Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 26 (1980)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE PROCÉDÉ DE SOMMATION DE BOREL ET LA RÉPARTITION DU NOMBRE DES FACTEURS PREMIERS DES ENTIERS

Autor: Tenenbaum, Gérald

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-51071

SUR LE PROCÉDÉ DE SOMMATION DE BOREL ET LA RÉPARTITION DU NOMBRE DES FACTEURS PREMIERS DES ENTIERS

par Gérald TENENBAUM

1. INTRODUCTION

Soit E un ensemble non vide de nombres premiers. Pour tout entier naturel positif n, désignons par $\Omega_E(n)$ et par $\omega_E(n)$ le nombre des facteurs premiers de n qui appartiennent à E, comptés respectivement avec et sans leur ordre de multiplicité. Dans le cas où E est l'ensemble de tous les nombres premiers nous écrivons $\Omega_E(n) = \Omega(n)$ et $\omega_E(n) = \omega(n)$.

Pour toute suite d'entiers $\mathscr{A}$, nous notons A la fonction sommatoire définie par

$$(\forall x \in \mathbf{R}) \qquad A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \operatorname{card}\{n \leqslant x : n \in \mathscr{A}\} & \text{si} \quad x \geqslant 0 . \end{cases}$$

Enfin, étant données une suite d'entiers $\mathscr{A}$ et une fonction arithmétique à valeurs entières g, nous notons

$$g^{-1}(\mathscr{A}) = \{n \in \mathbf{N} \setminus \{0\} : g(n) \in \mathscr{A}\}$$

la suite croissante des entiers positifs n tels que $g(n)$ appartienne à $\mathscr{A}$.

Hubert Delange a montré dans [1] que, si $\mathscr{A}$ est une progression arithmétique et si $g = \Omega$ ou ω, alors $g^{-1}(\mathscr{A})$ possède une densité naturelle qui est celle de $\mathscr{A}$ [1]). Jean-Marc Deshouillers [3] a généralisé ce résultat au cas où la suite $\mathscr{A}$ vérifie

$$A(x) = \alpha x + o(\sqrt{x})$$

---

[1]) Dans le cas de la fonction Ω, ce résultat avait déjà été établi par S. S. Pillai « Generalization of a theorem of Mangoldt » *Proc. Indian Acad. Sc. Sect. A*, *11* (1940), 13-20.

pour un certain α de l'intervalle [0, 1]. Il a également montré, dans le cas où $\mathscr{A}$ est de densité inférieure nulle, que $\Omega^{-1}(\mathscr{A})$ ou $\omega^{-1}(\mathscr{A})$ possède une densité (nécessairement nulle) si et seulement si l'on a

$$(\forall c > 0) \qquad A(x + c\sqrt{x}) = A(x) + o(\sqrt{x}).$$

Nous nous proposons d'étendre ces résultats de la manière suivante:

THÉORÈME 1. *Soit E un ensemble de nombres premiers tel que*

$$\sum_{p \in E} \frac{1}{p} = +\infty.$$

On pose $g = \Omega_E$ ou $g = \omega_E$.

Alors, une condition nécessaire et suffisante sur la suite $\mathscr{A}$ pour que $g^{-1}(\mathscr{A})$ possède une densité naturelle est l'existence d'un réel α de [0 ,1] tel que

$$(1) \qquad (\forall c > 0) \qquad A(x + c\sqrt{x}) - A(x) = c\,\alpha\sqrt{x} + o(\sqrt{x}).$$

De plus, dans ce cas, les suites $\mathscr{A}$ et $g^{-1}(\mathscr{A})$ ont pour densité α.

Rappelons qu'une suite complexe $(a_n)_{n \geq 0}$ converge vers un nombre complexe α au sens de Borel si l'on a pour x infini

$$(2) \qquad e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = \alpha + o(1).$$

En posant, pour $x \geqslant 0$,

$$A(x) = \sum_{n \leq x} a_n,$$

on voit que la relation (2) équivaut à la relation

$$(3) \qquad e^{-x} \int_0^{\infty} \frac{x^t}{\Gamma(t+1)} dA(t) = \alpha + o(1)$$

où Γ désigne la fonction eulérienne.

Moins par souci de généralité que de commodité et clarté d'exposition, nous avons préféré le cadre de l'intégrale de Stieltjes à celui des séries. Ainsi, l'espace des suites complexes disparaîtra-t-il au profit de celui des fonctions à valeurs complexes et à variation bornée sur tout intervalle borné (nous noterons $\mathscr{V}$ cet espace fonctionnel) et la notion de convergence au sens de Borel sera-t-elle utilisée sous la forme (3).

La première étape de la preuve du théorème 1 consiste à remarquer que l'existence d'une densité naturelle α pour $g^{-1}(\mathscr{A})$ équivaut à la convergence vers α au sens de Borel de la fonction caractéristique de $\mathscr{A}$, ce que nous énonçons sous la forme suivante:

THÉORÈME 2. *Si E, g et $\mathscr{A}$ gardent la même signification que dans l'énoncé du théorème 1, alors la relation* (3) *est une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $g^{-1}(\mathscr{A})$ possède la densité α.*

On voit maintenant que le théorème 1 est une conséquence de l'équivalence des conditions (1) et (3) pour toute fonction A de la forme $A(x) = \sum_{n \leq x} a_n$ où a_n vaut 0 ou 1.

