Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 26 (1980)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE PROCÉDÉ DE SOMMATION DE BOREL ET LA RÉPARTITION DU NOMBRE DES FACTEURS PREMIERS DES ENTIERS

Autor: Tenenbaum, Gérald

Kapitel: 5. Le résultat taubérien

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-51071

D'autre part, puisqu'aucun des x_k ($k = \pm 1, \pm 2, \ldots$) n'appartient à l'intervalle $[x - 1, x]$ la formule de la moyenne implique

$$\forall k \, (-m \leqslant k \leqslant m-1, k \neq -1, 0) \; \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(x,t) \, dA(t) \right| \leqslant \varphi(x, x_{k+i}) \sup_{x_k \leq t \leq x_{k+1}} | A(t) - A(x_{k+i}) |$$

avec $i = 1$ si $k \geqslant 1$ et $i = 0$ si $k \leqslant -2$.

D'après (6) on a donc:

$$\forall k \, (-m \leqslant k \leqslant m-1, k \neq -1, 0) \; \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(x,t) \, dA(t) \right| = o\left(\sqrt{x} \, \varphi(x, x_{k+i})\right)$$

d'où, en utilisant l'assertion (i) du lemme 1,

$$\sum_{\substack{-m \leq k \leq m-1 \\ k \neq -1, 0}} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(x,t) \, dA(t) \right| = o\left(\sum_{\substack{-m \leq k \leq m-1 \\ k \neq -1, 0}} \exp\left\{ -\frac{k^2}{2}(1 + o(1)) \right\} \right) = o(1) \,. \tag{10}$$

En reportant (10) et (9) dans (8), on obtient $I_1 + I_3 = o(1)$, ce qui achève la démonstration.

5. Le résultat taubérien

Dans cette section, nous nous proposons d'établir le théorème 4. Nous supposerons, dans toute la démonstration, A réelle et croissante; grâce au théorème 3, le cas général se déduit aisément de ce pas particulier.

Nous noterons $\mathscr{V}_+$ l'ensemble des fonctions réelles croissantes, définies sur l'ensemble des réels positifs ou nuls et prolongées par 0 sur l'ensemble des réels négatifs.

Les méthodes de démonstration que nous utiliserons sont fondées sur des idées de Hardy et Littlewood ([6], [7]) dont on trouvera un exposé dans le chapitre 9 de [5]. En particulier, le point crucial consiste à appliquer au bon moment le théorème de Vitali, que nous énonçons pour mémoire:

Soit $\mathcal{O}$ un domaine du plan complexe et (f_n) une famille de fonctions holomorphes sur $\mathcal{O}$, bornée pour la topologie de la convergence sur tout compact de $\mathcal{O}$ et convergeant vers une fonction holomorphe f, définie sur $\mathcal{O}$, sur une suite de points ayant un point d'accumulation dans $\mathcal{O}$. Alors (f_n) converge vers f uniformément sur tout compact de $\mathcal{O}$.

Lemme 3. *Pour toute fonction A de $\mathcal{V}_+$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

$$\int_0^\infty \varphi(x,t)\, dA(t) = \alpha + o(1) \tag{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{h^2}{2}\right\} dA(x+h\sqrt{x}) = \alpha + o(1)\,. \tag{11}$$

Dans [6], Hardy et Littlewood ont montré l'équivalence des conditions (3) et (11) dans le cas où $A(t)$ est la fonction sommatoire d'une suite $a_n = o(\sqrt{n})$; Hyslop [8] a généralisé ce résultat au cas où $a_n = O(n^K)$ pour un réel arbitraire K. Bien que le résultat du lemme 3 ne soit pas une conséquence de ces travaux antérieurs, la démonstration ne met en œuvre aucun moyen nouveau; nous nous contenterons d'exposer les grandes lignes de la preuve de l'implication (3) $\Rightarrow$ (11), le lecteur n'aura aucune peine, s'il le désire, à compléter la démonstration.

