

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 26 (1980)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LE PROCÉDÉ DE SOMMATION DE BOREL ET LA RÉPARTITION DU NOMBRE DES FACTEURS PREMIERS DES ENTIERS  
**Autor:** Tenenbaum, Gérald  
**Kapitel:** 1. Introduction  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-51071>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 24.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# SUR LE PROCÉDÉ DE SOMMATION DE BOREL ET LA RÉPARTITION DU NOMBRE DES FACTEURS PREMIERS DES ENTIERS

par Gérald TENENBAUM

## 1. INTRODUCTION

Soit  $E$  un ensemble non vide de nombres premiers. Pour tout entier naturel positif  $n$ , désignons par  $\Omega_E(n)$  et par  $\omega_E(n)$  le nombre des facteurs premiers de  $n$  qui appartiennent à  $E$ , comptés respectivement avec et sans leur ordre de multiplicité. Dans le cas où  $E$  est l'ensemble de tous les nombres premiers nous écrivons  $\Omega_E(n) = \Omega(n)$  et  $\omega_E(n) = \omega(n)$ .

Pour toute suite d'entiers  $\mathcal{A}$ , nous notons  $A$  la fonction sommatoire définie par

$$(\forall x \in \mathbf{R}) \quad A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \text{card } \{n \leq x : n \in \mathcal{A}\} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Enfin, étant données une suite d'entiers  $\mathcal{A}$  et une fonction arithmétique à valeurs entières  $g$ , nous notons

$$g^{-1}(\mathcal{A}) = \{n \in \mathbf{N} \setminus \{0\} : g(n) \in \mathcal{A}\}$$

la suite croissante des entiers positifs  $n$  tels que  $g(n)$  appartienne à  $\mathcal{A}$ .

Hubert Delange a montré dans [1] que, si  $\mathcal{A}$  est une progression arithmétique et si  $g = \Omega$  ou  $\omega$ , alors  $g^{-1}(\mathcal{A})$  possède une densité naturelle qui est celle de  $\mathcal{A}$ <sup>1)</sup>. Jean-Marc Deshouillers [3] a généralisé ce résultat au cas où la suite  $\mathcal{A}$  vérifie

$$A(x) = \alpha x + o(\sqrt{x})$$

---

<sup>1)</sup> Dans le cas de la fonction  $\Omega$ , ce résultat avait déjà été établi par S. S. Pillai « Generalization of a theorem of Mangoldt » *Proc. Indian Acad. Sc. Sect. A*, 11 (1940), 13-20.

pour un certain  $\alpha$  de l'intervalle  $[0, 1]$ . Il a également montré, dans le cas où  $\mathcal{A}$  est de densité inférieure nulle, que  $\Omega^{-1}(\mathcal{A})$  ou  $\omega^{-1}(\mathcal{A})$  possède une densité (nécessairement nulle) si et seulement si l'on a

$$(\forall c > 0) \quad A(x + c\sqrt{x}) = A(x) + o(\sqrt{x}).$$

Nous nous proposons d'étendre ces résultats de la manière suivante:

THÉORÈME 1. *Soit  $E$  un ensemble de nombres premiers tel que*

$$\sum_{p \in E} \frac{1}{p} = +\infty.$$

*On pose  $g = \Omega_E$  ou  $g = \omega_E$ .*

*Alors, une condition nécessaire et suffisante sur la suite  $\mathcal{A}$  pour que  $g^{-1}(\mathcal{A})$  possède une densité naturelle est l'existence d'un réel  $\alpha$  de  $[0, 1]$  tel que*

$$(1) \quad (\forall c > 0) \quad A(x + c\sqrt{x}) - A(x) = c\alpha\sqrt{x} + o(\sqrt{x}).$$

*De plus, dans ce cas, les suites  $\mathcal{A}$  et  $g^{-1}(\mathcal{A})$  ont pour densité  $\alpha$ .*

Rappelons qu'une suite complexe  $(a_n)_{n \geq 0}$  converge vers un nombre complexe  $\alpha$  au sens de Borel si l'on a pour  $x$  infini

$$(2) \quad e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = \alpha + o(1).$$

En posant, pour  $x \geq 0$ ,

$$A(x) = \sum_{n \leq x} a_n,$$

on voit que la relation (2) équivaut à la relation

$$(3) \quad e^{-x} \int_0^{\infty} \frac{x^t}{\Gamma(t+1)} dA(t) = \alpha + o(1)$$

où  $\Gamma$  désigne la fonction eulérienne.

Moins par souci de généralité que de commodité et clarté d'exposition, nous avons préféré le cadre de l'intégrale de Stieltjes à celui des séries. Ainsi, l'espace des suites complexes disparaîtra-t-il au profit de celui des

fonctions à valeurs complexes et à variation bornée sur tout intervalle borné (nous noterons  $\mathcal{V}$  cet espace fonctionnel) et la notion de convergence au sens de Borel sera-t-elle utilisée sous la forme (3).

La première étape de la preuve du théorème 1 consiste à remarquer que l'existence d'une densité naturelle  $\alpha$  pour  $g^{-1}(\mathcal{A})$  équivaut à la convergence vers  $\alpha$  au sens de Borel de la fonction caractéristique de  $\mathcal{A}$ , ce que nous énonçons sous la forme suivante:

**THÉORÈME 2.** *Si  $E$ ,  $g$  et  $\mathcal{A}$  gardent la même signification que dans l'énoncé du théorème 1, alors la relation (3) est une condition nécessaire et suffisante pour que la suite  $g^{-1}(\mathcal{A})$  possède la densité  $\alpha$ .*

On voit maintenant que le théorème 1 est une conséquence de l'équivalence des conditions (1) et (3) pour toute fonction  $A$  de la forme  $A(x) = \sum_{n \leq x} a_n$  où  $a_n$  vaut 0 ou 1.