En supposant seulement la suite (a_n) bornée, H. Delange [2] a trouvé de ce résultat une démonstration courte et élégante utilisant la densité dans $L^1(\mathbf{R})$ du sous-espace vectoriel engendré par la famille des fonctions $u \mapsto \exp\left\{-\frac{1}{2}(u-h)^2\right\}$, h décrivant $\mathbf{R}$. De plus il a remarqué que l'on peut déduire l'équivalence de (1) et (3):

- pour la fonction sommatoire d'une suite (a_n) bornée, d'un théorème taubérien général de Karamata (cf. [9], théorème II, page 127, appliqué avec $A(t) = e^{\sqrt{t}}$)
- pour la fonction sommatoire d'une suite (a_n) majorée ou minorée, d'un résultat de Wiener et Martin (cf. [12], théorèmes 1 et 2 appliqués avec $F(x) = e^x$ et en remplaçant a_n par $\frac{a_n}{n!}$) utilisant un théorème taubérien de Wiener [11].

Nous avons obtenu les résultats suivants par une méthode directe, inspirée pour la partie taubérienne de celle de Hardy et Littlewood dans [6].

THÉORÈME 3. *Pour toute fonction A de $\mathscr{V}$ la relation* (1) *implique la relation* (3).

THÉORÈME 4. *Soit A une fonction de $\mathscr{V}$.*

S'il existe un nombre complexe β *et une fonction* $x \mapsto B(x)$ *satisfaisant à la relation*

$$(\forall c > 0) \qquad B(x + c\sqrt{x}) - B(x) = c\beta\sqrt{x} + o(\sqrt{x})$$

tels que la fonction $x \mapsto A(x) + B(x)$ *soit à parties réelle et imaginaire monotones, alors la relation* (3) *implique la relation* (1).

Remarquons que la classe des fonctions $x \mapsto B(x)$ satisfaisant à la condition du théorème 4 est assez étendue; elle contient en effet toutes les fonctions du type

$$B(x) = B_1(x) + o(\sqrt{x})$$

où B_1 est une fonction dérivable telle que, quand x tend vers l'infini,

$$B_1'(x) = \beta + o(1).$$

Dans le cas où A est la fonction sommatoire d'une suite a_n, on obtient, en prenant $B(x) = \lambda\,[x]$, le corollaire suivant qui, associé aux théorèmes 2 et 3, implique le théorème 1.

COROLLAIRE. *Soit* (a_n) *une suite de nombres réels. S'il existe un nombre réel* λ *tel que l'on ait pour* n *assez grand*

$$a_n \geqslant -\lambda$$

et si (a_n) *tend vers* α *au sens de Borel, soit*

$$(B) \qquad \lim_{x \to \infty} e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = \alpha$$

alors on a

$$(C) \qquad (\forall c > 0) \quad \sum_{x \leq n < x + c\sqrt{x}} a_n = c\,\alpha\sqrt{x} + o(\sqrt{x}).$$

Il était connu depuis longtemps (voir [6]) que la condition

$$\sum_{n \leq x} a_n = \alpha x + o(\sqrt{x})$$

(qui implique (C)) est suffisante pour assurer la convergence de (a_n) vers α au sens de Borel. Cependant, nous n'avons trouvé nulle part, dans la littérature consacrée à ce sujet, explicitement énoncé, un théorème d'équivalence des conditions (B) et (C).

Le théorème suivant montre que la restriction $a_n \geqslant -\lambda$ à laquelle est assujettie l'implication (B) $\Rightarrow$ (C) est optimale.

Théorème 5. *Pour toute fonction réelle* $t \mapsto \psi(t)$ *tendant vers l'infini il existe une suite réelle* (a_n) *satisfaisant aux trois propriétés suivantes :*

(a) $(\forall n \in \mathbf{N}) \; |a_n| \leqslant \psi(n)$

(b) (a_n) *tend vers* 0 *au sens de Borel*

(c) *Pour toute constante positive* c *l'expression* $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \displaystyle\sum_{x \leqq n < x + c\sqrt{x}} a_n$ *ne tend pas vers* 0 *lorsque* x *tend vers l'infini.*

2. Un lemme utile

Pour tout couple (x, t) de réels positifs, nous posons:

$$\varphi(x, t) = e^{-x} \frac{x^t}{\Gamma(t+1)}.$$

L'énoncé ci-dessous rassemble les principales propriétés de la fonction $\varphi(x, t)$. La démonstration, utilisant la formule de Stirling et d'autres résultats classiques concernant la fonction Γ, est laissée au lecteur.

Lemme 1.

(i) *pour* $x > 0$ *et* $|t - x| \leqslant x^{2/3}$, *on a :*

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp\left\{-\frac{(t-x)^2}{2x}\right\} \left(1 + O\left(\frac{1+|t-x|}{x}\right) + O\left(\frac{|t-x|^3}{x^2}\right)\right)$$

(ii) *pour* $x > 0$ *et* $|t - x| \leqslant \frac{x}{2}$ *on a*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) = O\left(\frac{1+|t-x|}{x} \cdot \varphi(x, t)\right)$$

(iii) *pour tout réel positif* x, *la fonction partielle* $t \mapsto \varphi(x, t)$ *est positive et atteint son maximum absolu en un point* $t(x)$ *de l'intervalle* $[x-1, x]$;

elle est croissante sur l'intervalle $[0, t(x)[$ *et décroissante sur l'intervalle* $]t(x), +\infty[$.

(iv) *pour tout réel* ξ *satisfaisant à l'inégalité* $\frac{1}{2} < \xi < \frac{2}{3}$ *et tout réel positif* ε, *on a:*

$$\int_{|t-x|>x^{\xi}} \varphi(x,t)\,dt = O(\exp\{-x^{2\xi-1-\varepsilon}\})$$

(v) *on a pour* x *infini*

$$\int_0^{\infty} \varphi(x,t)\,dt = 1 + O(e^{-x}).$$

3. Démonstration du théorème 2

E et g gardant la même signification que dans l'énoncé du théorème 1, posons pour x réel positif et m entier

$$y = y(x) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \in E}} \frac{1}{p}$$

et

$$N(m,x) = \operatorname{card}\{n \leqslant x : g(n) = m\}.$$

Halàsz a démontré dans [4] que l'on a, sous la seule hypothèse $y(x) \to +\infty$, pour tout réel δ satisfaisant à $0 < \delta \leqslant 1$,

$$N(m,x) = x\,\varphi(y,m)\left\{1 + O\left(\frac{|m-y|}{y}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)\right\}, \tag{4}$$

uniformément pour $\delta \leqslant \frac{m}{y} \leqslant 2 - \delta$ et $y \geqslant 2$.

