

Zeitschrift:	L'Enseignement Mathématique
Herausgeber:	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band:	26 (1980)
Heft:	1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
Artikel:	SUR CERTAINES GÉNÉRALISATIONS DE L'ÉQUATION DE THUE-MAHLER
Autor:	Györy, K.
Kapitel:	3. DÉMONSTRATIONS
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-51072

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 17.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

$c_i = c_i(K, L, A, A', d) > 0$, $i = 1, 2$, et $N_o = N_o(K, L, A, A', d)$ telles que

$$(3) \quad s \log(s+1) + \log P > c_1 \log \log N$$

et

$$(4) \quad P > c_2 \log \log N$$

pour tout $x \in \mathbf{Z}_L^m$ avec $N((x_1, \dots, x_m)) \leq d$ et $N = \max_{1 \leq i \leq m} |N_{L/Q}(x_i)| \geq N_o$, où $s = \omega(F(x))$ et $P = P(F(x))$.

Le Théorème 2 généralise certains récents résultats de Kotov [10] et Györy [4].

3. DÉMONSTRATIONS

La démonstration du Théorème 1 sera basée sur le théorème ci-dessous. Avec les notations du paragraphe précédent, on a le

THÉORÈME A. Soit $M = \{\mu_1, \dots, \mu_t\} \subset \mathbf{Z}_K$ un \mathbf{Z}_L -module. Supposons μ_1, \dots, μ_t L -linéairement indépendants, connexes par rapport à K/L et $\max_j |\mu_j| \leq A'$. Si $y \in M$ et

$$N_{K/L}(y) = \beta \pi_1^{z_1} \dots \pi_s^{z_s}$$

avec des entiers $z_i \geq 0$, alors $y = \pi_1^{u_1} \dots \pi_s^{u_s} y'$, où $u_1, \dots, u_s \geq 0$ sont des entiers, $y' \in \mathbf{Z}_K$,

$$|y'| < T$$

et

$$T = \exp \{ c_3 R_L^* h_L P^g (\log P)^5 R_G \log^3 (R_G^* h_G) (R_G + h_G \log P)^{sf+2} \cdot \\ \cdot (\log \mathcal{P}) (R_G + h_G \log P + \log (A'b)) \}$$

avec

$$c_3 = (25(r+sf+3)g)^{22r+13sf+2rsf+44}.$$

Ce théorème est une conséquence ¹⁾ du théorème 2 du travail [6] (voir encore la majoration (45) de [4]). Dans la démonstration du théorème 2 de [6], nous avons utilisé la méthode de Baker.

¹⁾ Le théorème 2 de [6] est vrai pour toute extension galoisienne de L contenant le corps de décomposition de F .

Démonstration du Théorème 1. Démontrons d'abord par récurrence sur k que $y \in M = M_1 \dots M_k$ et $N_{K/L}(y) = \beta \pi_1^{z_1} \dots \pi_s^{z_s}$ impliquent $y = \pi_1^{u_1} \dots \pi_s^{u_s} y'$ avec $u_1, \dots, u_s \geq 0$, où $y' \in \mathbf{Z}_K$ et

$$(5) \quad \lceil y' \rceil < n A' \exp \{ (\log T) (nl(s+1) \log \mathcal{P}) (\log T_4)^{k-1} \} = n A' U_k$$

avec le T_4 défini ci-dessous. Pour $k = 1$ cela découle du Théorème A. Supposons (5) prouvé pour $k-1$ avec $k \geq 2$. Posons $K_{k-1} = K'$, $[K' : L] = n_1$, $[K : K'] = n_2$ et $M' = M_1 \dots M_{k-1}$. Désignons par $D_{K'}$ et $h_{K'}$ le discriminant et le nombre de classes de K' . Comme

$$N_{K/L}(y) = N_{K'/L}(N_{K/K'}(y)),$$

dans K' on a la décomposition en idéaux premiers

$$(N_{K/K'}(y)) = \mathfrak{a} \mathfrak{P}_1^{z'_1} \dots \mathfrak{P}_q^{z'_q} = (\delta \gamma_1^{w_1} \dots \gamma_q^{w_q}),$$

