Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 26 (1980)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE PROCÉDÉ DE SOMMATION DE BOREL ET LA RÉPARTITION DU NOMBRE DES FACTEURS PREMIERS DES ENTIERS

Autor: Tenenbaum, Gérald

Kapitel: 4. Le résultat abélien

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-51071

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 17.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Dans le cas particulier où $\mathscr{A}$ est la suite de tous les entiers on a d'une part $B(x) = [x]$ et d'autre part, compte tenu de (4),

$$\begin{aligned}\sum_{|m-y|\leq y^{\xi}} N(m,x) &= x\left(1+O\left(\frac{1}{y^{1-\xi}}\right)\right)\sum_{|m-y|\leq y^{\xi}} \varphi(y,m)\\ &= x\left(1+O\left(\frac{1}{y^{1-\xi}}\right)\right)\left(\int_{|t-y|\leq y^{\xi}} \varphi(y,t)\,dt + O\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)\right)\\ &= x\left(1+O\left(\frac{1}{y^{1-\xi}}\right)\right),\end{aligned}$$

en vertu des assertions (iv) et (v) du lemme 1. Cela montre que pour toute suite $\mathscr{A}$ le terme reste de (5) est majoré par

$$[x] - x\left(1+O\left(\frac{1}{y^{1-\xi}}\right)\right) = o(x)\,.$$

En reportant dans (5) et en utilisant (4) on obtient

$$\begin{aligned}\frac{B(x)}{x} &= \left(1+O\left(\frac{1}{y^{1-\xi}}\right)\right)\sum_{\substack{m\in\mathscr{A}\\ |m-y|\leq y^{\xi}}} \varphi(y,m) + o(1)\\ &= (1+o(1))\left(\int_0^{\infty} \varphi(y,t)\,dA(t) + o(1)\right) + o(1)\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration du théorème 2.

4. Le résultat abélien

Le lemme suivant, dont la démonstration nous a été suggérée par H. Delange, nous sera utile.

Lemme 2. *Soit A une fonction mesurable complexe vérifiant* (1). *Alors la relation* (1) *a lieu uniformément en c sur tout compact.*

Démonstration. On peut supposer sans restreindre la généralité que l'on a $\alpha = 0$ dans (1).

Il suffit de montrer que, pour tout réel positif h, il y a convergence uniforme de $\dfrac{A(x+c\sqrt{x}) - A(x)}{\sqrt{x}}$ vers 0 pour $0 \leqslant c \leqslant h$. En effet, la convergence uniforme pour $0 \leqslant c \leqslant h$ implique la convergence uniforme pour $-h' \leqslant c \leqslant 0$ quel que soit $h' \in]0, h[$ du fait que, pour x assez grand on a

$$\forall c\,(-h' \leqslant c \leqslant 0) \qquad x + c\sqrt{x} \leqslant x \leqslant x + c\sqrt{x} + h\sqrt{\ + c\sqrt{x}}$$
$$= x + (h+c)\sqrt{x} + O(1)\,.$$

Fixons donc deux réels positifs h et ε.

Pour tout $x > 0$ on désigne par I_x l'intervalle $[x, x + 2h\sqrt{x}]$ et par E_x l'ensemble des t de I_x satisfaisant à

$$|A(t) - A(x)| > \frac{\varepsilon}{1+\sqrt{2}}\sqrt{x}\,.$$

On note E_x^* l'ensemble des réels c de $[0, 2h]$ satisfaisant à

$$|A(x+c\sqrt{x}) - A(x)| > \frac{\varepsilon}{1+\sqrt{2}}\sqrt{x}\,.$$

Il est clair que E_x et E_x^* sont mesurables et que l'on a, en notant μ la mesure de Lebesgue,

$$\mu(E_x) = \sqrt{x}\,\mu(E_x^*)\,.$$

Maintenant le théorème de Lebesgue sur la convergence dominée appliqué à la fonction caractéristique de E_x^* montre que $\mu(E_x^*) = o(1)$. Il existe donc un réel x_o, que l'on peut supposer $\geqslant h^2$, tel que

$$\forall x\,(x \geqslant x_o) \qquad \mu(E_x) \leqslant \frac{h}{3}\sqrt{x}\,.$$

On voit alors que pour $x \geqslant x_o$ on a:

$$\forall c\,(0 \leqslant c \leqslant h) \qquad \left|\frac{A(x+c\sqrt{x}) - A(x)}{\sqrt{x}}\right| \leqslant \varepsilon\,.$$