Notant $\mathscr{B} = g^{-1}(\mathscr{A})$, on a pour tout x positif

$$B(x) := \operatorname{card}\{n \leqslant x : n \in \mathscr{B}\} = \sum_{m \in \mathscr{A}} N(m,x).$$

Fixons alors un nombre réel ξ dans l'intervalle $\left]\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right[$, on a:

$$B(x) = \sum_{\substack{m \in \mathscr{A} \\ |m-y| \leq y^{\xi}}} N(m,x) + O\Big(\sum_{|m-y|>y^{\xi}} N(m,x)\Big). \tag{5}$$

Dans le cas particulier où $\mathscr{A}$ est la suite de tous les entiers on a d'une part $B(x) = [x]$ et d'autre part, compte tenu de (4),

$$\begin{aligned}\sum_{|m-y|\leq y^\xi} N(m,x) &= x\left(1+O\left(\frac{1}{y^{1-\xi}}\right)\right) \sum_{|m-y|\leq y^\xi} \varphi(y,m)\\ &= x\left(1+O\left(\frac{1}{y^{1-\xi}}\right)\right)\left(\int_{|t-y|\leq y^\xi} \varphi(y,t)\,dt + O\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)\right)\\ &= x\left(1+O\left(\frac{1}{y^{1-\xi}}\right)\right),\end{aligned}$$

en vertu des assertions (iv) et (v) du lemme 1. Cela montre que pour toute suite $\mathscr{A}$ le terme reste de (5) est majoré par

$$[x] - x\left(1+O\left(\frac{1}{y^{1-\xi}}\right)\right) = o(x)\,.$$

En reportant dans (5) et en utilisant (4) on obtient

$$\begin{aligned}\frac{B(x)}{x} &= \left(1+O\left(\frac{1}{y^{1-\xi}}\right)\right) \sum_{\substack{m\in\mathscr{A}\\ |m-y|\leq y^\xi}} \varphi(y,m) + o(1)\\ &= (1+o(1))\left(\int_0^\infty \varphi(y,t)\,dA(t) + o(1)\right) + o(1)\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration du théorème 2.

4. Le résultat abélien

Le lemme suivant, dont la démonstration nous a été suggérée par H. Delange, nous sera utile.

Lemme 2. *Soit* A *une fonction mesurable complexe vérifiant* (1). *Alors la relation* (1) *a lieu uniformément en* c *sur tout compact.*

Démonstration. On peut supposer sans restreindre la généralité que l'on a $\alpha = 0$ dans (1).

Il suffit de montrer que, pour tout réel positif h, il y a convergence uniforme de $\dfrac{A(x+c\sqrt{x})-A(x)}{\sqrt{x}}$ vers 0 pour $0 \leqslant c \leqslant h$. En effet, la convergence uniforme pour $0 \leqslant c \leqslant h$ implique la convergence uniforme pour $-h' \leqslant c \leqslant 0$ quel que soit $h' \in]0, h[$ du fait que, pour x assez grand on a

$$\forall c\,(-h' \leqslant c \leqslant 0) \qquad x + c\sqrt{x} \leqslant x \leqslant x + c\sqrt{x} + h\sqrt{\ + c\sqrt{x}}$$
$$= x + (h+c)\sqrt{x} + O(1)\,.$$

Fixons donc deux réels positifs h et ε.

Pour tout $x > 0$ on désigne par I_x l'intervalle $[x, x + 2h\sqrt{x}]$ et par E_x l'ensemble des t de I_x satisfaisant à

$$|A(t) - A(x)| > \frac{\varepsilon}{1+\sqrt{2}}\sqrt{x}\,.$$

On note E_x^* l'ensemble des réels c de $[0, 2h]$ satisfaisant à

$$|A(x+c\sqrt{x}) - A(x)| > \frac{\varepsilon}{1+\sqrt{2}}\sqrt{x}\,.$$

Il est clair que E_x et E_x^* sont mesurables et que l'on a, en notant μ la mesure de Lebesgue,

$$\mu(E_x) = \sqrt{x}\,\mu(E_x^*)\,.$$

Maintenant le théorème de Lebesgue sur la convergence dominée appliqué à la fonction caractéristique de E_x^* montre que $\mu(E_x^*) = o(1)$. Il existe donc un réel x_o, que l'on peut supposer $\geqslant h^2$, tel que

$$\forall x\,(x \geqslant x_o) \qquad \mu(E_x) \leqslant \frac{h}{3}\sqrt{x}\,.$$

On voit alors que pour $x \geqslant x_o$ on a:

$$\forall c\,(0 \leqslant c \leqslant h) \qquad \left|\frac{A(x+c\sqrt{x}) - A(x)}{\sqrt{x}}\right| \leqslant \varepsilon\,.$$