où $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_q$ sont les idéaux premiers distincts de K' au-dessus de $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$, $(\mathfrak{a}, \mathfrak{P}_i) = 1$, $(\delta) \mid (\beta) (\mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_q)^{h_{K'}-1}$, $(\gamma_i) = \mathfrak{P}_i^{h_{K'}}$, et, en vertu du Lemme 6 de [8] et $D_{K'}^{n_2} \mid D_K$, on peut supposer

$$\max_i \lceil \gamma_i \rceil < \exp \{ (\log P) (31 (ln_1)^3 \log |D_K|)^{ln_1} |D_K|^{1/6} \} = T_1.$$

Si $(\pi_i, \gamma_j) \neq 1$, alors $N_{K'/L}(\gamma_j^{h_L}) = \eta \pi_i^{h_{K'} f_j^*}$ avec $f_j^* \leq n_1$ et avec une unité $\eta \in L$ vérifiant

$$\lceil \eta \rceil \leq T_1^{n_1 l h_L \log \mathcal{P}} = T_2.$$

Nous avons

$$(6) \quad N_{K/K'}(y) = \beta_1 (\gamma_1')^{u'_1} \dots (\gamma_q')^{u'_q}$$

avec

$$\gamma_i' = \eta^{-1} \gamma_i^{n_1 h_L}, \quad \beta_1 = \delta \eta^{u'_1 + \dots + u'_q} \gamma_1^{d_1} \dots \gamma_q^{d_q},$$

où

$$w_i = h_L u_i + r_i, \quad 0 \leq r_i < h_L, \quad u_i = n_1 u'_i + u''_i, \quad 0 \leq u''_i < n_1$$

et

$$d_i = r_i + u''_i h_L.$$

Ici $\lceil \gamma_i' \rceil \leq T_1^{n_1 h_L} T_2^l$. En comparant les normes sur L des membres de gauche et de droite de (6), on obtient

$$\lceil N_{K'/L}(\beta_1) \rceil \leq (b^{n_1 l} T_1^{(s+1) h_L})^{2l(s+1) \log \mathcal{P}} = T_3.$$

Le Lemme 6 de [8] implique qu'il existe une unité ε dans K' telle que $N_{K'/L}(\varepsilon) = 1$, $\beta_1 = \varepsilon^{n_2} \beta'$ et $|\beta'| \leq T_3 T_1$.

Par hypothèse on a $y = y_1 \mu_1 + \dots + y_t \mu_t$, où $y_j \in M'$, $t \leq n_2$, μ_1, \dots, μ_t sont K' -linéairement indépendants, connexes par rapport à K/K' et $|\mu_j| \leq A'$. En utilisant le Théorème A, il résulte de (6) que

$$\varepsilon^{-1} y = (\gamma'_1)^{v_1} \dots (\gamma'_q)^{v_q} y^*, \quad y^* \in \mathbf{Z}_K$$

et, d'après une majoration de Siegel [16] concernant $R_{K'}^* h_{K'}$,

$$\begin{aligned} |y^*| &< \exp \{ (s+1) l h_L^2 c_3 \log (T_1 T_2) |D_K|^{1/6} (\log |D_K|)^{n_1 l} P^g \cdot \\ &\quad \cdot (\log P)^5 R_G \log^3 (R_G^* h_G) (R_G + h_G \log P)^{s_f+2} (R_G + h_G \log P \\ &\quad + \log (A' b)) (\log \mathcal{P}) (\log T_1) \} = \\ &= \exp \{ (\log T_4) (R_G + h_G \log P + \log (A' b)) \} = T_5. \end{aligned}$$

