

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 26 (1980)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE PROCÉDÉ DE SOMMATION DE BOREL ET LA RÉPARTITION DU NOMBRE DES FACTEURS PREMIERS DES ENTIERS
Autor: Tenenbaum, Gérald
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-51071>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 18.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SUR LE PROCÉDÉ DE SOMMATION DE BOREL ET LA RÉPARTITION DU NOMBRE DES FACTEURS PREMIERS DES ENTIERS

par Gérald TENENBAUM

1. INTRODUCTION

Soit E un ensemble non vide de nombres premiers. Pour tout entier naturel positif n , désignons par $\Omega_E(n)$ et par $\omega_E(n)$ le nombre des facteurs premiers de n qui appartiennent à E , comptés respectivement avec et sans leur ordre de multiplicité. Dans le cas où E est l'ensemble de tous les nombres premiers nous écrivons $\Omega_E(n) = \Omega(n)$ et $\omega_E(n) = \omega(n)$.

Pour toute suite d'entiers \mathcal{A} , nous notons A la fonction sommatoire définie par

$$(\forall x \in \mathbf{R}) \quad A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \text{card } \{n \leq x : n \in \mathcal{A}\} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Enfin, étant données une suite d'entiers \mathcal{A} et une fonction arithmétique à valeurs entières g , nous notons

$$g^{-1}(\mathcal{A}) = \{n \in \mathbf{N} \setminus \{0\} : g(n) \in \mathcal{A}\}$$

la suite croissante des entiers positifs n tels que $g(n)$ appartienne à \mathcal{A} .

Hubert Delange a montré dans [1] que, si \mathcal{A} est une progression arithmétique et si $g = \Omega$ ou ω , alors $g^{-1}(\mathcal{A})$ possède une densité naturelle qui est celle de \mathcal{A} ¹⁾. Jean-Marc Deshouillers [3] a généralisé ce résultat au cas où la suite \mathcal{A} vérifie

$$A(x) = \alpha x + o(\sqrt{x})$$

¹⁾ Dans le cas de la fonction Ω , ce résultat avait déjà été établi par S. S. Pillai « Generalization of a theorem of Mangoldt » *Proc. Indian Acad. Sc. Sect. A*, 11 (1940), 13-20.

pour un certain α de l'intervalle $[0, 1]$. Il a également montré, dans le cas où \mathcal{A} est de densité inférieure nulle, que $\Omega^{-1}(\mathcal{A})$ ou $\omega^{-1}(\mathcal{A})$ possède une densité (nécessairement nulle) si et seulement si l'on a

$$(\forall c > 0) \quad A(x + c\sqrt{x}) = A(x) + o(\sqrt{x}).$$

Nous nous proposons d'étendre ces résultats de la manière suivante:

THÉORÈME 1. *Soit E un ensemble de nombres premiers tel que*

$$\sum_{p \in E} \frac{1}{p} = +\infty.$$

On pose $g = \Omega_E$ ou $g = \omega_E$.

Alors, une condition nécessaire et suffisante sur la suite \mathcal{A} pour que $g^{-1}(\mathcal{A})$ possède une densité naturelle est l'existence d'un réel α de $[0, 1]$ tel que

$$(1) \quad (\forall c > 0) \quad A(x + c\sqrt{x}) - A(x) = c\alpha\sqrt{x} + o(\sqrt{x}).$$

De plus, dans ce cas, les suites \mathcal{A} et $g^{-1}(\mathcal{A})$ ont pour densité α .

Rappelons qu'une suite complexe $(a_n)_{n \geq 0}$ converge vers un nombre complexe α au sens de Borel si l'on a pour x infini

$$(2) \quad e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = \alpha + o(1).$$

En posant, pour $x \geq 0$,

$$A(x) = \sum_{n \leq x} a_n,$$

on voit que la relation (2) équivaut à la relation

$$(3) \quad e^{-x} \int_0^{\infty} \frac{x^t}{\Gamma(t+1)} dA(t) = \alpha + o(1)$$

où Γ désigne la fonction eulérienne.