En effet, des inégalités

$$\mu(I_x \cap I_{x+c\sqrt{x}}) \geqslant (2h-c)\sqrt{x} \geqslant h\sqrt{x}$$

et

$$\mu(E_x \cup E_{x+c\sqrt{x}}) \leqslant \frac{h}{3}\sqrt{x} + \frac{h}{3}\sqrt{x+h\sqrt{x}} = \frac{h}{3}\sqrt{x}\left(1+\sqrt{1+\frac{h}{\sqrt{x}}}\right)$$

$$\leqslant \frac{h}{3}(1+\sqrt{2})\sqrt{x} < h\sqrt{x}$$

on déduit l'existence d'au moins un t appartenant à $I_x \cap I_{x+c\sqrt{x}}$ et n'appartenant pas à $E_x \cup E_{x+c\sqrt{x}}$. D'après la définition de E_x on obtient

$$|A(t) - A(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{1+\sqrt{2}}\sqrt{x}$$

et

$$|A(t) - A(x+c\sqrt{x})| \leqslant \frac{\varepsilon}{1+\sqrt{2}}\sqrt{x+h\sqrt{x}}$$

d'où

$$|A(x) - A(x+c\sqrt{x})| \leqslant \frac{\varepsilon}{1+\sqrt{2}}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h\sqrt{x}}) \leqslant \varepsilon\sqrt{x}\,.$$

Remarque. La démonstration précédente est une variante de celle qui a été utilisée par Delange [1]) pour établir le fait suivant, déjà signalé par Karamata [2]):

Si A est une fonction à croissance lente, c'est-à-dire satisfaisant à

$$(\forall a \geqslant 1) \qquad \frac{A(ax)}{A(x)} = 1 + o(1)\,,$$

alors cette dernière relation a lieu uniformément en a sur tout compact de $[1, +\infty[$.

Nous pouvons maintenant établir le théorème 3.

Soit, donc, A une fonction de $\mathscr{V}$ satisfaisant à la relation (1). L'assertion (v) du lemme 1 montre que l'on peut, sans restreindre la généralité, supposer $\alpha = 0$, soit

$$(\forall c > 0) \qquad A(x+c\sqrt{x}) - A(x) = o(\sqrt{x})\,.$$

[1]) H. Delange, « Sur un théorème de Karamata », *Bull. Sc. Math. (2) 79* (1955), 1-4.

[2]) J. Karamata, « Sur un mode de croissance régulière des fonctions », *Mathematica 4* (1930), 38-53.

Comme cette relation, d'après le lemme 2, est uniforme en c sur tout compact, nous l'écrirons sous la forme:

$$A\left(x+O\left(\sqrt{x}\right)\right) - A(x) = o\left(\sqrt{x}\right). \tag{6}$$

En particulier, on a:

$$A(x) = \sum_{k \leq \sqrt{x}} A(k^2+k) - A(k^2-k) + o\left(\sqrt{x}\right) = \sum_{k \leq \sqrt{x}} o(k) + o\left(\sqrt{x}\right)$$

d'où:

$$A(x) = o(x). \tag{7}$$

Maintenant, décomposons l'intégrale du premier membre de (3) en une somme, soit:

$$\int_0^\infty \varphi(x,t)\, dA(t) = I_1 + I_2 + I_3$$

où I_1, I_2, I_3 correspondent respectivement aux domaines d'intégration $[0, x-\sqrt{x}[$, $[x-\sqrt{x}, x+\sqrt{x}[$ et $[x+\sqrt{x}, +\infty[$.
Une intégration par parties suffit pour majorer $|I_2|$:

$$I_2 = \left[A(t)\varphi(x,t)\right]_{x-\sqrt{x}}^{x+\sqrt{x}} - \int_{x-\sqrt{x}}^{x+\sqrt{x}} A(t) \frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t)\, dt$$

$$= \left[(A(t) - A(x))\varphi(x,t)\right]_{x-\sqrt{x}}^{x+\sqrt{x}} + \int_{x-\sqrt{x}}^{x+\sqrt{x}} (A(x) - A(t)) \frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t)\, dt\,;$$

la conclusion $I_2 = o(1)$ découle alors de (6) et de la majoration

$$\sup_{|t-x| \leq \sqrt{x}} \left| \frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t) \right| = O\left(\frac{1}{x}\right)$$

qui est une conséquence des assertions (i) et (ii) du lemme 1.

Pour majorer $|I_1 + I_3|$, définissons une suite $(x_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ de nombres réels par les formules:

$$x_o = x$$
$$x_k = x_{k-1} + \sqrt{x_{k-1}} \qquad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

on vérifie facilement l'inégalité

$$x + k\sqrt{x} \leqslant x_k \leqslant x\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k \qquad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Un réel ξ étant donné dans l'intervalle $\left]\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right[$, on pose

$$m = [x^{\xi - \frac{1}{2}}]$$

de sorte que l'on a pour x assez grand

$$x_{\pm m} = x \pm x^{\xi} + O(x^{\frac{1}{3}}).$$

On décompose alors $I_1 + I_3$ en une somme:

$$(8) \qquad I_1 + I_3 = \left\{\int_0^{x_{-m}} + \int_{x_m}^{\infty}\right\}\{\varphi(x,t)\,dA(t)\} + \sum_{\substack{-m \leq k \leq m-1 \\ k \neq -1,0}} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(x,t)\,dA(t).$$

D'une part on a, quitte à supposer $A(0) = 0$,

$$\left\{\int_0^{x_{-m}} + \int_{x_m}^{\infty}\right\}\{\varphi(x,t)\,dA(t)\} = [\varphi(x,t)\,A(t)]_{x_{-m}}^{x_m} - \left\{\int_0^{x_{-m}} + \int_{x_m}^{+\infty}\right\}\left\{A(t)\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t)\,dt\right\};$$

d'après l'assertion (i) du lemme 1 et la relation (7) il vient:

$$\varphi(x, x_{\pm m})\,A(x_{\pm m}) = o(1)$$

et d'après l'assertion (iii) du lemme 1 et la relation (7) on a:

$$(9) \qquad \begin{cases} \left|\left\{\int_0^{x_{-m}} + \int_{x_m}^{+\infty}\right\}\left\{A(t)\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t)\right\}dt\right| \leqslant o(x_{-m})\,[\varphi(x,t)]_0^{x_{-m}} \\ \qquad + o\left(\int_{x_m}^{\infty} t\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t)\,dt\right) \\ = o(x_{-m})\{\varphi(x, x_{-m}) - e^{-x}\} + o\left(x_m\,\varphi(x, x_m) + \int_{x_m}^{\infty} \varphi(x,t)\,dt\right) \\ = o(1). \end{cases}$$

