Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 26 (1980)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE PROCÉDÉ DE SOMMATION DE BOREL ET LA RÉPARTITION DU NOMBRE DES FACTEURS PREMIERS DES ENTIERS

Autor: Tenenbaum, Gérald

Kapitel: 4. Le résultat abélien

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-51071

Dans le cas particulier où $\mathscr{A}$ est la suite de tous les entiers on a d'une part $B(x) = [x]$ et d'autre part, compte tenu de (4),

$$\begin{aligned}\sum_{|m-y|\leq y^\xi} N(m,x) &= x\left(1+O\left(\frac{1}{y^{1-\xi}}\right)\right)\sum_{|m-y|\leq y^\xi} \varphi(y,m)\\ &= x\left(1+O\left(\frac{1}{y^{1-\xi}}\right)\right)\left(\int_{|t-y|\leq y^\xi} \varphi(y,t)\,dt + O\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)\right)\\ &= x\left(1+O\left(\frac{1}{y^{1-\xi}}\right)\right),\end{aligned}$$

en vertu des assertions (iv) et (v) du lemme 1. Cela montre que pour toute suite $\mathscr{A}$ le terme reste de (5) est majoré par

$$[x] - x\left(1+O\left(\frac{1}{y^{1-\xi}}\right)\right) = o(x)\,.$$

En reportant dans (5) et en utilisant (4) on obtient

$$\begin{aligned}\frac{B(x)}{x} &= \left(1+O\left(\frac{1}{y^{1-\xi}}\right)\right)\sum_{\substack{m\in\mathscr{A}\\ |m-y|\leq y^\xi}} \varphi(y,m) + o(1)\\ &= (1+o(1))\left(\int_0^\infty \varphi(y,t)\,dA(t) + o(1)\right) + o(1)\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration du théorème 2.

4. Le résultat abélien

Le lemme suivant, dont la démonstration nous a été suggérée par H. Delange, nous sera utile.

Lemme 2. *Soit* A *une fonction mesurable complexe vérifiant* (1). *Alors la relation* (1) *a lieu uniformément en* c *sur tout compact.*

Démonstration. On peut supposer sans restreindre la généralité que l'on a $\alpha = 0$ dans (1).

Il suffit de montrer que, pour tout réel positif h, il y a convergence uniforme de $\dfrac{A(x+c\sqrt{x}) - A(x)}{\sqrt{x}}$ vers 0 pour $0 \leqslant c \leqslant h$. En effet, la convergence uniforme pour $0 \leqslant c \leqslant h$ implique la convergence uniforme pour $-h' \leqslant c \leqslant 0$ quel que soit $h' \in]0, h[$ du fait que, pour x assez grand on a

$$\forall c\,(-h' \leqslant c \leqslant 0) \qquad x + c\sqrt{x} \leqslant x \leqslant x + c\sqrt{x} + h\sqrt{ + c\sqrt{x}}$$
$$= x + (h+c)\sqrt{x} + O(1)\,.$$

Fixons donc deux réels positifs h et ε.

Pour tout $x > 0$ on désigne par I_x l'intervalle $[x, x + 2h\sqrt{x}]$ et par E_x l'ensemble des t de I_x satisfaisant à

$$|A(t) - A(x)| > \frac{\varepsilon}{1+\sqrt{2}}\sqrt{x}\,.$$

On note E_x^* l'ensemble des réels c de $[0, 2h]$ satisfaisant à

$$|A(x+c\sqrt{x}) - A(x)| > \frac{\varepsilon}{1+\sqrt{2}}\sqrt{x}\,.$$

Il est clair que E_x et E_x^* sont mesurables et que l'on a, en notant μ la mesure de Lebesgue,

$$\mu(E_x) = \sqrt{x}\,\mu(E_x^*)\,.$$

Maintenant le théorème de Lebesgue sur la convergence dominée appliqué à la fonction caractéristique de E_x^* montre que $\mu(E_x^*) = o(1)$. Il existe donc un réel x_o, que l'on peut supposer $\geqslant h^2$, tel que

$$\forall x\,(x \geqslant x_o) \qquad \mu(E_x) \leqslant \frac{h}{3}\sqrt{x}\,.$$

On voit alors que pour $x \geqslant x_o$ on a:

$$\forall c\,(0 \leqslant c \leqslant h) \qquad \left|\frac{A(x+c\sqrt{x}) - A(x)}{\sqrt{x}}\right| \leqslant \varepsilon\,.$$