Moins par souci de généralité que de commodité et clarté d'exposition, nous avons préféré le cadre de l'intégrale de Stieltjes à celui des séries. Ainsi, l'espace des suites complexes disparaîtra-t-il au profit de celui des

fonctions à valeurs complexes et à variation bornée sur tout intervalle borné (nous noterons \mathcal{V} cet espace fonctionnel) et la notion de convergence au sens de Borel sera-t-elle utilisée sous la forme (3).

La première étape de la preuve du théorème 1 consiste à remarquer que l'existence d'une densité naturelle α pour $g^{-1}(\mathcal{A})$ équivaut à la convergence vers α au sens de Borel de la fonction caractéristique de \mathcal{A} , ce que nous énonçons sous la forme suivante:

THÉORÈME 2. *Si E , g et \mathcal{A} gardent la même signification que dans l'énoncé du théorème 1, alors la relation (3) est une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $g^{-1}(\mathcal{A})$ possède la densité α .*

On voit maintenant que le théorème 1 est une conséquence de l'équivalence des conditions (1) et (3) pour toute fonction A de la forme $A(x) = \sum_{n \leq x} a_n$ où a_n vaut 0 ou 1.

En supposant seulement la suite (a_n) bornée, H. Delange [2] a trouvé de ce résultat une démonstration courte et élégante utilisant la densité dans $L^1(\mathbf{R})$ du sous-espace vectoriel engendré par la famille des fonctions $u \mapsto \exp \left\{ -\frac{1}{2}(u-h)^2 \right\}$, h décrivant \mathbf{R} . De plus il a remarqué que l'on peut déduire l'équivalence de (1) et (3):

- pour la fonction sommatoire d'une suite (a_n) bornée, d'un théorème taubérien général de Karamata (cf. [9], théorème II, page 127, appliqué avec $A(t) = e^{\sqrt{t}}$)
- pour la fonction sommatoire d'une suite (a_n) majorée ou minorée, d'un résultat de Wiener et Martin (cf. [12], théorèmes 1 et 2 appliqués avec $F(x) = e^x$ et en remplaçant a_n par $\frac{a_n}{n!}$) utilisant un théorème taubérien de Wiener [11].

Nous avons obtenu les résultats suivants par une méthode directe, inspirée pour la partie taubérienne de celle de Hardy et Littlewood dans [6].

THÉORÈME 3. *Pour toute fonction A de \mathcal{V} la relation (1) implique la relation (3).*

THÉORÈME 4. *Soit A une fonction de \mathcal{V} .*

S'il existe un nombre complexe β et une fonction $x \mapsto B(x)$ satisfaisant à la relation

$$(\forall c > 0) \quad B(x + c\sqrt{x}) - B(x) = c\beta\sqrt{x} + o(\sqrt{x})$$

tels que la fonction $x \mapsto A(x) + B(x)$ soit à parties réelle et imaginaire monotones, alors la relation (3) implique la relation (1).

Remarquons que la classe des fonctions $x \mapsto B(x)$ satisfaisant à la condition du théorème 4 est assez étendue; elle contient en effet toutes les fonctions du type

$$B(x) = B_1(x) + o(\sqrt{x})$$

où B_1 est une fonction dérivable telle que, quand x tend vers l'infini,

$$B'_1(x) = \beta + o(1).$$

Dans le cas où A est la fonction sommatoire d'une suite a_n , on obtient, en prenant $B(x) = \lambda[x]$, le corollaire suivant qui, associé aux théorèmes 2 et 3, implique le théorème 1.

COROLLAIRE. *Soit (a_n) une suite de nombres réels. S'il existe un nombre réel λ tel que l'on ait pour n assez grand*

$$a_n \geq -\lambda$$

et si (a_n) tend vers α au sens de Borel, soit

$$(B) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = \alpha$$

alors on a

$$(C) \quad (\forall c > 0) \quad \sum_{x \leq n < x + c\sqrt{x}} a_n = c\alpha\sqrt{x} + o(\sqrt{x}).$$

Il était connu depuis longtemps (voir [6]) que la condition

$$\sum_{n \leq x} a_n = \alpha x + o(\sqrt{x})$$

(qui implique (C)) est suffisante pour assurer la convergence de (a_n) vers α au sens de Borel. Cependant, nous n'avons trouvé nulle part, dans la littérature consacrée à ce sujet, explicitement énoncé, un théorème d'équivalence des conditions (B) et (C).