D'autre part, puisqu'aucun des x_k ($k = \pm 1, \pm 2, \ldots$) n'appartient à l'intervalle $[x - 1, x]$ la formule de la moyenne implique

$$\forall k(-m \leqslant k \leqslant m-1, k \neq -1, 0) \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(x, t)\, dA(t) \right|$$
$$\leqslant \varphi(x, x_{k+i}) \sup_{x_k \leq t \leq x_{k+1}} \left| A(t) - A(x_{k+i}) \right|$$

avec $i = 1$ si $k \geqslant 1$ et $i = 0$ si $k \leqslant -2$.

D'après (6) on a donc:

$$\forall k(-m \leqslant k \leqslant m-1, k \neq -1, 0) \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(x, t)\, dA(t) \right|$$
$$= o(\sqrt{x}\, \varphi(x, x_{k+i}))$$

d'où, en utilisant l'assertion (i) du lemme 1,

$$\sum_{\substack{-m \leq k \leq m-1 \\ k \neq -1, 0}} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(x, t)\, dA(t) \right| \tag{10}$$
$$= o\left(\sum_{\substack{-m \leq k \leq m-1 \\ k \neq -1, 0}} \exp\left\{ -\frac{k^2}{2}(1 + o(1)) \right\} \right)$$
$$= o(1)\,.$$

En reportant (10) et (9) dans (8), on obtient $I_1 + I_3 = o(1)$, ce qui achève la démonstration.

5. Le résultat taubérien

Dans cette section, nous nous proposons d'établir le théorème 4. Nous supposerons, dans toute la démonstration, A réelle et croissante; grâce au théorème 3, le cas général se déduit aisément de ce pas particulier.

Nous noterons $\mathscr{V}_+$ l'ensemble des fonctions réelles croissantes, définies sur l'ensemble des réels positifs ou nuls et prolongées par 0 sur l'ensemble des réels négatifs.

Les méthodes de démonstration que nous utiliserons sont fondées sur des idées de Hardy et Littlewood ([6], [7]) dont on trouvera un exposé dans le chapitre 9 de [5]. En particulier, le point crucial consiste à appliquer au bon moment le théorème de Vitali, que nous énonçons pour mémoire:

Soit $\mathcal{O}$ un domaine du plan complexe et (f_n) une famille de fonctions holomorphes sur $\mathcal{O}$, bornée pour la topologie de la convergence sur tout compact de $\mathcal{O}$ et convergeant vers une fonction holomorphe f, définie sur $\mathcal{O}$, sur une suite de points ayant un point d'accumulation dans $\mathcal{O}$. Alors (f_n) converge vers f uniformément sur tout compact de $\mathcal{O}$.

LEMME 3. *Pour toute fonction A de $\mathcal{V}_+$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

$$\int_0^\infty \varphi(x, t)\, dA(t) = \alpha + o(1) \tag{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{h^2}{2}\right\} dA(x + h\sqrt{x}) = \alpha + o(1)\,. \tag{11}$$

Dans [6], Hardy et Littlewood ont montré l'équivalence des conditions (3) et (11) dans le cas où $A(t)$ est la fonction sommatoire d'une suite $a_n = o(\sqrt{n})$; Hyslop [8] a généralisé ce résultat au cas où $a_n = O(n^K)$ pour un réel arbitraire K. Bien que le résultat du lemme 3 ne soit pas une conséquence de ces travaux antérieurs, la démonstration ne met en œuvre aucun moyen nouveau; nous nous contenterons d'exposer les grandes lignes de la preuve de l'implication (3) $\Rightarrow$ (11), le lecteur n'aura aucune peine, s'il le désire, à compléter la démonstration.

Comme la mesure $dA(t)$ est positive on a

$$\int_x^{x+\sqrt{x}} \varphi(x, t)\, dA(t) \leqslant \int_0^\infty \varphi(x, t)\, dA(t) = O(1)\,,$$

et comme, d'après le lemme 1, il existe une constante positive a telle que l'on ait pour x assez grand et t dans $[x, x+\sqrt{x}]$, $\varphi(x, t) \geqslant \frac{a}{\sqrt{x}}$, on voit que

$$A(x+\sqrt{x}) - A(x) = O(\sqrt{x})\,.$$

Maintenant il est facile d'en déduire que l'on a uniformément pour $y \geqslant \sqrt{x}$

$$A(x+y) - A(x) = O(y)\,, \tag{12}$$

et en particulier

$$A(x) = O(x)\,. \tag{13}$$

Soit alors ξ un réel fixé dans l'intervalle $\left]\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right[$; on déduit de (13) et des estimations du lemme 1 la majoration

$$\int_{|t-x|>x^{\xi}} \varphi(x,t)\, dA(t) = o(1)$$

d'où finalement:

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \varphi(x,t)\, dA(t) &= \int_{|t-x|<x^{\xi}} \varphi(x,t)\, dA(t) + o(1)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \int_{|t-x|<x^{\xi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(t-x)^2}{x}\right\} dA(t) + R_1\\ &\quad + R_2 + o(1)\end{aligned}$$

avec

$$R_1 = O\left(\frac{1}{x}\int_{|t-x|<x^{\xi}} \frac{1+|t-x|}{\sqrt{x}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(t-x)^2}{x}\right\} dA(t)\right)$$

et

$$R_2 = O\left(\frac{1}{x}\int_{|t-x|<x^{\xi}} \frac{|t-x|^3}{x^{3/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(t-x)^2}{x}\right\} dA(t)\right).$$

Comme $dA(t)$ est positive et que les fonctions $h \mapsto |h|\, e^{-h^2/2}$ et $h \mapsto |h|^3\, e^{-h^2/2}$ sont bornées sur la droite réelle, on voit que R_1 et R_2 sont $O\left(\frac{A(x+x^{\xi}) - A(x-x^{\xi})}{x}\right)$, c'est-à-dire $o(1)$ d'après (12).