En considérant les conjugués $\varepsilon^{-1} y^{(i)} = (\varepsilon^{-1} y_1) \mu_1^{(i)} + \dots + (\varepsilon^{-1} y_t) \mu_t^{(i)}$ ($i = 1, \dots, n_2$) de $\varepsilon^{-1} y$ sur K' , on obtient $\varepsilon^{-1} y_j = (\gamma'_1)^{v'_1} \dots (\gamma'_q)^{v'_q} \sigma_j$ avec $v_i \geq 0$ et $\sigma_j \in \mathbf{Z}_{K'}$, où $|\sigma_j| < T_5^2$, $j = 1, \dots, t$. Comme

$$N_{K'/L}(y_j) = N_{K'/L}(\varepsilon^{-1} y_j) = (\pi_1^{v'_1} \dots \pi_s^{v'_s})^{n_1 h_{K'}} N_{K'/L}(\sigma_j)$$

avec $v'_i \geq 0$, d'après l'hypothèse de récurrence nous obtenons

$$y_j = \pi_1^{w_1 j} \dots \pi_s^{w_s j} \tilde{y}_j, \quad w_{ij} \geq 0, \quad \tilde{y}_j \in \mathbf{Z}_{K'}, \quad \text{et} \quad \left| \tilde{y}_j \right| < T_6,$$

où T_6 coïncide avec U_{k-1} avec la restriction suivante sur U_{k-1} : il faut prendre $T_5^{2n_1}$ au lieu de b . Avec la notation $w'_i = \min_j w_{ij}$ nous avons

$$y_j = \kappa y'_j, \quad \kappa = \pi_1^{w'_1} \dots \pi_s^{w'_s}, \quad y'_j \in \mathbf{Z}_{K'}$$

et

$$\left| y'_j \right| < T_6^{1, 1(s+1)l \log \mathcal{P}} < U_k.$$

Pour

$$y' = y'_1 \mu_1 + \dots + y'_t \mu_t$$

on a $y = \kappa y'$ et y' vérifie (5).

Si $x_1, \dots, x_m \in \mathbf{Z}_L$, $z_1, \dots, z_s \geq 0$ est une solution quelconque de (1), en considérant les conjugués de $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m = y$ sur L on obtient

$x_i = \kappa v_i / \nu$ avec $v_i, \nu \in \mathbf{Z}_G$, où

$$\left| \nu \right| \leq (mA)^m, \quad \left| v_i \right| \leq (mA)^{m-1} n A' U_k.$$

Comme $\kappa \mid v(x_1, \dots, x_m)$, on déduit

$$\lceil \kappa \rceil \leq \mathcal{P}^{s[m \ell \log(mA) + \log d]},$$

ce qui implique (2).

Démonstration du Corollaire 1. Considérons les \mathbf{Z}_L -modules $M_i = \{1, \alpha_i\}$, où $1, \alpha_i$ sont K_{i-1} -linéairement indépendants et connexes par rapport à K_i/K_{i-1} . Comme $1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in M_2 \dots M_m$ sont L -linéairement indépendants, le Corollaire 1 est une conséquence simple de notre Théorème 1.

Démonstration du Théorème 2. Soit $0 \neq x \in \mathbf{Z}_L^m$ avec $N((x_1, \dots, x_m)) \leq d$ et considérons la décomposition de $F(x)$ en idéaux premiers

$$(7) \quad (F(x)) = \mathfrak{p}_1^{u_1} \dots \mathfrak{p}_s^{u_s}.$$

Posons $\mathfrak{p}_i^{h_L} = (\pi_i)$ et $u_i = h_L z_i + r_i$ avec $0 \leq r_i < h_L$, $i = 1, \dots, s$. En vertu de (7) $\mathfrak{p}_1^{r_1} \dots \mathfrak{p}_s^{r_s} = (\beta)$ est un idéal principal dans L , et on a

$$(8) \quad F(x) = \eta \beta \pi_1^{z_1} \dots \pi_s^{z_s}$$

avec une unité $\eta \in L$ convenable. D'après le Lemme 3 de [5], on peut supposer que

$$\lceil \pi_i \rceil \leq P^{h_L/l} c_4.$$

De plus, d'après ce lemme $\eta \beta = \varepsilon^{-n} \beta_1$ avec une unité $\varepsilon \in L$ et avec un $\beta_1 \in \mathbf{Z}_L$ vérifiant