Le théorème suivant montre que la restriction $a_n \geq -\lambda$ à laquelle est assujettie l'implication (B) \Rightarrow (C) est optimale.

THÉORÈME 5. Pour toute fonction réelle $t \mapsto \psi(t)$ tendant vers l'infini il existe une suite réelle (a_n) satisfaisant aux trois propriétés suivantes :

- (a) $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |a_n| \leq \psi(n)$
- (b) (a_n) tend vers 0 au sens de Borel
- (c) Pour toute constante positive c l'expression $\frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{x \leq n < x + c\sqrt{x}} a_n$ ne tend pas vers 0 lorsque x tend vers l'infini.

2. UN LEMME UTILE

Pour tout couple (x, t) de réels positifs, nous posons :

$$\varphi(x, t) = e^{-x} \frac{x^t}{\Gamma(t+1)}.$$

L'énoncé ci-dessous rassemble les principales propriétés de la fonction $\varphi(x, t)$. La démonstration, utilisant la formule de Stirling et d'autres résultats classiques concernant la fonction Γ , est laissée au lecteur.

LEMME 1.

(i) pour $x > 0$ et $|t - x| \leq x^{2/3}$, on a :

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp \left\{ -\frac{(t-x)^2}{2x} \right\} \left(1 + O\left(\frac{1+|t-x|}{x}\right) + O\left(\frac{|t-x|^3}{x^2}\right) \right)$$

(ii) pour $x > 0$ et $|t - x| \leq \frac{x}{2}$ on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) = O\left(\frac{1+|t-x|}{x} \cdot \varphi(x, t)\right)$$

(iii) pour tout réel positif x , la fonction partielle $t \mapsto \varphi(x, t)$ est positive et atteint son maximum absolu en un point $t(x)$ de l'intervalle $[x-1, x]$;

elle est croissante sur l'intervalle $[0, t(x)[$ et décroissante sur l'intervalle $]t(x), +\infty[$.

(iv) pour tout réel ξ satisfaisant à l'inégalité $\frac{1}{2} < \xi < \frac{2}{3}$ et tout réel positif ε , on a :

$$\int_{|t-x|>x^\xi} \varphi(x, t) dt = O(\exp \{-x^{2\xi-1-\varepsilon}\})$$

(v) on a pour x infini

$$\int_0^\infty \varphi(x, t) dt = 1 + O(e^{-x}).$$

3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2

E et g gardant la même signification que dans l'énoncé du théorème 1, posons pour x réel positif et m entier

$$y = y(x) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \in E}} \frac{1}{p}$$

et

$$N(m, x) = \text{card} \{n \leq x : g(n) = m\}.$$

Halász a démontré dans [4] que l'on a, sous la seule hypothèse $y(x) \rightarrow +\infty$, pour tout réel δ satisfaisant à $0 < \delta \leq 1$,

$$(4) \quad N(m, x) = x \varphi(y, m) \left\{ 1 + O\left(\frac{|m-y|}{y}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right) \right\},$$

uniformément pour $\delta \leq \frac{m}{y} \leq 2 - \delta$ et $y \geq 2$.

Notant $\mathcal{B} = g^{-1}(\mathcal{A})$, on a pour tout x positif

$$B(x) := \text{card} \{n \leq x : n \in \mathcal{B}\} = \sum_{m \in \mathcal{A}} N(m, x).$$

Fixons alors un nombre réel ξ dans l'intervalle $\left] \frac{1}{2}, \frac{2}{3} \right[$, on a :

$$(5) \quad B(x) = \sum_{\substack{m \in \mathcal{A} \\ |m-y| \leq y^\xi}} N(m, x) + O\left(\sum_{|m-y| > y^\xi} N(m, x)\right).$$

