Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 26 (1980)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE PROCÉDÉ DE SOMMATION DE BOREL ET LA RÉPARTITION DU NOMBRE DES FACTEURS PREMIERS DES ENTIERS

Autor: Tenenbaum, Gérald

Kapitel: 6. Le contre exemple

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-51071

En faisant le changement de variable $t^2 = u y^2$, il vient

$$(\forall y > 1) \qquad \int_0^\infty e^{-uy^2} g(\sqrt{u})\, du = \frac{\sqrt{\pi}\, \alpha}{y^3} .$$

L'injectivité de la transformation de Laplace implique donc l'égalité

$$g(\sqrt{u}) = 2\alpha\sqrt{u} \tag{26}$$

pour presque tout réel positif u. Comme g est croissante, on voit finalement que (26) a lieu pour tout u.

Nous avons donc montré que, de toute suite d'entiers tendant vers $+\infty$, on peut extraire une sous-suite (m_i) telle que (g_{m_i}) tende simplement vers la fonction $t \mapsto 2\alpha t$. Cela implique la conclusion annoncée.

6. Le contre exemple

Nous nous proposons ici d'établir le théorème 5.

Soit $t \mapsto \psi(t)$ une fonction réelle tendant vers $+\infty$; nous pouvons sans restreindre la généralité supposer que ψ est croissante et que l'on a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi(0) = 1 \\ \psi(t) = o(\sqrt{t}) \\ \limsup\limits_{t \to \infty} \left| \dfrac{\psi(2t)}{\psi(t)} \right| < +\infty . \end{array} \right. \tag{27}$$

Définissons alors une suite de nombres réels par

$$(\forall n \geqslant 2)\, a_n = \left\{ \begin{array}{lll} -\psi\left(\dfrac{m^3}{2}\right) & \text{si} & -m^{3/2}\psi\left(\dfrac{m^3}{2}\right)^{-1} \leqslant n - m^3 < 0 \\ +\psi\left(\dfrac{m^3}{2}\right) & \text{si} & 0 \leqslant n - m^3 \leqslant m^{3/2}\psi\left(\dfrac{m^3}{2}\right)^{-1} \\ 0 & \text{si} & (\forall m \in \mathbf{N})\, |n - m^3| > m^{3/2}\psi\left(\dfrac{m^3}{2}\right)^{-1} . \end{array} \right.$$

Il est clair que l'on a pour tout entier $n \geqslant 2$

$$|a_n| \leqslant \psi(n) .$$

De plus, pour toute constante positive c, on a:

$$\sum_{m^3 \leq n \leq m^3 + cm^{3/2}} a_n = m^{3/2}\big(1 + o(1)\big),$$

on voit donc qu'il n'existe aucun réel α tel que l'on ait

$$(\forall c > 0) \quad \sum_{x \leq n < x + c\sqrt{x}} a_n = c\alpha\sqrt{x} + o(\sqrt{x}).$$

Il reste à montrer que a_n tend vers 0 au sens de Borel.

Puisque $a_n = o(\sqrt{n})$ il suffit de montrer (cf. [6]) que pour m tendant vers l'infini on a:

$$\text{(28)} \qquad \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} a_{m+h} \exp\left\{-\frac{h^2}{2m}\right\} = o(1)$$

où l'on a posé $a_{m+h} = 0$ pour $m + h < 0$.

Comme $a_n = O\big(\psi(n)\big)$ on vérifie facilement la majoration

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{|h| > \sqrt{m}\,\psi(m)^{1/4}} |a_{m+h}| \exp\left\{-\frac{h^2}{2m}\right\}$$

$$= O\left(\psi(m) \exp\left\{-\frac{1}{2}\sqrt{\psi(m)}\right\}\right) = o(1).$$

Or l'intervalle $[m - \sqrt{m}\,\psi(m)^{1/4}, m + \sqrt{m}\,\psi(m)^{1/4}]$ contient, pour m assez grand, au plus un cube k^3; on voit donc que (28) est une conséquence de

$$\lim_{k \to \infty} \sup_{|m - k^3| < 2k^{3/2}\psi(k^3)^{\frac{1}{4}}} |F(m, k)| = 0,$$

avec

$$F(m, k) = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{|k^3 - m + h| \leq k^{3/2}\psi(k^3)^{1/4}} a_{k^3 + k} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(k^3 - m + h)^2}{m}\right\}.$$

On a pour $|m - k^3| < k^{3/2}\psi(k^3)^{\frac{1}{4}} - k^{3/2}\psi(k^3/2)^{-1}$

$$F(m, k) = \big(1 + o(1)\big)\frac{\psi(k^3/2)}{k^{3/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(k^3 - m)^2}{m}\right\} \times$$

$$\times \sum_{0 \leq h \leq k^{3/2} \psi(k^{3}/2)^{-1}} \exp\left\{-\frac{h^2}{2m}\right\}\left[\exp\left\{-h\frac{(k^3-m)}{m}\right\} - \exp\left\{\frac{h(k^3-m)}{m}\right\}\right];$$

comme

$$\exp\left\{\pm h\frac{(k^3-m)}{m}\right\} = \exp\left\{O(\psi(k^3)^{-3/4})\right\} = 1 + o(1),$$

la conclusion en découle.

Pour $|m - k^3| > k^{3/2}\psi(k^3)^{\frac{1}{4}} - k^{3/2}\psi(k^3/2)^{-1}$, on a trivialement $F(m,k) = O\left(\exp\left\{-\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)\sqrt{\psi(m)}\right\}\right) = o(1)$, ce qui achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DELANGE, H. Sur la distribution des entiers ayant certaines propriétés. *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. (3e série) 73* (1956), pp. 15-74.

[2] —— Communication privée, février 1979.

[3] DESHOUILLERS, J.-M. Sur les nombres admettant un nombre de facteurs premiers déterminé. *C. R. Acad. Sc. Paris 271* (1970), pp. 1197-1199.

[4] HALÁSZ, G. On the distribution of additive and the mean values of multiplicative arithmetic functions. *Studia Sci. Math. Hung. 6* (1971), pp. 211-233.

[5] HARDY, G. H. *Divergent Series.* Oxford, at the Clarendon Press (1949).

[6] HARDY, G. H. and J. E. LITTLEWOOD. Theorems concerning the summability of series by Borel's exponential method. *Rendiconti del Circ. mat. di Pal. 41* (1916), pp. 36-53.

[7] —— On the tauberian theorem for Borel summability. *J. of the London Math. Soc, 18* (1943), pp. 194-200.

[8] HYSLOP, J. M. The generalization of a theorem on Borel summability. *Proc. of the London Math. Soc. 41* (1936), pp. 243-256.

[9] KARAMATA, J. *Sur les théorèmes inverses des procédés de sommabilité.* Actualités Scientifiques et Industrielles n° 450 (1937), Ed. Hermann (Paris).

[10] WIDDER, D. V. *The Laplace Transform.* Princeton University Press (1946).

[11] WIENER, N. Tauberian Theorems. *Annals of Mathematics (2) 33* (1932), pp. 1-100.

[12] WIENER, N. and W. T. MARTIN. Taylor's series of entire functions of smooth growth. *Duke Math. J. 3* (1937), pp. 213-223.

(Reçu le 16 octobre 1979)

Gérald Tenenbaum

U.E.R. de Mathématiques et d'Informatique
de l'Université de Bordeaux I
351, cours de la Libération
F-33405 Talence Cedex