

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 26 (1980)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE PROCÉDÉ DE SOMMATION DE BOREL ET LA RÉPARTITION DU NOMBRE DES FACTEURS PREMIERS DES ENTIERS
Autor: Tenenbaum, Gérald
Kapitel: 3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-51071>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

elle est croissante sur l'intervalle $[0, t(x)[$ et décroissante sur l'intervalle $]t(x), +\infty[$.

(iv) pour tout réel ξ satisfaisant à l'inégalité $\frac{1}{2} < \xi < \frac{2}{3}$ et tout réel positif ε , on a :

$$\int_{|t-x|>x^\xi} \varphi(x, t) dt = O(\exp \{-x^{2\xi-1-\varepsilon}\})$$

(v) on a pour x infini

$$\int_0^\infty \varphi(x, t) dt = 1 + O(e^{-x}).$$

3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2

E et g gardant la même signification que dans l'énoncé du théorème 1, posons pour x réel positif et m entier

$$y = y(x) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \in E}} \frac{1}{p}$$

et

$$N(m, x) = \text{card} \{n \leq x : g(n) = m\}.$$

Halász a démontré dans [4] que l'on a, sous la seule hypothèse $y(x) \rightarrow +\infty$, pour tout réel δ satisfaisant à $0 < \delta \leq 1$,

$$(4) \quad N(m, x) = x \varphi(y, m) \left\{ 1 + O\left(\frac{|m-y|}{y}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right) \right\},$$

uniformément pour $\delta \leq \frac{m}{y} \leq 2 - \delta$ et $y \geq 2$.

Notant $\mathcal{B} = g^{-1}(\mathcal{A})$, on a pour tout x positif

$$B(x) := \text{card} \{n \leq x : n \in \mathcal{B}\} = \sum_{m \in \mathcal{A}} N(m, x).$$

Fixons alors un nombre réel ξ dans l'intervalle $\left] \frac{1}{2}, \frac{2}{3} \right[$, on a :

$$(5) \quad B(x) = \sum_{\substack{m \in \mathcal{A} \\ |m-y| \leq y^\xi}} N(m, x) + O\left(\sum_{|m-y| > y^\xi} N(m, x)\right).$$

Dans le cas particulier où \mathcal{A} est la suite de tous les entiers on a d'une part $B(x) = [x]$ et d'autre part, compte tenu de (4),

$$\begin{aligned} \sum_{|m-y| \leq y^\xi} N(m, x) &= x \left(1 + O \left(\frac{1}{y^{1-\xi}} \right) \right) \sum_{|m-y| \leq y^\xi} \varphi(y, m) \\ &= x \left(1 + O \left(\frac{1}{y^{1-\xi}} \right) \right) \left(\int_{|t-y| \leq y^\xi} \varphi(y, t) dt + O \left(\frac{1}{\sqrt{y}} \right) \right) \\ &= x \left(1 + O \left(\frac{1}{y^{1-\xi}} \right) \right), \end{aligned}$$

en vertu des assertions (iv) et (v) du lemme 1. Cela montre que pour toute suite \mathcal{A} le terme reste de (5) est majoré par

$$[x] - x \left(1 + O \left(\frac{1}{y^{1-\xi}} \right) \right) = o(x).$$

En reportant dans (5) et en utilisant (4) on obtient

$$\begin{aligned} \frac{B(x)}{x} &= \left(1 + O \left(\frac{1}{y^{1-\xi}} \right) \right) \sum_{\substack{m \in \mathcal{A} \\ |m-y| \leq y^\xi}} \varphi(y, m) + o(1) \\ &= (1 + o(1)) \left(\int_0^\infty \varphi(y, t) dA(t) + o(1) \right) + o(1) \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration du théorème 2.

4. LE RÉSULTAT ABÉLIEN

Le lemme suivant, dont la démonstration nous a été suggérée par H. Delange, nous sera utile.

LEMME 2. *Soit A une fonction mesurable complexe vérifiant (1). Alors la relation (1) a lieu uniformément en c sur tout compact.*

Démonstration. On peut supposer sans restreindre la généralité que l'on a $\alpha = 0$ dans (1).