Comme la mesure $dA(t)$ est positive on a

$$\int_x^{x+\sqrt{x}} \varphi(x,t)\, dA(t) \leqslant \int_0^\infty \varphi(x,t)\, dA(t) = O(1)\,,$$

et comme, d'après le lemme 1, il existe une constante positive a telle que l'on ait pour x assez grand et t dans $[x, x+\sqrt{x}]$, $\varphi(x,t) \geqslant \dfrac{a}{\sqrt{x}}$, on voit que

$$A(x+\sqrt{x}) - A(x) = O(\sqrt{x})\,.$$

Maintenant il est facile d'en déduire que l'on a uniformément pour $y \geqslant \sqrt{x}$

$$A(x+y) - A(x) = O(y)\,, \tag{12}$$

et en particulier

$$A(x) = O(x)\,. \tag{13}$$

Soit alors ξ un réel fixé dans l'intervalle $\left]\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right[$; on déduit de (13) et des estimations du lemme 1 la majoration

$$\int_{|t-x|>x^{\xi}} \varphi(x,t)\, dA(t) = o(1)$$

d'où finalement:

$$\int_0^{\infty} \varphi(x,t)\, dA(t) = \int_{|t-x|<x^{\xi}} \varphi(x,t)\, dA(t) + o(1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \int_{|t-x|<x^{\xi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(t-x)^2}{x}\right\} dA(t) + R_1$$

$$+ R_2 + o(1)$$

avec

$$R_1 = O\left(\frac{1}{x}\int_{|t-x|<x^{\xi}} \frac{1+|t-x|}{\sqrt{x}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(t-x)^2}{x}\right\} dA(t)\right)$$

et

$$R_2 = O\left(\frac{1}{x}\int_{|t-x|<x^{\xi}} \frac{|t-x|^3}{x^{3/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(t-x)^2}{x}\right\} dA(t)\right).$$

Comme $dA(t)$ est positive et que les fonctions $h \mapsto |h|\, e^{-h^2/2}$ et $h \mapsto |h|^3\, e^{-h^2/2}$ sont bornées sur la droite réelle, on voit que R_1 et R_2 sont $O\left(\frac{A(x+x^{\xi}) - A(x-x^{\xi})}{x}\right)$, c'est-à-dire $o(1)$ d'après (12).

En remarquant finalement que

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \int_{|t-x|>x^{\xi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(t-x)^2}{x}\right\} dA(t) = o(1),$$

on obtient la conclusion souhaitée.

Le résultat suivant est l'analogue d'un théorème de Hardy et Littlewood ([6], théorème 4.3).

Lemme 4. *Soit A une fonction de $\mathscr{V}_+$. Si l'intégrale*

$$\hat{A}(y) = y \int_0^{\infty} e^{-ty}\, dA(t) \tag{14}$$

converge pour $y > y_0$, *alors elle définit une fonction analytique de* y *sur l'intervalle* $]y_0, +\infty[$, *on a pour tout* $y > y_0$ *et tout entier non négatif* n

$$\frac{d^n \hat{A}}{dy^n}(y) = \int_0^\infty (-t)^{n-1} e^{-ty} (n - ty)\, dA(t)$$

et, pour tout réel positif k, *les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *l'intégrale* (14) *est convergente pour tout réel positif* y *et l'on a*

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{(-k)^n}{n!} \frac{d^n \hat{A}}{dy^n}(k) = \alpha \tag{15}$$

(ii) *on a pour* x *infini*

$$\sqrt{\frac{k}{2\pi x}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{kh^2}{2}\right\} dA(x + h\sqrt{x}) = \alpha + o(1) \tag{16}$$

Démonstration. Les deux premières assertions concernant l'intégrale (14) constituent un résultat classique sur la transformation de Laplace-Stieltjes (voir par exemple Widder [10], chapitre II, §5).

Supposons maintenant que A satisfasse à la condition (i). On a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^\infty \frac{(-k)^n}{n!} \frac{d^n \hat{A}}{dy^n}(k) &= \lim_{\nu \to \infty} \sum_{n=0}^{\nu} \frac{(-k)^n}{n!} \int_0^\infty (-t)^{n-1} e^{-tk} (n - tk)\, dA(t) \\
&= \lim_{\nu \to \infty} k \int_0^\infty e^{-tk} \sum_{n=0}^{\nu} (tk - n) \frac{(kt)^{n-1}}{n!}\, dA(t) \\
&= \lim_{\nu \to \infty} k \int_0^\infty e^{-tk} \left\{ -\sum_{n=1}^{\nu} \frac{(kt)^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{\nu} \frac{(kt)^n}{n!} \right\} dA(t) \\
&= \lim_{\nu \to \infty} k \int_0^\infty e^{-tk} \frac{(kt)^\nu}{\nu!}\, dA(t) .
\end{aligned}$$

En posant $\psi(x, t) = k\, \varphi(tk, \nu)$ pour $\nu = [kx]$, on voit donc que (15) équivaut à

$$\int_0^\infty \psi(x, t)\, dA(t) = \alpha + o(1) . \tag{17}$$

Un réel ξ étant fixé dans l'intervalle $\left]\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right[$, on vérifie que l'on a pour $|t - x| < x^\xi$

(18) $$\psi(x,t) = \sqrt{\frac{k}{2\pi x}} \exp\left\{-\frac{k}{2} \cdot \frac{(t-x)^2}{x}\right\}\left(1+O\left(\frac{|t-x|^3}{x^2}\right)\right).$$

Comme (17) implique que l'intégrale $\int_x^{x+\sqrt{x}} \psi(x,t)\, dA(t)$ est bornée on en déduit, comme dans la démonstration du lemme 3, la majoration

(19) $$A(x) = O(x);$$

cela implique

$$\int_{|t-x| \geqq x^\xi} \psi(x,t)\, dA(t) = o(1),$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \int_{|t-x| \geqq x^\xi} \exp\left\{-\frac{k}{2}\frac{(t-x)^2}{x}\right\} dA(t) = o(1)$$

et finalement (16), en utilisant (18) et le changement de variable $t = x + h\sqrt{x}$.

Pour établir l'implication réciproque (ii) $\Rightarrow$ (i), il suffit de remonter les calculs précédents, après avoir remarqué que (16) implique (19) et donc la convergence de l'intégrale (14) pour tout y positif.

LEMME 5. *Soit* A *une fonction de* $\mathscr{V}_+$.

Si A *vérifie* (16) *pour un nombre réel positif* k, *il en est de même pour tout nombre* k' *satisfaisant à l'inégalité* $0 < k' < k$.

Démonstration. On utilise l'équivalence énoncée au lemme 4; le résultat est une conséquence immédiate du théorème suivant, dû à Hardy et Littlewood [6]:

Si la série entière

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$$

converge en un point x_o *de son cercle de convergence et si* θ *appartient à* $]0, 1[$, *alors la série de Taylor de* $f(\theta x_o + (1-\theta)\, x_o)$, *soit*

(20) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n\,!} \frac{d^n f}{dx^n} (\theta x_o) \{(1-\theta)\, x_o\}^n,$$

converge également vers $f(x_o)$.

Il suffit, en effet, d'appliquer le théorème à la série entière définie pour $|x| < 1$ par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-k)^n}{n!} \frac{d^n \hat{A}(k)}{dy^n} x^n$$

qui converge en $x_o = 1$.

Comme $\hat{A}$ est analytique sur $]0, +\infty[$, on a pour tout x dans $]0, 1[$

$$f(x) = \hat{A}(k(1-x))$$

et donc, en posant $k' = k(1-\theta)$,

$$\frac{d^n f}{dx^n}(\theta) = (-k)^n \frac{d^n \hat{A}}{dy^n}(k') .$$

Le résultat en découle, en remplaçant dans (20).

Nous pouvons maintenant aborder la dernière étape de la démonstration du théorème 4.

Soit donc A une fonction de $\mathscr{V}_+$ satisfaisant à (3). Nous allons montrer que la suite de fonctions $(g_m)_{m \geq 1}$ définie par

$$(\forall m \in \mathbf{N}^*, \ \forall t > 0) \qquad g_m(t) = \frac{1}{\sqrt{m}} \{ A(m + t\sqrt{m}) - A(m - t\sqrt{m}) \}$$

converge simplement vers la fonction $t \mapsto 2\alpha t$; la croissance de A permettra alors d'en déduire (1).

D'après les lemmes 3 et 5, on a, pour tout réel k de l'intervalle $\left]0, \frac{1}{2}\right[$, lorsque m tend vers l'infini

$$(21) \qquad \sqrt{\frac{k}{\pi m}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-kh^2\} \, dA(m + h\sqrt{m}) = \alpha + o(1) .$$

De plus, comme la mesure $dA(t)$ est positive, la suite des fonctions définies sur le demi-plan $\mathscr{H} = \{ z \in \mathbf{C} : Re\, z > 0 \}$ par

$$(22) \qquad f_m(z) = \sqrt{\frac{z}{\pi m}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-zh^2\} \, dA(m + h\sqrt{m})$$

est bornée pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de $\mathscr{H}$. Comme $f_m(z)$ tend vers α pour $z = k \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, le théorème de Vitali implique

$$(23) \qquad (\forall z \in \mathscr{H}) \qquad f_m(z) = \alpha + o(1) .$$

En intégrant par parties l'intégrale figurant au second membre de (22), la relation (23) devient:

$$(\forall z \in \mathscr{K}) \qquad \int_0^\infty h\, g_m(h) \exp\{-zh^2\}\, dh = \frac{\alpha\sqrt{\pi}}{2z^{3/2}} + o(1)\,.$$