Dans le cas particulier où \mathcal{A} est la suite de tous les entiers on a d'une part $B(x) = [x]$ et d'autre part, compte tenu de (4),

$$\begin{aligned} \sum_{|m-y| \leq y^\xi} N(m, x) &= x \left(1 + O \left(\frac{1}{y^{1-\xi}} \right) \right) \sum_{|m-y| \leq y^\xi} \varphi(y, m) \\ &= x \left(1 + O \left(\frac{1}{y^{1-\xi}} \right) \right) \left(\int_{|t-y| \leq y^\xi} \varphi(y, t) dt + O \left(\frac{1}{\sqrt{y}} \right) \right) \\ &= x \left(1 + O \left(\frac{1}{y^{1-\xi}} \right) \right), \end{aligned}$$

en vertu des assertions (iv) et (v) du lemme 1. Cela montre que pour toute suite \mathcal{A} le terme reste de (5) est majoré par

$$[x] - x \left(1 + O \left(\frac{1}{y^{1-\xi}} \right) \right) = o(x).$$

En reportant dans (5) et en utilisant (4) on obtient

$$\begin{aligned} \frac{B(x)}{x} &= \left(1 + O \left(\frac{1}{y^{1-\xi}} \right) \right) \sum_{\substack{m \in \mathcal{A} \\ |m-y| \leq y^\xi}} \varphi(y, m) + o(1) \\ &= (1 + o(1)) \left(\int_0^\infty \varphi(y, t) dA(t) + o(1) \right) + o(1) \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration du théorème 2.

4. LE RÉSULTAT ABÉLIEN

Le lemme suivant, dont la démonstration nous a été suggérée par H. Delange, nous sera utile.

LEMME 2. *Soit A une fonction mesurable complexe vérifiant (1). Alors la relation (1) a lieu uniformément en c sur tout compact.*

Démonstration. On peut supposer sans restreindre la généralité que l'on a $\alpha = 0$ dans (1).

Il suffit de montrer que, pour tout réel positif h , il y a convergence uniforme de $\frac{A(x+c\sqrt{x}) - A(x)}{\sqrt{x}}$ vers 0 pour $0 \leq c \leq h$. En effet, la convergence uniforme pour $0 \leq c \leq h$ implique la convergence uniforme pour $-h' \leq c \leq 0$ quel que soit $h' \in]0, h[$ du fait que, pour x assez grand on a

$$\begin{aligned} \forall c (-h' \leq c \leq 0) \quad x + c\sqrt{x} &\leq x \leq x + c\sqrt{x} + h\sqrt{x} + c\sqrt{x} \\ &= x + (h+c)\sqrt{x} + O(1). \end{aligned}$$

Fixons donc deux réels positifs h et ε .

Pour tout $x > 0$ on désigne par I_x l'intervalle $[x, x + 2h\sqrt{x}]$ et par E_x l'ensemble des t de I_x satisfaisant à

$$|A(t) - A(x)| > \frac{\varepsilon}{1 + \sqrt{2}} \sqrt{x}.$$

On note E_x^* l'ensemble des réels c de $[0, 2h]$ satisfaisant à

$$|A(x+c\sqrt{x}) - A(x)| > \frac{\varepsilon}{1 + \sqrt{2}} \sqrt{x}.$$

Il est clair que E_x et E_x^* sont mesurables et que l'on a, en notant μ la mesure de Lebesgue,

$$\mu(E_x) = \sqrt{x} \mu(E_x^*).$$

Maintenant le théorème de Lebesgue sur la convergence dominée appliqué à la fonction caractéristique de E_x^* montre que $\mu(E_x^*) = o(1)$. Il existe donc un réel x_0 , que l'on peut supposer $\geq h^2$, tel que

$$\forall x (x \geq x_0) \quad \mu(E_x) \leq \frac{h}{3} \sqrt{x}.$$

On voit alors que pour $x \geq x_0$ on a:

$$\forall c (0 \leq c \leq h) \quad \left| \frac{A(x+c\sqrt{x}) - A(x)}{\sqrt{x}} \right| \leq \varepsilon.$$

