diophantine equations. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I, 5* (1980), pp. 3-12.

[7] —— Explicit lower bounds for linear forms with algebraic coefficients. *A paraître.*

[8] Györy, K. and Z. Z. Papp. Effective estimates for the integer solutions of norm form and discriminant form equations. *Publ. Math. Debrecen 25* (1978), pp. 311-325.

[9] —— Norm form equations and explicit lower bounds for linear forms with algebraic coefficients. *A paraître.*

[10] Kotov, S. V. The Thue-Mahler equation in relative fields (en russe). *Acta Arith. 27* (1975), pp. 293-315.

[11] Kotov, S. V. and V. G. Sprindžuk. The Thue-Mahler equation in a relative field and approximation of algebraic numbers by algebraic numbers (en russe). *Izv. Akad. Nauk SSSR 41* (1977), pp. 723-751.

[12] Mahler, K. Zur Approximation algebraischer Zahlen, I. Über den grössten Primteiler binärer Formen. *Math. Ann. 107* (1933), pp. 691-730.

[13] —— Zur Approximation algebraischer Zahlen II. Über die Anzahl der Darstellungen ganzer Zahlen durch Binärformen. *Math. Ann. 108* (1934), pp. 37-55.

[14] Parry, C. J. The P-adic generalization of the Thue-Siegel theorem. *Acta Math. 83* (1950), pp. 1-100.

[15] Schlickewei, H. P. On norm form equations. *J. Number Theory 9* (1977), pp. 370-380.

[16] Siegel, C. L. Abschätzung von Einheiten. *Nachr. Göttingen* (1969), 71-86.