Soit y un réel positif; prenons $z = y^2$ et effectuons le changement de variable $t = hy$, on obtient:

$$(24) \qquad (\forall y > 0) \qquad \int_0^\infty t\, g_m\left(\frac{t}{y}\right) e^{-t^2} dt = \frac{\alpha\sqrt{\pi}}{2y} + o(1)\,.$$

En particulier, il existe une constante positive M telle que l'on ait pour m assez grand

$$\int_0^\infty t\, g_m(t)\, e^{-t^2} dt \leqslant M\,.$$

Comme g_m est positive et croissante en t, cela implique

$$(\forall \tau > 0) \qquad g_m(\tau) \leqslant M \left\{\int_\tau^\infty te^{-t^2} dt\right\}^{-1} = 2Me^{\tau^2}\,.$$

La famille des fonctions $t \to tg_m\left(\frac{t}{y}\right) e^{-t^2}$ est donc, *pour chaque y fixé supérieur à* 1, majorée par une fonction intégrable pour la mesure de Lebesgue.

Maintenant, de toute suite d'entiers tendant vers l'infini, on peut extraire, par un procédé diagonal, une sous-suite (m_i) telle que la suite $(g_{m_i})_{i \geq 0}$ converge simplement sur l'ensemble des rationnels positifs vers une fonction g, définie sur $\mathbf{Q}_+$ et croissante. On peut la prolonger en une fonction croissante définie sur l'ensemble des réels positifs et continue à gauche. Notons encore g ce prolongement. L'ensemble D des points de discontinuité de g est dénombrable et, pour tout réel positif t n'appartenant pas à D et tout couple (r, s) de rationnels tel que $r < t < s$, on a:

$$(\forall i \geqslant 0) \qquad g_{m_i}(r) \leqslant g_{m_i}(t) \leqslant g_{m_i}(s)\,.$$

En faisant tendre i vers l'infini puis r et s vers t, on voit que (g_{m_i}) converge vers g presque partout. On peut donc appliquer le théorème de Lebesgue à la suite des fonctions $t \mapsto t\, g_{m_i}\left(\frac{t}{y}\right) e^{-t^2}$ pour y fixé supérieur à 1; on obtient

$$(25) \qquad (\forall y > 1) \qquad \int_0^\infty te^{-t^2} g\left(\frac{t}{y}\right) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\alpha}{y}\,.$$

En faisant le changement de variable $t^2 = u y^2$, il vient

$$(\forall y > 1) \qquad \int_0^\infty e^{-uy^2} g(\sqrt{u})\, du = \frac{\sqrt{\pi}\,\alpha}{y^3}\,.$$

L'injectivité de la transformation de Laplace implique donc l'égalité

$$(26) \qquad g(\sqrt{u}) = 2\alpha\sqrt{u}$$

pour presque tout réel positif u. Comme g est croissante, on voit finalement que (26) a lieu pour tout u.

Nous avons donc montré que, de toute suite d'entiers tendant vers $+\infty$, on peut extraire une sous-suite (m_i) telle que (g_{m_i}) tende simplement vers la fonction $t \mapsto 2\alpha t$. Cela implique la conclusion annoncée.

6. Le contre exemple

Nous nous proposons ici d'établir le théorème 5.

Soit $t \mapsto \psi(t)$ une fonction réelle tendant vers $+\infty$; nous pouvons sans restreindre la généralité supposer que ψ est croissante et que l'on a:

$$(27) \qquad \begin{cases} \psi(0) = 1 \\ \psi(t) = o(\sqrt{t}) \\ \limsup\limits_{t \to \infty} \left| \dfrac{\psi(2t)}{\psi(t)} \right| < +\infty\,. \end{cases}$$

Définissons alors une suite de nombres réels par

$$(\forall n \geqslant 2)\, a_n = \begin{cases} -\psi\left(\dfrac{m^3}{2}\right) & \text{si} \quad -m^{3/2}\psi\left(\dfrac{m^3}{2}\right)^{-1} \leqslant n - m^3 < 0 \\ +\psi\left(\dfrac{m^3}{2}\right) & \text{si} \quad 0 \leqslant n - m^3 \leqslant m^{3/2}\psi\left(\dfrac{m^3}{2}\right)^{-1} \\ 0 & \text{si} \quad (\forall m \in \mathbf{N})\, |n - m^3| > m^{3/2}\psi\left(\dfrac{m^3}{2}\right)^{-1}. \end{cases}$$

Il est clair que l'on a pour tout entier $n \geqslant 2$

$$|a_n| \leqslant \psi(n)\,.$$