En remarquant finalement que

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\int_{|t-x|>x^{\xi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(t-x)^2}{x}\right\} dA(t) = o(1),$$

on obtient la conclusion souhaitée.

Le résultat suivant est l'analogue d'un théorème de Hardy et Littlewood ([6], théorème 4.3).

LEMME 4. *Soit* A *une fonction de* $\mathscr{V}_+$. *Si l'intégrale*

$$(14) \qquad \hat{A}(y) = y\int_0^{\infty} e^{-ty}\, dA(t)$$

converge pour $y > y_0$, *alors elle définit une fonction analytique de* y *sur l'intervalle* $]y_0, +\infty[$, *on a pour tout* $y > y_0$ *et tout entier non négatif* n

$$\frac{d^n \hat{A}}{dy^n}(y) = \int_0^\infty (-t)^{n-1} e^{-ty}(n - ty)\, dA(t)$$

et, pour tout réel positif k, *les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *l'intégrale* (14) *est convergente pour tout réel positif* y *et l'on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-k)^n}{n!} \frac{d^n A}{dy^n}(k) = \alpha \tag{15}$$

(ii) *on a pour* x *infini*

$$\sqrt{\frac{k}{2\pi x}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{kh^2}{2}\right\} dA(x + h\sqrt{x}) = \alpha + o(1) \tag{16}$$

Démonstration. Les deux premières assertions concernant l'intégrale (14) constituent un résultat classique sur la transformation de Laplace-Stieltjes (voir par exemple Widder [10], chapitre II, §5).

Supposons maintenant que A satisfasse à la condition (i). On a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-k)^n}{n!} \frac{d^n \hat{A}}{dy^n}(k) &= \lim_{\nu \to \infty} \sum_{n=0}^{\nu} \frac{(-k)^n}{n!} \int_0^\infty (-t)^{n-1} e^{-tk}(n - tk)\, dA(t) \\
&= \lim_{\nu \to \infty} k \int_0^\infty e^{-tk} \sum_{n=0}^{\nu} (tk - n) \frac{(kt)^{n-1}}{n!}\, dA(t) \\
&= \lim_{\nu \to \infty} k \int_0^\infty e^{-tk} \left\{ - \sum_{n=1}^{\nu} \frac{(kt)^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{\nu} \frac{(kt)^n}{n!} \right\} dA(t) \\
&= \lim_{\nu \to \infty} k \int_0^\infty e^{-tk} \frac{(kt)^\nu}{\nu!}\, dA(t)\,.
\end{aligned}$$

En posant $\psi(x, t) = k\,\varphi(tk, \nu)$ pour $\nu = [k\,x]$, on voit donc que (15) équivaut à

$$\int_0^\infty \psi(x, t)\, dA(t) = \alpha + o(1)\,. \tag{17}$$

Un réel ξ étant fixé dans l'intervalle $\left]\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right[$, on vérifie que l'on a pour $|t - x| < x^\xi$

$$(18) \qquad \psi(x,t) = \sqrt{\frac{k}{2\pi x}} \exp\left\{-\frac{k}{2}\cdot\frac{(t-x)^2}{x}\right\}\left(1+O\left(\frac{|t-x|^3}{x^2}\right)\right).$$

Comme (17) implique que l'intégrale $\int_x^{x+\sqrt{x}} \psi(x,t)\, dA(t)$ est bornée on en déduit, comme dans la démonstration du lemme 3, la majoration

$$(19) \qquad A(x) = O(x);$$

cela implique

$$\int_{|t-x| \geq x^\xi} \psi(x,t)\, dA(t) = o(1),$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \int_{|t-x| \geq x^\xi} \exp\left\{-\frac{k}{2}\frac{(t-x)^2}{x}\right\} dA(t) = o(1)$$

et finalement (16), en utilisant (18) et le changement de variable $t = x + h\sqrt{x}$.

Pour établir l'implication réciproque (ii) $\Rightarrow$ (i), il suffit de remonter les calculs précédents, après avoir remarqué que (16) implique (19) et donc la convergence de l'intégrale (14) pour tout y positif.

Lemme 5. *Soit A une fonction de $\mathscr{V}_+$.*

Si A vérifie (16) *pour un nombre réel positif k, il en est de même pour tout nombre k' satisfaisant à l'inégalité $0 < k' < k$.*

Démonstration. On utilise l'équivalence énoncée au lemme 4; le résultat est une conséquence immédiate du théorème suivant, dû à Hardy et Littlewood [6]:

Si la série entière

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$$

converge en un point x_0 de son cercle de convergence et si θ appartient à $]0, 1[$, *alors la série de Taylor de $f(\theta x_0 + (1-\theta)\, x_0)$, soit*

$$(20) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n\,!}\, \frac{d^n f}{dx^n}(\theta x_0)\, \{(1-\theta)\, x_0\}^n,$$

converge également vers $f(x_0)$.

Il suffit, en effet, d'appliquer le théorème à la série entière définie pour $|x| < 1$ par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-k)^n}{n!} \frac{d^n \hat{A}(k)}{dy^n} x^n$$

qui converge en $x_o = 1$.

Comme $\hat{A}$ est analytique sur $]0, +\infty[$, on a pour tout x dans $]0, 1[$

$$f(x) = \hat{A}(k(1-x))$$

et donc, en posant $k' = k(1-\theta)$,

$$\frac{d^n f}{dx^n}(\theta) = (-k)^n \frac{d^n \hat{A}}{dy^n}(k') .$$

Le résultat en découle, en remplaçant dans (20).