En effet, des inégalités

$$\mu(I_x \cap I_{x+c\sqrt{x}}) \geqslant (2h-c)\sqrt{x} \geqslant h\sqrt{x}$$

et

$$\mu(E_x \cup E_{x+c\sqrt{x}}) \leqslant \frac{h}{3}\sqrt{x} + \frac{h}{3}\sqrt{x+h\sqrt{x}} = \frac{h}{3}\sqrt{x}\left(1+\sqrt{1+\frac{h}{\sqrt{x}}}\right)$$

$$\leqslant \frac{h}{3}(1+\sqrt{2})\sqrt{x} < h\sqrt{x}$$

on déduit l'existence d'au moins un t appartenant à $I_x \cap I_{x+c\sqrt{x}}$ et n'appartenant pas à $E_x \cup E_{x+c\sqrt{x}}$. D'après la définition de E_x on obtient

$$|A(t) - A(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{1+\sqrt{2}}\sqrt{x}$$

et

$$|A(t) - A(x+c\sqrt{x})| \leqslant \frac{\varepsilon}{1+\sqrt{2}}\sqrt{x+h\sqrt{x}}$$

d'où

$$|A(x) - A(x+c\sqrt{x})| \leqslant \frac{\varepsilon}{1+\sqrt{2}}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h\sqrt{x}}) \leqslant \varepsilon\sqrt{x}\,.$$

Remarque. La démonstration précédente est une variante de celle qui a été utilisée par Delange [1]) pour établir le fait suivant, déjà signalé par Karamata [2]):

Si A est une fonction à croissance lente, c'est-à-dire satisfaisant à

$$(\forall a \geqslant 1) \qquad \frac{A(ax)}{A(x)} = 1 + o(1)\,,$$

alors cette dernière relation a lieu uniformément en a sur tout compact de $[1, +\infty[$.

Nous pouvons maintenant établir le théorème 3.

Soit, donc, A une fonction de $\mathscr{V}$ satisfaisant à la relation (1). L'assertion (v) du lemme 1 montre que l'on peut, sans restreindre la généralité, supposer $\alpha = 0$, soit

$$(\forall c > 0) \qquad A(x+c\sqrt{x}) - A(x) = o(\sqrt{x})\,.$$

[1]) H. Delange, « Sur un théorème de Karamata », *Bull. Sc. Math. (2) 79* (1955), 1-4.

[2]) J. Karamata, « Sur un mode de croissance régulière des fonctions », *Mathematica 4* (1930), 38-53.

Comme cette relation, d'après le lemme 2, est uniforme en c sur tout compact, nous l'écrirons sous la forme:

$$(6) \qquad A\big(x+O(\sqrt{x})\big) - A(x) = o(\sqrt{x}).$$

En particulier, on a:

$$A(x) = \sum_{k \leqq \sqrt{x}} A(k^2+k) - A(k^2-k) + o(\sqrt{x}) = \sum_{k \leqq \sqrt{x}} o(k) + o(\sqrt{x})$$

d'où:

$$(7) \qquad A(x) = o(x).$$

Maintenant, décomposons l'intégrale du premier membre de (3) en une somme, soit:

$$\int_0^\infty \varphi(x,t)\, dA(t) = I_1 + I_2 + I_3$$

où I_1, I_2, I_3 correspondent respectivement aux domaines d'intégration $[0, x-\sqrt{x}[$, $[x-\sqrt{x}, x+\sqrt{x}[$ et $[x+\sqrt{x}, +\infty[$.
Une intégration par parties suffit pour majorer $|I_2|$:

$$I_2 = \big[A(t)\,\varphi(x,t)\big]_{x-\sqrt{x}}^{x+\sqrt{x}} - \int_{x-\sqrt{x}}^{x+\sqrt{x}} A(t) \frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t)\, dt$$

$$= \big[(A(t)-A(x))\,\varphi(x,t)\big]_{x-\sqrt{x}}^{x+\sqrt{x}} + \int_{x-\sqrt{x}}^{x+\sqrt{x}} (A(x)-A(t)) \frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t)\, dt;$$

la conclusion $I_2 = o(1)$ découle alors de (6) et de la majoration

$$\sup_{|t-x| \leqq \sqrt{x}} \left| \frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t) \right| = O\left(\frac{1}{x}\right)$$

qui est une conséquence des assertions (i) et (ii) du lemme 1.