En effet, des inégalités

$$\mu(I_x \cap I_{x+c\sqrt{x}}) \geqslant (2h-c)\sqrt{x} \geqslant h\sqrt{x}$$

et

$$\mu(E_x \cup E_{x+c\sqrt{x}}) \leqslant \frac{h}{3}\sqrt{x} + \frac{h}{3}\sqrt{x+h\sqrt{x}} = \frac{h}{3}\sqrt{x}\left(1+\sqrt{1+\frac{h}{\sqrt{x}}}\right)$$

$$\leqslant \frac{h}{3}(1+\sqrt{2})\sqrt{x} < h\sqrt{x}$$

on déduit l'existence d'au moins un t appartenant à $I_x \cap I_{x+c\sqrt{x}}$ et n'appartenant pas à $E_x \cup E_{x+c\sqrt{x}}$. D'après la définition de E_x on obtient

$$|A(t) - A(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{1+\sqrt{2}}\sqrt{x}$$

et

$$|A(t) - A(x+c\sqrt{x})| \leqslant \frac{\varepsilon}{1+\sqrt{2}}\sqrt{x+h\sqrt{x}}$$

d'où

$$|A(x) - A(x+c\sqrt{x})| \leqslant \frac{\varepsilon}{1+\sqrt{2}}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h\sqrt{x}}) \leqslant \varepsilon\sqrt{x}\,.$$

Remarque. La démonstration précédente est une variante de celle qui a été utilisée par Delange [1]) pour établir le fait suivant, déjà signalé par Karamata [2]):

Si A est une fonction à croissance lente, c'est-à-dire satisfaisant à

$$(\forall a \geqslant 1) \qquad \frac{A(ax)}{A(x)} = 1 + o(1)\,,$$

alors cette dernière relation a lieu uniformément en a sur tout compact de $[1, +\infty[$.

Nous pouvons maintenant établir le théorème 3.

Soit, donc, A une fonction de $\mathscr{V}$ satisfaisant à la relation (1). L'assertion (v) du lemme 1 montre que l'on peut, sans restreindre la généralité, supposer $\alpha = 0$, soit

$$(\forall c > 0) \qquad A(x+c\sqrt{x}) - A(x) = o(\sqrt{x})\,.$$

---

[1]) H. Delange, « Sur un théorème de Karamata », *Bull. Sc. Math. (2) 79* (1955), 1-4.

[2]) J. Karamata, « Sur un mode de croissance régulière des fonctions », *Mathematica 4* (1930), 38-53.

Comme cette relation, d'après le lemme 2, est uniforme en c sur tout compact, nous l'écrirons sous la forme:

$$A\left(x+O\left(\sqrt{x}\right)\right) - A(x) = o\left(\sqrt{x}\right). \tag{6}$$

En particulier, on a:

$$A(x) = \sum_{k \leq \sqrt{x}} A(k^2+k) - A(k^2-k) + o\left(\sqrt{x}\right) = \sum_{k \leq \sqrt{x}} o(k) + o\left(\sqrt{x}\right)$$

d'où:

$$A(x) = o(x). \tag{7}$$

Maintenant, décomposons l'intégrale du premier membre de (3) en une somme, soit:

$$\int_0^\infty \varphi(x,t)\, dA(t) = I_1 + I_2 + I_3$$

où I_1, I_2, I_3 correspondent respectivement aux domaines d'intégration $[0, x-\sqrt{x}[$, $[x-\sqrt{x}, x+\sqrt{x}[$ et $[x+\sqrt{x}, +\infty[$.
Une intégration par parties suffit pour majorer $|I_2|$:

$$I_2 = \left[A(t)\,\varphi(x,t)\right]_{x-\sqrt{x}}^{x+\sqrt{x}} - \int_{x-\sqrt{x}}^{x+\sqrt{x}} A(t)\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t)\,dt$$

$$= \left[\left(A(t) - A(x)\right)\varphi(x,t)\right]_{x-\sqrt{x}}^{x+\sqrt{x}} + \int_{x-\sqrt{x}}^{x+\sqrt{x}} \left(A(x) - A(t)\right)\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t)\,dt\,;$$

la conclusion $I_2 = o(1)$ découle alors de (6) et de la majoration

$$\sup_{|t-x| \leq \sqrt{x}} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t)\right| = O\left(\frac{1}{x}\right)$$

qui est une conséquence des assertions (i) et (ii) du lemme 1.

Pour majorer $|I_1 + I_3|$, définissons une suite $(x_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ de nombres réels par les formules:

$$x_o = x$$
$$x_k = x_{k-1} + \sqrt{x_{k-1}} \qquad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

on vérifie facilement l'inégalité

$$x + k\sqrt{x} \leqslant x_k \leqslant x\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k \qquad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Un réel ξ étant donné dans l'intervalle $\left]\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right[$, on pose

$$m = [x^{\xi - \frac{1}{2}}]$$

de sorte que l'on a pour x assez grand

$$x_{\pm m} = x \pm x^{\xi} + O(x^{\frac{1}{3}}).$$

On décompose alors $I_1 + I_3$ en une somme:

$$(8) \qquad I_1 + I_3 = \{\int_0^{x_{-m}} + \int_{x_m}^{\infty}\}\{\varphi(x,t)\,dA(t)\} + \sum_{\substack{-m \leqq k \leqq m-1 \\ k \neq -1,0}} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(x,t)\,dA(t).$$

D'une part on a, quitte à supposer $A(0) = 0$,

$$\{\int_0^{x_{-m}} + \int_{x_m}^{\infty}\}\{\varphi(x,t)\,dA(t)\} = [\varphi(x,t)\,A(t)]_{x_{-m}}^{x_m} - \{\int_0^{x_{-m}} + \int_{x_m}^{+\infty}\}\left\{A(t)\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t)\,dt\right\};$$

d'après l'assertion (i) du lemme 1 et la relation (7) il vient:

$$\varphi(x, x_{\pm m})\,A(x_{\pm m}) = o(1)$$

et d'après l'assertion (iii) du lemme 1 et la relation (7) on a:

$$(9) \quad \left\{\begin{aligned} &\left|\{\int_0^{x_{-m}} + \int_{x_m}^{+\infty}\}\left\{A(t)\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t)\right\}dt\right| \leqslant o(x_{-m})[\varphi(x,t)]_0^{x_{-m}} \\ &\qquad + o\left(\int_{x_m}^{\infty} t\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t)\,dt\right) \\ &= o(x_{-m})\{\varphi(x, x_{-m}) - e^{-x}\} + o\left(x_m\,\varphi(x, x_m) + \int_{x_m}^{\infty}\varphi(x,t)\,dt\right) \\ &= o(1). \end{aligned}\right.$$

D'autre part, puisqu'aucun des x_k ($k = \pm 1, \pm 2, \ldots$) n'appartient à l'intervalle $[x-1, x]$ la formule de la moyenne implique

$$\forall k\,(-m \leqslant k \leqslant m-1, k \neq -1, 0) \;\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(x,t)\,dA(t)\right|$$
$$\leqslant \varphi(x, x_{k+i}) \sup_{x_k \leqslant t \leqslant x_{k+1}} |A(t) - A(x_{k+i})|$$

avec $i = 1$ si $k \geqslant 1$ et $i = 0$ si $k \leqslant -2$.

D'après (6) on a donc:

$$\forall k\,(-m \leqslant k \leqslant m-1, k \neq -1, 0) \;\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(x,t)\,dA(t)\right|$$
$$= o\left(\sqrt{x}\,\varphi(x, x_{k+i})\right)$$

d'où, en utilisant l'assertion (i) du lemme 1,

$$\sum_{\substack{-m \leqslant k \leqslant m-1 \\ k \neq -1,0}} \left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(x,t)\,dA(t)\right| \tag{10}$$
$$= o\left(\sum_{\substack{-m \leqslant k \leqslant m-1 \\ k \neq -1,0}} \exp\left\{-\frac{k^2}{2}(1+o(1))\right\}\right)$$
$$= o(1)\,.$$

En reportant (10) et (9) dans (8), on obtient $I_1 + I_3 = o(1)$, ce qui achève la démonstration.

5. Le résultat taubérien

Dans cette section, nous nous proposons d'établir le théorème 4. Nous supposerons, dans toute la démonstration, A réelle et croissante; grâce au théorème 3, le cas général se déduit aisément de ce pas particulier.

Nous noterons $\mathscr{V}_+$ l'ensemble des fonctions réelles croissantes, définies sur l'ensemble des réels positifs ou nuls et prolongées par 0 sur l'ensemble des réels négatifs.

Les méthodes de démonstration que nous utiliserons sont fondées sur des idées de Hardy et Littlewood ([6], [7]) dont on trouvera un exposé dans le chapitre 9 de [5]. En particulier, le point crucial consiste à appliquer au bon moment le théorème de Vitali, que nous énonçons pour mémoire: