Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 26 (1980)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE PROCÉDÉ DE SOMMATION DE BOREL ET LA RÉPARTITION DU NOMBRE DES FACTEURS PREMIERS DES ENTIERS

Autor: Tenenbaum, Gérald

Kapitel: 2. Un lemme utile

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-51071

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

Download PDF: 22.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Le théorème suivant montre que la restriction $a_n \geqslant -\lambda$ à laquelle est assujettie l'implication (B) $\Rightarrow$ (C) est optimale.

THÉORÈME 5. *Pour toute fonction réelle* $t \mapsto \psi(t)$ *tendant vers l'infini il existe une suite réelle* (a_n) *satisfaisant aux trois propriétés suivantes :*

(a) $(\forall n \in \mathbf{N})\ |a_n| \leqslant \psi(n)$

(b) (a_n) *tend vers* 0 *au sens de Borel*

(c) *Pour toute constante positive* c *l'expression* $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \sum\limits_{x \leqq n < x + c\sqrt{x}} a_n$ *ne tend pas vers* 0 *lorsque* x *tend vers l'infini.*

2. UN LEMME UTILE

Pour tout couple (x, t) de réels positifs, nous posons:

$$\varphi(x, t) = e^{-x} \frac{x^t}{\Gamma(t+1)}.$$

L'énoncé ci-dessous rassemble les principales propriétés de la fonction $\varphi(x, t)$. La démonstration, utilisant la formule de Stirling et d'autres résultats classiques concernant la fonction Γ, est laissée au lecteur.

LEMME 1.

(i) *pour* $x > 0$ *et* $|t - x| \leqslant x^{2/3}$, *on a :*

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp\left\{-\frac{(t-x)^2}{2x}\right\} \left(1 + O\left(\frac{1+|t-x|}{x}\right) + O\left(\frac{|t-x|^3}{x^2}\right)\right)$$

(ii) *pour* $x > 0$ *et* $|t - x| \leqslant \dfrac{x}{2}$ *on a*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) = O\left(\frac{1+|t-x|}{x} \cdot \varphi(x, t)\right)$$

(iii) *pour tout réel positif* x, *la fonction partielle* $t \mapsto \varphi(x, t)$ *est positive et atteint son maximum absolu en un point* $t(x)$ *de l'intervalle* $[x - 1, x]$;

elle est croissante sur l'intervalle $[0, t(x)[$ *et décroissante sur l'intervalle* $]t(x), +\infty[$.

(iv) *pour tout réel* ξ *satisfaisant à l'inégalité* $\frac{1}{2} < \xi < \frac{2}{3}$ *et tout réel positif* ε, *on a :*

$$\int_{|t-x|>x^{\xi}} \varphi(x,t)\,dt = O(\exp\{-x^{2\xi-1-\varepsilon}\})$$

(v) *on a pour* x *infini*

$$\int_0^{\infty} \varphi(x,t)\,dt = 1 + O(e^{-x}).$$

3. Démonstration du théorème 2

E et g gardant la même signification que dans l'énoncé du théorème 1, posons pour x réel positif et m entier

$$y = y(x) = \sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \in E}} \frac{1}{p}$$

et

$$N(m,x) = \operatorname{card}\{n \leqslant x : g(n) = m\}.$$

Halàsz a démontré dans [4] que l'on a, sous la seule hypothèse $y(x) \to +\infty$, pour tout réel δ satisfaisant à $0 < \delta \leqslant 1$,

$$(4) \qquad N(m,x) = x\,\varphi(y,m)\left\{1 + O\left(\frac{|m-y|}{y}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)\right\},$$

uniformément pour $\delta \leqslant \frac{m}{y} \leqslant 2 - \delta$ et $y \geqslant 2$.

Notant $\mathscr{B} = g^{-1}(\mathscr{A})$, on a pour tout x positif

$$B(x) := \operatorname{card}\{n \leqslant x : n \in \mathscr{B}\} = \sum_{m \in \mathscr{A}} N(m,x).$$

Fixons alors un nombre réel ξ dans l'intervalle $\left]\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right[$, on a:

$$(5) \qquad B(x) = \sum_{\substack{m \in \mathscr{A} \\ |m-y| \leqslant y^{\xi}}} N(m,x) + O\Big(\sum_{|m-y|>y^{\xi}} N(m,x)\Big).$$