En effet, des inégalités

$$\mu(I_x \cap I_{x+c\sqrt{x}}) \geq (2h-c) \sqrt{x} \geq h\sqrt{x}$$

et

$$\begin{aligned} \mu(E_x \cup E_{x+c\sqrt{x}}) &\leq \frac{h}{3} \sqrt{x} + \frac{h}{3} \sqrt{x+h\sqrt{x}} = \frac{h}{3} \sqrt{x} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{h}{\sqrt{x}}}\right) \\ &\leq \frac{h}{3} (1 + \sqrt{2}) \sqrt{x} < h\sqrt{x} \end{aligned}$$

on déduit l'existence d'au moins un t appartenant à $I_x \cap I_{x+c\sqrt{x}}$ et n'appartenant pas à $E_x \cup E_{x+c\sqrt{x}}$. D'après la définition de E_x on obtient

$$|A(t) - A(x)| \leq \frac{\varepsilon}{1 + \sqrt{2}} \sqrt{x}$$

et

$$|A(t) - A(x + c\sqrt{x})| \leq \frac{\varepsilon}{1 + \sqrt{2}} \sqrt{x + h\sqrt{x}}$$

d'où

$$|A(x) - A(x + c\sqrt{x})| \leq \frac{\varepsilon}{1 + \sqrt{2}} (\sqrt{x} + \sqrt{x + h\sqrt{x}}) \leq \varepsilon \sqrt{x}.$$

Remarque. La démonstration précédente est une variante de celle qui a été utilisée par Delange ¹⁾ pour établir le fait suivant, déjà signalé par Karamata ²⁾:

Si A est une fonction à croissance lente, c'est-à-dire satisfaisant à

$$(\forall a \geq 1) \quad \frac{A(ax)}{A(x)} = 1 + o(1),$$

alors cette dernière relation a lieu uniformément en a sur tout compact de $[1, +\infty[$.

Nous pouvons maintenant établir le théorème 3.

Soit, donc, A une fonction de \mathcal{V} satisfaisant à la relation (1). L'assertion (v) du lemme 1 montre que l'on peut, sans restreindre la généralité, supposer $\alpha = 0$, soit

$$(\forall c > 0) \quad A(x + c\sqrt{x}) - A(x) = o(\sqrt{x}).$$

¹⁾ H. Delange, « Sur un théorème de Karamata », *Bull. Sc. Math.* (2) 79 (1955), 1-4.

²⁾ J. Karamata, « Sur un mode de croissance régulière des fonctions », *Mathematica* 4 (1930), 38-53.

Comme cette relation, d'après le lemme 2, est uniforme en c sur tout compact, nous l'écrivons sous la forme:

$$(6) \quad A(x + O(\sqrt{x})) - A(x) = o(\sqrt{x}).$$

En particulier, on a:

$$A(x) = \sum_{k \leq \sqrt{x}} A(k^2 + k) - A(k^2 - k) + o(\sqrt{x}) = \sum_{k \leq \sqrt{x}} o(k) + o(\sqrt{x})$$

d'où:

$$(7) \quad A(x) = o(x).$$

Maintenant, décomposons l'intégrale du premier membre de (3) en une somme, soit:

$$\int_0^\infty \varphi(x, t) dA(t) = I_1 + I_2 + I_3$$

où I_1, I_2, I_3 correspondent respectivement aux domaines d'intégration $[0, x - \sqrt{x}[$, $[x - \sqrt{x}, x + \sqrt{x}[$ et $[x + \sqrt{x}, +\infty[$.

Une intégration par parties suffit pour majorer $|I_2|$:

$$\begin{aligned} I_2 &= [A(t) \varphi(x, t)]_{x - \sqrt{x}}^{x + \sqrt{x}} - \int_{x - \sqrt{x}}^{x + \sqrt{x}} A(t) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) dt \\ &= [(A(t) - A(x)) \varphi(x, t)]_{x - \sqrt{x}}^{x + \sqrt{x}} + \int_{x - \sqrt{x}}^{x + \sqrt{x}} (A(x) - A(t)) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) dt; \end{aligned}$$

la conclusion $I_2 = o(1)$ découle alors de (6) et de la majoration

$$\sup_{|t - x| \leq \sqrt{x}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) \right| = O\left(\frac{1}{x}\right)$$

qui est une conséquence des assertions (i) et (ii) du lemme 1.

Pour majorer $|I_1 + I_3|$, définissons une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de nombres réels par les formules:

$$\begin{aligned} x_0 &= x \\ x_k &= x_{k-1} + \sqrt{x_{k-1}} \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned}$$

on vérifie facilement l'inégalité

$$x + k\sqrt{x} \leq x_k \leq x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Un réel ξ étant donné dans l'intervalle $\left]\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right[$, on pose

$$m = [x^{\xi - \frac{1}{2}}]$$

de sorte que l'on a pour x assez grand

$$x_{\pm m} = x \pm x^{\xi} + O(x^{\frac{1}{3}}).$$

On décompose alors $I_1 + I_3$ en une somme:

$$(8) \quad \begin{aligned} I_1 + I_3 = & \left\{ \int_0^{x-m} + \int_{x_m}^{\infty} \right\} \{ \varphi(x, t) dA(t) \} \\ & + \sum_{\substack{-m \leq k \leq m-1 \\ k \neq -1, 0}} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(x, t) dA(t). \end{aligned}$$

D'une part on a, quitte à supposer $A(0) = 0$,

$$\begin{aligned} \left\{ \int_0^{x-m} + \int_{x_m}^{\infty} \right\} \{ \varphi(x, t) dA(t) \} &= [\varphi(x, t) A(t)]_{x-m}^{x_m} \\ &- \left\{ \int_0^{x-m} + \int_{x_m}^{+\infty} \right\} \left\{ A(t) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) dt \right\}; \end{aligned}$$

d'après l'assertion (i) du lemme 1 et la relation (7) il vient:

$$\varphi(x, x_{\pm m}) A(x_{\pm m}) = o(1)$$

et d'après l'assertion (iii) du lemme 1 et la relation (7) on a:

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left| \left\{ \int_0^{x-m} + \int_{x_m}^{+\infty} \right\} \left\{ A(t) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) \right\} dt \right| \leq o(x-m) [\varphi(x, t)]_0^{x-m} \\ & \quad + o \left(\int_{x_m}^{\infty} t \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) dt \right) \\ & = o(x-m) \{ \varphi(x, x-m) - e^{-x} \} + o(x_m \varphi(x, x_m) + \int_{x_m}^{\infty} \varphi(x, t) dt) \\ & = o(1). \end{aligned} \right.$$

D'autre part, puisqu'aucun des x_k ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) n'appartient à l'intervalle $[x - 1, x]$ la formule de la moyenne implique

$$\begin{aligned} \forall k (-m \leq k \leq m-1, k \neq -1, 0) \quad & \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(x, t) dA(t) \right| \\ & \leq \varphi(x, x_{k+i}) \sup_{x_k \leq t \leq x_{k+1}} |A(t) - A(x_{k+i})| \end{aligned}$$

avec $i = 1$ si $k \geq 1$ et $i = 0$ si $k \leq -2$.

D'après (6) on a donc:

$$\begin{aligned} \forall k (-m \leq k \leq m-1, k \neq -1, 0) \quad & \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(x, t) dA(t) \right| \\ & = o(\sqrt{x} \varphi(x, x_{k+i})) \end{aligned}$$

d'où, en utilisant l'assertion (i) du lemme 1,

$$\begin{aligned} (10) \quad & \sum_{\substack{-m \leq k \leq m-1 \\ k \neq -1, 0}} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(x, t) dA(t) \right| \\ & = o \left(\sum_{\substack{-m \leq k \leq m-1 \\ k \neq -1, 0}} \exp \left\{ -\frac{k^2}{2} (1 + o(1)) \right\} \right) \\ & = o(1). \end{aligned}$$

En reportant (10) et (9) dans (8), on obtient $I_1 + I_3 = o(1)$, ce qui achève la démonstration.

5. LE RÉSULTAT TAUBÉRIEN

Dans cette section, nous nous proposons d'établir le théorème 4. Nous supposons, dans toute la démonstration, A réelle et croissante; grâce au théorème 3, le cas général se déduit aisément de ce cas particulier.

Nous noterons \mathcal{V}_+ l'ensemble des fonctions réelles croissantes, définies sur l'ensemble des réels positifs ou nuls et prolongées par 0 sur l'ensemble des réels négatifs.