$$\lceil \beta_1 \rceil \leq P^{sh_L/l} c_4^n,$$

où $c_4 = c_4(L)$ est effectivement calculable. (8) implique

$$(9) \quad F(\varepsilon x) = \beta_1 \pi_1^{z_1} \dots \pi_s^{z_s}$$

Nous pouvons maintenant appliquer le Théorème 1 à (9), et nous obtenons

$$(10) \quad \max_{1 \leq i \leq m} \lceil \varepsilon x_i \rceil < \exp \{ c_5 (c_6 (s+1))^{c_7 (s+1)} P^{c_8} \cdot (\log P)^{c_g (s+1)} \}$$

avec des constantes effectives $c_5 = c_5(K, L, A, A', d)$ et $c_i = c_i(K, L)$, $6 \leq i \leq 9$.

Il est évident que

$$(11) \quad |N_{L/Q}(x_i)| \leq \lceil \varepsilon x_i \rceil^l, \quad i = 1, \dots, m.$$

De plus, d'après un théorème bien connu

$$(12) \quad s \leqslant 2l P / \log P.$$

Donc, si N_o est assez grand, alors en vertu de $N = \max_i |N_{L/Q}(x_i)| \geqslant N_o$,

(10), (11) et (12), P est également grand et (10) entraîne

$$(13) \quad s \log(s+1) + \log P + s \log \log P > c_7 \log \log N$$

avec une constante effective $c_{10} = c_{10}(K, L, A, A', d) > 0$. Comme

$$s \log \log P < 2 \max(s \log(s+1), \log P),$$

(3) résulte de (13). Enfin, (3) et (12) impliquent (4).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOREVICH, Z. I. and I. R. SHAFAREVICH. *Number theory*. Academic Press, New York and London, 1967.
- [2] COATES, J. An effective p -adic analogue of a theorem of Thue. *Acta Arith.* 15 (1969), pp. 279-305.
- [3] —— An effective p -adic analogue of a theorem of Thue II, The greatest prime factor of a binary form. *Acta Arith.* 16 (1970), pp. 399-412.
- [4] GYÖRY, K. On the greatest prime factors of decomposable forms at integer points. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I*, 4 (1978/1979), pp. 341-355.
- [5] —— On the solutions of linear diophantine equations in algebraic integers of bounded norm. *Ann. Univ. Sci. Budapest, Sect. Math.* 22-23 (1979/1980), pp. 225-233.
- [6] —— Explicit upper bounds for the solutions of some diophantine equations. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I*, 5 (1980), pp. 3-12.
- [7] —— Explicit lower bounds for linear forms with algebraic coefficients. *A paraître*.
- [8] GYÖRY, K. and Z. Z. PAPP. Effective estimates for the integer solutions of norm form and discriminant form equations. *Publ. Math. Debrecen* 25 (1978), pp. 311-325.
- [9] —— Norm form equations and explicit lower bounds for linear forms with algebraic coefficients. *A paraître*.
- [10] KOTOV, S. V. The Thue-Mahler equation in relative fields (en russe). *Acta Arith.* 27 (1975), pp. 293-315.
- [11] KOTOV, S. V. and V. G. SPRINDŽUK. The Thue-Mahler equation in a relative field and approximation of algebraic numbers by algebraic numbers (en russe). *Izv. Akad. Nauk SSSR* 41 (1977), pp. 723-751.
- [12] MAHLER, K. Zur Approximation algebraischer Zahlen, I. Über den grössten Primteiler binärer Formen. *Math. Ann.* 107 (1933), pp. 691-730.
- [13] —— Zur Approximation algebraischer Zahlen II. Über die Anzahl der Darstellungen ganzer Zahlen durch Binärformen. *Math. Ann.* 108 (1934), pp. 37-55.
- [14] PARRY, C. J. The P -adic generalization of the Thue-Siegel theorem. *Acta Math.* 83 (1950), pp. 1-100.
- [15] SCHLICKEWEI, H. P. On norm form equations. *J. Number Theory* 9 (1977), pp. 370-380.
- [16] SIEGEL, C. L. Abschätzung von Einheiten. *Nachr. Göttingen* (1969), 71-86.