Nous pouvons maintenant aborder la dernière étape de la démonstration du théorème 4.

Soit donc A une fonction de $\mathscr{V}_+$ satisfaisant à (3). Nous allons montrer que la suite de fonctions $(g_m)_{m \geq 1}$ définie par

$$(\forall m \in \mathbf{N}^*, \ \forall t > 0) \qquad g_m(t) = \frac{1}{\sqrt{m}} \{A(m + t\sqrt{m}) - A(m - t\sqrt{m})\}$$

converge simplement vers la fonction $t \mapsto 2\alpha t$; la croissance de A permettra alors d'en déduire (1).

D'après les lemmes 3 et 5, on a, pour tout réel k de l'intervalle $\left]0, \frac{1}{2}\right[$, lorsque m tend vers l'infini

$$\text{(21)} \qquad \sqrt{\frac{k}{\pi m}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-kh^2\} \, dA(m + h\sqrt{m}) = \alpha + o(1) .$$

De plus, comme la mesure $dA(t)$ est positive, la suite des fonctions définies sur le demi-plan $\mathscr{H} = \{z \in \mathbf{C} : Re\, z > 0\}$ par

$$\text{(22)} \qquad f_m(z) = \sqrt{\frac{z}{\pi m}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-zh^2\} \, dA(m + h\sqrt{m})$$

est bornée pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de $\mathscr{H}$. Comme $f_m(z)$ tend vers α pour $z = k \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, le théorème de Vitali implique

$$\text{(23)} \qquad (\forall z \in \mathscr{H}) \qquad f_m(z) = \alpha + o(1) .$$

En intégrant par parties l'intégrale figurant au second membre de (22), la relation (23) devient:

$$(\forall z \in \mathscr{K}) \qquad \int_0^\infty h\, g_m(h) \exp\{-zh^2\}\, dh = \frac{\alpha\sqrt{\pi}}{2z^{3/2}} + o(1)\,.$$

Soit y un réel positif; prenons $z = y^2$ et effectuons le changement de variable $t = hy$, on obtient:

$$(24) \qquad (\forall y > 0) \qquad \int_0^\infty t\, g_m\left(\frac{t}{y}\right) e^{-t^2}\, dt = \frac{\alpha\sqrt{\pi}}{2y} + o(1)\,.$$

En particulier, il existe une constante positive M telle que l'on ait pour m assez grand

$$\int_0^\infty t\, g_m(t)\, e^{-t^2}\, dt \leqslant M\,.$$

Comme g_m est positive et croissante en t, cela implique

$$(\forall \tau > 0) \qquad g_m(\tau) \leqslant M \left\{\int_\tau^\infty te^{-t^2}\, dt\right\}^{-1} = 2Me^{\tau^2}\,.$$

La famille des fonctions $t \to tg_m\left(\frac{t}{y}\right) e^{-t^2}$ est donc, *pour chaque y fixé supérieur à* 1, majorée par une fonction intégrable pour la mesure de Lebesgue.

Maintenant, de toute suite d'entiers tendant vers l'infini, on peut extraire, par un procédé diagonal, une sous-suite (m_i) telle que la suite $(g_{m_i})_{i \geq 0}$ converge simplement sur l'ensemble des rationnels positifs vers une fonction g, définie sur $\mathbf{Q}_+$ et croissante. On peut la prolonger en une fonction croissante définie sur l'ensemble des réels positifs et continue à gauche. Notons encore g ce prolongement. L'ensemble D des points de discontinuité de g est dénombrable et, pour tout réel positif t n'appartenant pas à D et tout couple (r, s) de rationnels tel que $r < t < s$, on a:

$$(\forall i \geqslant 0) \qquad g_{m_i}(r) \leqslant g_{m_i}(t) \leqslant g_{m_i}(s)\,.$$

En faisant tendre i vers l'infini puis r et s vers t, on voit que (g_{m_i}) converge vers g presque partout. On peut donc appliquer le théorème de Lebesgue à la suite des fonctions $t \mapsto t\, g_{m_i}\left(\frac{t}{y}\right) e^{-t^2}$ pour y fixé supérieur à 1; on obtient

$$(25) \qquad (\forall y > 1) \qquad \int_0^\infty te^{-t^2} g\left(\frac{t}{y}\right) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\alpha}{y}\,.$$

En faisant le changement de variable $t^2 = u\,y^2$, il vient

$$(\forall y > 1) \qquad \int_0^\infty e^{-uy^2} g(\sqrt{u})\,du = \frac{\sqrt{\pi}\,\alpha}{y^3}\,.$$

L'injectivité de la transformation de Laplace implique donc l'égalité

$$g(\sqrt{u}) = 2\alpha\sqrt{u} \tag{26}$$

pour presque tout réel positif u. Comme g est croissante, on voit finalement que (26) a lieu pour tout u.

Nous avons donc montré que, de toute suite d'entiers tendant vers $+\infty$, on peut extraire une sous-suite (m_i) telle que (g_{m_i}) tende simplement vers la fonction $t \mapsto 2\alpha t$. Cela implique la conclusion annoncée.

6. Le contre exemple

Nous nous proposons ici d'établir le théorème 5.