En supposant seulement la suite  $(a_n)$  bornée, H. Delange [2] a trouvé de ce résultat une démonstration courte et élégante utilisant la densité dans  $L^1(\mathbf{R})$  du sous-espace vectoriel engendré par la famille des fonctions  $u \mapsto \exp \left\{ -\frac{1}{2}(u-h)^2 \right\}$ ,  $h$  décrivant  $\mathbf{R}$ . De plus il a remarqué que l'on peut déduire l'équivalence de (1) et (3):

- pour la fonction sommatoire d'une suite  $(a_n)$  bornée, d'un théorème taubérien général de Karamata (cf. [9], théorème II, page 127, appliqué avec  $A(t) = e^{\sqrt{t}}$ )
- pour la fonction sommatoire d'une suite  $(a_n)$  majorée ou minorée, d'un résultat de Wiener et Martin (cf. [12], théorèmes 1 et 2 appliqués avec  $F(x) = e^x$  et en remplaçant  $a_n$  par  $\frac{a_n}{n!}$ ) utilisant un théorème taubérien de Wiener [11].

Nous avons obtenu les résultats suivants par une méthode directe, inspirée pour la partie taubérienne de celle de Hardy et Littlewood dans [6].

**THÉORÈME 3.** *Pour toute fonction  $A$  de  $\mathcal{V}$  la relation (1) implique la relation (3).*

**THÉORÈME 4.** *Soit  $A$  une fonction de  $\mathcal{V}$ .*

*S'il existe un nombre complexe  $\beta$  et une fonction  $x \mapsto B(x)$  satisfaisant à la relation*

$$(\forall c > 0) \quad B(x + c\sqrt{x}) - B(x) = c\beta\sqrt{x} + o(\sqrt{x})$$

*tels que la fonction  $x \mapsto A(x) + B(x)$  soit à parties réelle et imaginaire monotones, alors la relation (3) implique la relation (1).*

Remarquons que la classe des fonctions  $x \mapsto B(x)$  satisfaisant à la condition du théorème 4 est assez étendue; elle contient en effet toutes les fonctions du type

$$B(x) = B_1(x) + o(\sqrt{x})$$

où  $B_1$  est une fonction dérivable telle que, quand  $x$  tend vers l'infini,

$$B_1'(x) = \beta + o(1).$$

Dans le cas où  $A$  est la fonction sommatoire d'une suite  $a_n$ , on obtient, en prenant  $B(x) = \lambda[x]$ , le corollaire suivant qui, associé aux théorèmes 2 et 3, implique le théorème 1.

**COROLLAIRE.** *Soit  $(a_n)$  une suite de nombres réels. S'il existe un nombre réel  $\lambda$  tel que l'on ait pour  $n$  assez grand*

$$a_n \geq -\lambda$$

*et si  $(a_n)$  tend vers  $\alpha$  au sens de Borel, soit*

$$(B) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = \alpha$$

*alors on a*

$$(C) \quad (\forall c > 0) \quad \sum_{x \leq n < x + c\sqrt{x}} a_n = c\alpha\sqrt{x} + o(\sqrt{x}).$$

Il était connu depuis longtemps (voir [6]) que la condition

$$\sum_{n \leq x} a_n = \alpha x + o(\sqrt{x})$$

(qui implique (C)) est suffisante pour assurer la convergence de  $(a_n)$  vers  $\alpha$  au sens de Borel. Cependant, nous n'avons trouvé nulle part, dans la littérature consacrée à ce sujet, explicitement énoncé, un théorème d'équivalence des conditions (B) et (C).

Le théorème suivant montre que la restriction  $a_n \geq -\lambda$  à laquelle est assujettie l'implication (B)  $\Rightarrow$  (C) est optimale.

THÉORÈME 5. Pour toute fonction réelle  $t \mapsto \psi(t)$  tendant vers l'infini il existe une suite réelle  $(a_n)$  satisfaisant aux trois propriétés suivantes :

- (a)  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |a_n| \leq \psi(n)$
- (b)  $(a_n)$  tend vers 0 au sens de Borel
- (c) Pour toute constante positive  $c$  l'expression  $\frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{x \leq n < x + c\sqrt{x}} a_n$  ne tend pas vers 0 lorsque  $x$  tend vers l'infini.

## 2. UN LEMME UTILE

Pour tout couple  $(x, t)$  de réels positifs, nous posons :

$$\varphi(x, t) = e^{-x} \frac{x^t}{\Gamma(t+1)}.$$

L'énoncé ci-dessous rassemble les principales propriétés de la fonction  $\varphi(x, t)$ . La démonstration, utilisant la formule de Stirling et d'autres résultats classiques concernant la fonction  $\Gamma$ , est laissée au lecteur.

LEMME 1.

(i) pour  $x > 0$  et  $|t - x| \leq x^{2/3}$ , on a :

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp \left\{ -\frac{(t-x)^2}{2x} \right\} \left( 1 + O\left(\frac{1+|t-x|}{x}\right) + O\left(\frac{|t-x|^3}{x^2}\right) \right)$$

(ii) pour  $x > 0$  et  $|t - x| \leq \frac{x}{2}$  on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) = O\left(\frac{1+|t-x|}{x} \cdot \varphi(x, t)\right)$$

(iii) pour tout réel positif  $x$ , la fonction partielle  $t \mapsto \varphi(x, t)$  est positive et atteint son maximum absolu en un point  $t(x)$  de l'intervalle  $[x-1, x]$ ;