Les méthodes de démonstration que nous utiliserons sont fondées sur des idées de Hardy et Littlewood ([6], [7]) dont on trouvera un exposé dans le chapitre 9 de [5]. En particulier, le point crucial consiste à appliquer au bon moment le théorème de Vitali, que nous énonçons pour mémoire:

Soit \mathcal{O} un domaine du plan complexe et (f_n) une famille de fonctions holomorphes sur \mathcal{O} , bornée pour la topologie de la convergence sur tout compact de \mathcal{O} et convergeant vers une fonction holomorphe f , définie sur \mathcal{O} , sur une suite de points ayant un point d'accumulation dans \mathcal{O} . Alors (f_n) converge vers f uniformément sur tout compact de \mathcal{O} .

LEMME 3. Pour toute fonction A de \mathcal{V}_+ , les conditions suivantes sont équivalentes :

$$(3) \quad \int_0^{\infty} \varphi(x, t) dA(t) = \alpha + o(1)$$

$$(11) \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{h^2}{2} \right\} dA(x + h\sqrt{x}) = \alpha + o(1).$$

Dans [6], Hardy et Littlewood ont montré l'équivalence des conditions (3) et (11) dans le cas où $A(t)$ est la fonction sommatoire d'une suite $a_n = o(\sqrt{n})$; Hyslop [8] a généralisé ce résultat au cas où $a_n = O(n^K)$ pour un réel arbitraire K . Bien que le résultat du lemme 3 ne soit pas une conséquence de ces travaux antérieurs, la démonstration ne met en œuvre aucun moyen nouveau; nous nous contenterons d'exposer les grandes lignes de la preuve de l'implication $(3) \Rightarrow (11)$, le lecteur n'aura aucune peine, s'il le désire, à compléter la démonstration.

Comme la mesure $dA(t)$ est positive on a

$$\int_x^{x+\sqrt{x}} \varphi(x, t) dA(t) \leq \int_0^{\infty} \varphi(x, t) dA(t) = O(1),$$

et comme, d'après le lemme 1, il existe une constante positive a telle que l'on ait pour x assez grand et t dans $[x, x + \sqrt{x}]$, $\varphi(x, t) \geq \frac{a}{\sqrt{x}}$, on voit que

$$A(x + \sqrt{x}) - A(x) = O(\sqrt{x}).$$

Maintenant il est facile d'en déduire que l'on a uniformément pour $y \geq \sqrt{x}$

$$(12) \quad A(x + y) - A(x) = O(y),$$

et en particulier

$$(13) \quad A(x) = O(x).$$

Soit alors ξ un réel fixé dans l'intervalle $\left] \frac{1}{2}, \frac{2}{3} \right[$; on déduit de (13) et des estimations du lemme 1 la majoration

$$\int_{|t-x| > x^\xi} \varphi(x, t) dA(t) = o(1)$$

d'où finalement :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \varphi(x, t) dA(t) &= \int_{|t-x| < x^\xi} \varphi(x, t) dA(t) + o(1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \int_{|t-x| < x^\xi} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(t-x)^2}{x} \right\} dA(t) + R_1 \\ &\quad + R_2 + o(1) \end{aligned}$$

avec

$$R_1 = O \left(\frac{1}{x} \int_{|t-x| < x^\xi} \frac{1 + |t-x|}{\sqrt{x}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(t-x)^2}{x} \right\} dA(t) \right)$$

et

$$R_2 = O \left(\frac{1}{x} \int_{|t-x| < x^\xi} \frac{|t-x|^3}{x^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(t-x)^2}{x} \right\} dA(t) \right).$$

Comme $dA(t)$ est positive et que les fonctions $h \mapsto |h| e^{-h^2/2}$ et $h \mapsto |h|^3 e^{-h^2/2}$ sont bornées sur la droite réelle, on voit que R_1 et R_2 sont $O \left(\frac{A(x+x^\xi) - A(x-x^\xi)}{x} \right)$, c'est-à-dire $o(1)$ d'après (12).

En remarquant finalement que

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \int_{|t-x| > x^\xi} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(t-x)^2}{x} \right\} dA(t) = o(1),$$

on obtient la conclusion souhaitée.

Le résultat suivant est l'analogue d'un théorème de Hardy et Littlewood ([6], théorème 4.3).