Pour majorer $|I_1 + I_3|$, définissons une suite $(x_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ de nombres réels par les formules:

$$x_o = x$$

$$x_k = x_{k-1} + \sqrt{x_{k-1}} \qquad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

on vérifie facilement l'inégalité

$$x + k\sqrt{x} \leqslant x_k \leqslant x\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k \qquad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Un réel ξ étant donné dans l'intervalle $\left]\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right[$, on pose

$$m = [x^{\xi - \frac{1}{2}}]$$

de sorte que l'on a pour x assez grand

$$x_{\pm m} = x \pm x^{\xi} + O(x^{\frac{1}{3}}).$$

On décompose alors $I_1 + I_3$ en une somme:

$$(8) \qquad I_1 + I_3 = \left\{ \int_0^{x_{-m}} + \int_{x_m}^{\infty} \right\} \{ \varphi(x, t)\, dA(t) \}$$

$$+ \sum_{\substack{-m \leqq k \leqq m-1 \\ k \neq -1, 0}} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(x, t)\, dA(t).$$

D'une part on a, quitte à supposer $A(0) = 0$,

$$\left\{ \int_0^{x_{-m}} + \int_{x_m}^{\infty} \right\} \{ \varphi(x, t)\, dA(t) \} = [\varphi(x, t)\, A(t)]_{x_{-m}}^{x_m}$$

$$- \left\{ \int_0^{x_{-m}} + \int_{x_m}^{+\infty} \right\} \left\{ A(t) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t)\, dt \right\};$$

d'après l'assertion (i) du lemme 1 et la relation (7) il vient:

$$\varphi(x, x_{\pm m})\, A(x_{\pm m}) = o(1)$$

et d'après l'assertion (iii) du lemme 1 et la relation (7) on a:

$$(9) \left\{ \begin{aligned} & \left| \left\{ \int_0^{x_{-m}} + \int_{x_m}^{+\infty} \right\} \left\{ A(t) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) \right\} dt \right| \leqslant o(x_{-m}) [\varphi(x, t)]_0^{x_{-m}} \\ & \qquad\qquad + o\left(\int_{x_m}^{\infty} t \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t)\, dt \right) \\ & = o(x_{-m}) \{ \varphi(x, x_{-m}) - e^{-x} \} + o\left(x_m \varphi(x, x_m) + \int_{x_m}^{\infty} \varphi(x, t)\, dt \right) \\ & = o(1). \end{aligned} \right.$$

D'autre part, puisqu'aucun des x_k ($k = \pm 1, \pm 2, \ldots$) n'appartient à l'intervalle $[x - 1, x]$ la formule de la moyenne implique

$$\forall k \, (-m \leqslant k \leqslant m-1, k \neq -1, 0) \; \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(x, t) \, dA(t) \right|$$
$$\leqslant \varphi(x, x_{k+i}) \sup_{x_k \leq t \leq x_{k+1}} \left| A(t) - A(x_{k+i}) \right|$$

avec $i = 1$ si $k \geqslant 1$ et $i = 0$ si $k \leqslant -2$.

D'après (6) on a donc:

$$\forall k \, (-m \leqslant k \leqslant m-1, k \neq -1, 0) \; \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(x, t) \, dA(t) \right|$$
$$= o\left(\sqrt{x} \, \varphi(x, x_{k+i})\right)$$

d'où, en utilisant l'assertion (i) du lemme 1,

$$\sum_{\substack{-m \leq k \leq m-1 \\ k \neq -1, 0}} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(x, t) \, dA(t) \right| \tag{10}$$
$$= o\left(\sum_{\substack{-m \leq k \leq m-1 \\ k \neq -1, 0}} \exp\left\{ -\frac{k^2}{2}(1 + o(1)) \right\} \right)$$
$$= o(1) \, .$$

En reportant (10) et (9) dans (8), on obtient $I_1 + I_3 = o(1)$, ce qui achève la démonstration.

5. Le résultat taubérien

Dans cette section, nous nous proposons d'établir le théorème 4. Nous supposerons, dans toute la démonstration, A réelle et croissante; grâce au théorème 3, le cas général se déduit aisément de ce pas particulier.

Nous noterons $\mathscr{V}_+$ l'ensemble des fonctions réelles croissantes, définies sur l'ensemble des réels positifs ou nuls et prolongées par 0 sur l'ensemble des réels négatifs.

Les méthodes de démonstration que nous utiliserons sont fondées sur des idées de Hardy et Littlewood ([6], [7]) dont on trouvera un exposé dans le chapitre 9 de [5]. En particulier, le point crucial consiste à appliquer au bon moment le théorème de Vitali, que nous énonçons pour mémoire: