Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 26 (1980)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE PROCÉDÉ DE SOMMATION DE BOREL ET LA RÉPARTITION DU NOMBRE DES FACTEURS PREMIERS DES ENTIERS

Autor: Tenenbaum, Gérald

Kapitel: 6. Le contre exemple

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-51071

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 19.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

En faisant le changement de variable $t^2 = u\,y^2$, il vient

$$(\forall y > 1) \qquad \int_0^\infty e^{-uy^2} g(\sqrt{u})\,du = \frac{\sqrt{\pi}\,\alpha}{y^3}\,.$$

L'injectivité de la transformation de Laplace implique donc l'égalité

$$g(\sqrt{u}) = 2\alpha\sqrt{u} \tag{26}$$

pour presque tout réel positif u. Comme g est croissante, on voit finalement que (26) a lieu pour tout u.

Nous avons donc montré que, de toute suite d'entiers tendant vers $+\infty$, on peut extraire une sous-suite (m_i) telle que (g_{m_i}) tende simplement vers la fonction $t \mapsto 2\alpha t$. Cela implique la conclusion annoncée.

6. Le contre exemple

Nous nous proposons ici d'établir le théorème 5.

Soit $t \mapsto \psi(t)$ une fonction réelle tendant vers $+\infty$; nous pouvons sans restreindre la généralité supposer que ψ est croissante et que l'on a :

$$\begin{cases} \psi(0) = 1 \\ \psi(t) = o(\sqrt{t}) \\ \limsup\limits_{t\to\infty} \left|\dfrac{\psi(2t)}{\psi(t)}\right| < +\infty\,. \end{cases} \tag{27}$$

Définissons alors une suite de nombres réels par

$$(\forall n \geqslant 2)\; a_n = \begin{cases} -\psi\left(\dfrac{m^3}{2}\right) & \text{si} \quad -m^{3/2}\psi\left(\dfrac{m^3}{2}\right)^{-1} \leqslant n - m^3 < 0 \\ +\psi\left(\dfrac{m^3}{2}\right) & \text{si} \quad 0 \leqslant n - m^3 \leqslant m^{3/2}\psi\left(\dfrac{m^3}{2}\right)^{-1} \\ 0 & \text{si} \quad (\forall m \in \mathbf{N})\; |n - m^3| > m^{3/2}\psi\left(\dfrac{m^3}{2}\right)^{-1}. \end{cases}$$

Il est clair que l'on a pour tout entier $n \geqslant 2$

$$|a_n| \leqslant \psi(n)\,.$$

De plus, pour toute constante positive c, on a:

$$\sum_{m^3 \leq n \leq m^3 + cm^{3/2}} a_n = m^{3/2}(1+o(1)),$$

on voit donc qu'il n'existe aucun réel α tel que l'on ait

$$(\forall c > 0) \quad \sum_{x \leq n < x + c\sqrt{x}} a_n = c\alpha\sqrt{x} + o(\sqrt{x}).$$

Il reste à montrer que a_n tend vers 0 au sens de Borel.

Puisque $a_n = o(\sqrt{n})$ il suffit de montrer (cf. [6]) que pour m tendant vers l'infini on a:

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} a_{m+h} \exp\left\{-\frac{h^2}{2m}\right\} = o(1) \tag{28}$$

où l'on a posé $a_{m+h} = 0$ pour $m + h < 0$.

Comme $a_n = O(\psi(n))$ on vérifie facilement la majoration

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{|h| > \sqrt{m}\,\psi(m)^{1/4}} |a_{m+h}| \exp\left\{-\frac{h^2}{2m}\right\}$$

$$= O\left(\psi(m) \exp\left\{-\frac{1}{2}\sqrt{\psi(m)}\right\}\right) = o(1).$$

Or l'intervalle $[m - \sqrt{m}\,\psi(m)^{1/4}, m + \sqrt{m}\,\psi(m)^{1/4}]$ contient, pour m assez grand, au plus un cube k^3; on voit donc que (28) est une conséquence de

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{|m-k^3| < 2k^{3/2}\psi(k^3)^{\frac{1}{4}}} |F(m,k)| = 0,$$

avec

$$F(m,k) = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{|k^3-m+h| \leq k^{3/2}\psi(k^3)^{1/4}} a_{k^3+k} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(k^3-m+h)^2}{m}\right\}.$$

On a pour $|m - k^3| < k^{3/2}\psi(k^3)^{\frac{1}{4}} - k^{3/2}\psi(k^3/2)^{-1}$

$$F(m,k) = (1+o(1))\frac{\psi(k^3/2)}{k^{3/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(k^3-m)^2}{m}\right\} \times$$

$$\times \sum_{0 \leq h \leq k^{3/2} \psi(k^3/2)^{-1}} \exp\left\{-\frac{h^2}{2m}\right\}\left[\exp\left\{-h\frac{(k^3-m)}{m}\right\} - \exp\left\{\frac{h(k^3-m)}{m}\right\}\right];$$

comme

$$\exp\left\{\pm h\frac{(k^3-m)}{m}\right\} = \exp\{O(\psi(k^3)^{-3/4})\} = 1 + o(1),$$

la conclusion en découle.

Pour $|m - k^3| > k^{3/2}\psi(k^3)^{\frac{1}{4}} - k^{3/2}\psi(k^3/2)^{-1}$, on a trivialement $F(m, k) = O\left(\exp\left\{-\left(\frac{1}{2} + o(1)\right)\sqrt{\psi(m)}\right\}\right) = o(1)$, ce qui achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DELANGE, H. Sur la distribution des entiers ayant certaines propriétés. *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. (3e série) 73* (1956), pp. 15-74.

[2] —— Communication privée, février 1979.

[3] DESHOUILLERS, J.-M. Sur les nombres admettant un nombre de facteurs premiers déterminé. *C. R. Acad. Sc. Paris 271* (1970), pp. 1197-1199.

[4] HALÁSZ, G. On the distribution of additive and the mean values of multiplicative arithmetic functions. *Studia Sci. Math. Hung. 6* (1971), pp. 211-233.

[5] HARDY, G. H. *Divergent Series.* Oxford, at the Clarendon Press (1949).

[6] HARDY, G. H. and J. E. LITTLEWOOD. Theorems concerning the summability of series by Borel's exponential method. *Rendiconti del Circ. mat. di Pal. 41* (1916), pp. 36-53.

[7] —— On the tauberian theorem for Borel summability. *J. of the London Math. Soc, 18* (1943), pp. 194-200.

[8] HYSLOP, J. M. The generalization of a theorem on Borel summability. *Proc. of the London Math. Soc. 41* (1936), pp. 243-256.

[9] KARAMATA, J. *Sur les théorèmes inverses des procédés de sommabilité.* Actualités Scientifiques et Industrielles n° 450 (1937), Ed. Hermann (Paris).

[10] WIDDER, D. V. *The Laplace Transform.* Princeton University Press (1946).

[11] WIENER, N. Tauberian Theorems. *Annals of Mathematics (2) 33* (1932), pp. 1-100.

[12] WIENER, N. and W. T. MARTIN. Taylor's series of entire functions of smooth growth. *Duke Math. J. 3* (1937), pp. 213-223.

(Reçu le 16 octobre 1979)

Gérald Tenenbaum

U.E.R. de Mathématiques et d'Informatique
de l'Université de Bordeaux I
351, cours de la Libération
F-33405 Talence Cedex