Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 26 (1980)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR CERTAINES GÉNÉRALISATIONS DE L'ÉQUATION DE THUE-MAHLER

Autor: Györy, K.

Kapitel: 1. Introduction

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-51072

SUR CERTAINES GÉNÉRALISATIONS DE L'ÉQUATION DE THUE-MAHLER

par K. Györy

Dédié à Monsieur le Professeur Kurt Mahler

1. Introduction

Soient L un corps de nombres algébriques de degré $l \geqslant 1$, $\mathbf{Z}_L$ son anneau des entiers, et K une extension de degré $n \geqslant 3$ de L. Soient $\beta, \pi_1, \ldots, \pi_s$ $(s \geqslant 0)$ des entiers algébriques non nuls dans L et $d \geqslant 1$. Supposons $(\pi_i) = \mathfrak{p}_i^{h_L}$, où h_L désigne le nombre de classes de L, $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ sont des idéaux premiers distincts avec normes $N(\mathfrak{p}_i) = p_i^{f_i}$ et $p_1, \ldots, p_s$ sont des nombres premiers $\leqslant P$. Pour chaque $\alpha \in K$, notons $\alpha = \alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ les conjugués de α sur L. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ $m \geqslant 2$ entiers algébriques non nuls dans K. Comme il est connu (voir par ex. [1]),

$$F(x_1, \ldots, x_m) = N_{K/L}(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_m x_m) = \prod_{i=1}^{n} (\alpha_1^{(i)} x_1 + \ldots + \alpha_m^{(i)} x_m)$$

est une forme de degré n à coefficients dans $\mathbf{Z}_L$. Supposons F irréductible sur L. De nombreux problèmes de théorie des nombres conduisent à la recherche des solutions $x_1, \ldots, x_m \in \mathbf{Z}_L$, $z_1, \ldots, z_s \in \mathbf{Z}$ de l'équation

$$(1) \qquad N_{K/L}(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_m x_m) = \beta \pi_1^{z_1} \ldots \pi_s^{z_s}, \; N\big((x_1, \ldots, x_m)\big) \leqslant d\,.$$

Quand $m = 2$ et $L = \mathbf{Q}$, (1) est justement l'équation de Thue-Mahler et, d'après un célèbre théorème de Mahler [12], [13], (1) n'admet qu'un nombre fini de solutions. Pour certaines généralisations voir Parry [14] et Schlickewei [15]. Ces théorèmes de Mahler, Parry et Schlickewei ne sont pas effectifs, i.e. leurs démonstrations ne fournissent aucun algorithme pour déterminer les solutions. En utilisant la méthode de Baker, A. Vinogradov et Sprindžuk [20], Coates [2], [3], Sprindžuk [17], [18], [19], Kotov [10], Kotov et Sprindžuk [11] et Györy [4], [6] ont obtenu des bornes effectives pour les solutions de l'équation de Thue-Mahler. Les résultats de [10], [11], [4] et

[6] sont valables sur des corps de nombres algébriques L quelconques. Pour $m \geqslant 2$, [4] et [6] contiennent, sous certaines hypothèses faites sur $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, des majorations effectives pour les solutions de (1). Dans cet article nous donnons des généralisations communes des résultats effectifs mentionnés ci-dessus et de certains théorèmes effectifs [8], [9] obtenus dans le cas $s = 0$. Notre principal résultat a plusieurs applications. Certaines d'entre elles seront publiées dans [7].

2. Enoncés des résultats

Soient L, K, β et $\pi_1, \ldots, \pi_s$ comme plus haut. Supposons $\overline{|\beta|} \leqslant b$ et $\max_{1 \leq i \leq s} \overline{|\pi_i|} \leqslant \mathscr{P}$ $(\geqslant 2)$ ($\overline{|\alpha|}$ désigne la maison d'un nombre algébrique α, i.e. le maximum des valeurs absolues des racines du polynôme minimal de α sur $\mathbf{Z}$). Pour $s = 0$ soit $P = \mathscr{P} = 2$. Soient D_K le discriminant de K, et G une extension galoisienne de L contenant K. Désignons par h_G et R_G (resp. h_L et R_L) le nombre de classes et le régulateur de G (resp. de L). Posons $[G : \mathbf{Q}] = g$, $[G : L] = f$ et soit r le nombre des unités fondamentales de G.

Nous disons que les nombres $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K$ $(m \geqslant 2)$ sont *connexes* par rapport à K/L si le système $\mathscr{L}$ des formes linéaires $l^{(i)}(x) = \alpha_1^{(i)} x_1 + \ldots + \alpha_m^{(i)} x_m$, $i = 1, \ldots, n$, est connexe; i.e. si pour tout $i \neq j$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, il existe une suite $l^{(i)} = l^{(i_1)}, \ldots, l^{(i_v)} = l^{(j)}$ dans $\mathscr{L}$ telle que $\lambda'_{i_\mu} l^{(i_\mu)} + \lambda''_{i_{\mu+1}} l^{(i_{\mu+1})} \in \mathscr{L}$ avec $\lambda'_{i_\mu}, \lambda''_{i_{\mu+1}} \in \overline{\mathbf{Q}} \setminus \{0\}$, $\mu = 1, \ldots, v-1$ (cf. [8], [4] ou [6]).

Exemple 1. Il est évident que si $m = 2$, $0 \neq \alpha_1 \in L$ et $K = L(\alpha_2)$, alors α_1 et α_2 sont connexes par rapport à K/L.

Exemple 2. Si $K = L(\alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ avec $[L(\alpha_i) : L] = n_i \geqslant 3$, $i = 2, \ldots, m$, et $n_2 \ldots n_m = n$, alors, d'après le Lemme 4 de [8], les nombres $1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ sont connexes par rapport à K/L.

Soit

$$C = (25(r + sf + 3)\, g)^{k(24(r+2) + sf(2r+13))}\, R_L^* (h_L \log \mathscr{P})^{3k-2} \,.$$
$$.\, (|D_K|^{1/2} (\log |D_K|)^{ln})^{k-1} (P^g (\log P)^7\, R_G \log^3 (R_G^* h_G))^k \,.$$
$$.\, (R_G + h_G \log P)^{k(sf+2)} \,,$$