Soit $t \mapsto \psi(t)$ une fonction réelle tendant vers $+\infty$; nous pouvons sans restreindre la généralité supposer que ψ est croissante et que l'on a:

$$\begin{cases} \psi(0) = 1 \\ \psi(t) = o(\sqrt{t}\,) \\ \limsup\limits_{t\to\infty} \left|\dfrac{\psi(2t)}{\psi(t)}\right| < +\infty\,. \end{cases} \tag{27}$$

Définissons alors une suite de nombres réels par

$$(\forall n \geqslant 2)\, a_n = \begin{cases} -\psi\left(\dfrac{m^3}{2}\right) & \text{si} \quad -m^{3/2}\,\psi\left(\dfrac{m^3}{2}\right)^{-1} \leqslant n - m^3 < 0 \\ +\psi\left(\dfrac{m^3}{2}\right) & \text{si} \quad 0 \leqslant n - m^3 \leqslant m^{3/2}\,\psi\left(\dfrac{m^3}{2}\right)^{-1} \\ 0 & \text{si} \quad (\forall m \in \mathbf{N})\,|n - m^3| > m^{3/2}\psi\left(\dfrac{m^3}{2}\right)^{-1}. \end{cases}$$

Il est clair que l'on a pour tout entier $n \geqslant 2$

$$|a_n| \leqslant \psi(n)\,.$$

De plus, pour toute constante positive c, on a:

$$\sum_{m^3 \leq n \leq m^3 + cm^{3/2}} a_n = m^{3/2}\left(1 + o(1)\right),$$

on voit donc qu'il n'existe aucun réel α tel que l'on ait

$$(\forall c > 0) \quad \sum_{x \leq n < x + c\sqrt{x}} a_n = c\alpha\sqrt{x} + o(\sqrt{x}).$$

Il reste à montrer que a_n tend vers 0 au sens de Borel.

Puisque $a_n = o(\sqrt{n})$ il suffit de montrer (cf. [6]) que pour m tendant vers l'infini on a:

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} a_{m+h} \exp\left\{-\frac{h^2}{2m}\right\} = o(1) \tag{28}$$

où l'on a posé $a_{m+h} = 0$ pour $m + h < 0$.

Comme $a_n = O\left(\psi(n)\right)$ on vérifie facilement la majoration

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{|h| > \sqrt{m}\,\psi(m)^{1/4}} |a_{m+h}| \exp\left\{-\frac{h^2}{2m}\right\}$$

$$= O\left(\psi(m) \exp\left\{-\frac{1}{2}\sqrt{\psi(m)}\right\}\right) = o(1).$$

Or l'intervalle $[m - \sqrt{m}\,\psi(m)^{1/4}, m + \sqrt{m}\,\psi(m)^{1/4}]$ contient, pour m assez grand, au plus un cube k^3; on voit donc que (28) est une conséquence de

$$\lim_{k \to \infty} \sup_{|m - k^3| < 2k^{3/2}\psi(k^3)^{\frac{1}{4}}} |F(m, k)| = 0,$$

avec

$$F(m, k) = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{|k^3 - m + h| \leq k^{3/2}\psi(k^3)^{1/4}} a_{k^3+k} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(k^3 - m + h)^2}{m}\right\}.$$

On a pour $|m - k^3| < k^{3/2}\psi(k^3)^{\frac{1}{4}} - k^{3/2}\psi(k^3/2)^{-1}$

$$F(m, k) = \left(1 + o(1)\right) \frac{\psi(k^3/2)}{k^{3/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(k^3 - m)^2}{m}\right\} \times$$

$$\times \sum_{0 \leq h \leq k^{3/2} \psi(k^3/2)^{-1}} \exp\left\{-\frac{h^2}{2m}\right\}\left[\exp\left\{-h\frac{(k^3-m)}{m}\right\} - \exp\left\{\frac{h(k^3-m)}{m}\right\}\right];$$

comme

$$\exp\left\{\pm h\frac{(k^3-m)}{m}\right\} = \exp\left\{O(\psi(k^3)^{-3/4})\right\} = 1 + o(1),$$

la conclusion en découle.

Pour $|m - k^3| > k^{3/2}\psi(k^3)^{\frac{1}{4}} - k^{3/2}\psi(k^3/2)^{-1}$, on a trivialement $F(m, k) = O\left(\exp\left\{-\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)\sqrt{\psi(m)}\right\}\right) = o(1)$, ce qui achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Delange, H. Sur la distribution des entiers ayant certaines propriétés. *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. (3e série) 73* (1956), pp. 15-74.

[2] —— Communication privée, février 1979.

[3] Deshouillers, J.-M. Sur les nombres admettant un nombre de facteurs premiers déterminé. *C. R. Acad. Sc. Paris 271* (1970), pp. 1197-1199.

[4] Halász, G. On the distribution of additive and the mean values of multiplicative arithmetic functions. *Studia Sci. Math. Hung. 6* (1971), pp. 211-233.

[5] Hardy, G. H. *Divergent Series.* Oxford, at the Clarendon Press (1949).

[6] Hardy, G. H. and J. E. Littlewood. Theorems concerning the summability of series by Borel's exponential method. *Rendiconti del Circ. mat. di Pal. 41* (1916), pp. 36-53.

[7] —— On the tauberian theorem for Borel summability. *J. of the London Math. Soc, 18* (1943), pp. 194-200.

[8] Hyslop, J. M. The generalization of a theorem on Borel summability. *Proc. of the London Math. Soc. 41* (1936), pp. 243-256.

[9] Karamata, J. *Sur les théorèmes inverses des procédés de sommabilité.* Actualités Scientifiques et Industrielles nº 450 (1937), Ed. Hermann (Paris).

[10] Widder, D. V. *The Laplace Transform.* Princeton University Press (1946).

[11] Wiener, N. Tauberian Theorems. *Annals of Mathematics (2) 33* (1932), pp. 1-100.

[12] Wiener, N. and W. T. Martin. Taylor's series of entire functions of smooth growth. *Duke Math. J. 3* (1937), pp. 213-223.

(Reçu le 16 octobre 1979)

Gérald Tenenbaum

U.E.R. de Mathématiques et d'Informatique
de l'Université de Bordeaux I
351, cours de la Libération
F-33405 Talence Cedex

vide-leer-empty