LEMME 4. Soit A une fonction de \mathcal{V}_+ . Si l'intégrale

$$(14) \quad \hat{A}(y) = y \int_0^\infty e^{-ty} dA(t)$$

converge pour $y > y_0$, alors elle définit une fonction analytique de y sur l'intervalle $]y_0, +\infty[$, on a pour tout $y > y_0$ et tout entier non négatif n

$$\frac{d^n \hat{A}}{dy^n}(y) = \int_0^{\infty} (-t)^{n-1} e^{-ty} (n - ty) dA(t)$$

et, pour tout réel positif k , les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) l'intégrale (14) est convergente pour tout réel positif y et l'on a

$$(15) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-k)^n}{n!} \frac{d^n A}{dy^n}(k) = \alpha$$

(ii) on a pour x infini

$$(16) \quad \sqrt{\frac{k}{2\pi x}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{kh^2}{2} \right\} dA(x + h\sqrt{x}) = \alpha + o(1)$$

Démonstration. Les deux premières assertions concernant l'intégrale (14) constituent un résultat classique sur la transformation de Laplace-Stieltjes (voir par exemple Widder [10], chapitre II, §5).

Supposons maintenant que A satisfasse à la condition (i). On a

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-k)^n}{n!} \frac{d^n \hat{A}}{dy^n}(k) &= \lim_{v \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^v \frac{(-k)^n}{n!} \int_0^{\infty} (-t)^{n-1} e^{-tk} (n - tk) dA(t) \\ &= \lim_{v \rightarrow \infty} k \int_0^{\infty} e^{-tk} \sum_{n=0}^v (tk - n) \frac{(kt)^{n-1}}{n!} dA(t) \\ &= \lim_{v \rightarrow \infty} k \int_0^{\infty} e^{-tk} \left\{ - \sum_{n=1}^v \frac{(kt)^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^v \frac{(kt)^n}{n!} \right\} dA(t) \\ &= \lim_{v \rightarrow \infty} k \int_0^{\infty} e^{-tk} \frac{(kt)^v}{v!} dA(t). \end{aligned}$$

En posant $\psi(x, t) = k \varphi(tk, v)$ pour $v = [kx]$, on voit donc que (15) équivaut à

$$(17) \quad \int_0^{\infty} \psi(x, t) dA(t) = \alpha + o(1).$$

Un réel ξ étant fixé dans l'intervalle $\left] \frac{1}{2}, \frac{2}{3} \right]$, on vérifie que l'on a pour $|t - x| < x^{\xi}$

$$(18) \quad \psi(x, t) = \sqrt{\frac{k}{2\pi x}} \exp \left\{ -\frac{k}{2} \cdot \frac{(t-x)^2}{x} \right\} \left(1 + O \left(\frac{|t-x|^3}{x^2} \right) \right).$$

Comme (17) implique que l'intégrale $\int_x^{x+\sqrt{x}} \psi(x, t) dA(t)$ est bornée on en déduit, comme dans la démonstration du lemme 3, la majoration

$$(19) \quad A(x) = O(x);$$

cela implique

$$\begin{aligned} \int_{|t-x| \geq x^\xi} \psi(x, t) dA(t) &= o(1), \\ \frac{1}{\sqrt{x}} \int_{|t-x| \geq x^\xi} \exp \left\{ -\frac{k}{2} \frac{(t-x)^2}{x} \right\} dA(t) &= o(1) \end{aligned}$$

et finalement (16), en utilisant (18) et le changement de variable $t = x + h\sqrt{x}$.

Pour établir l'implication réciproque (ii) \Rightarrow (i), il suffit de remonter les calculs précédents, après avoir remarqué que (16) implique (19) et donc la convergence de l'intégrale (14) pour tout y positif.

LEMME 5. Soit A une fonction de \mathcal{V}_+ .

Si A vérifie (16) pour un nombre réel positif k , il en est de même pour tout nombre k' satisfaisant à l'inégalité $0 < k' < k$.

Démonstration. On utilise l'équivalence énoncée au lemme 4; le résultat est une conséquence immédiate du théorème suivant, dû à Hardy et Littlewood [6]:

Si la série entière

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$$

converge en un point x_0 de son cercle de convergence et si θ appartient à $]0, 1[$, alors la série de Taylor de $f(\theta x_0 + (1-\theta)x_0)$, soit

$$(20) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dx^n}(\theta x_0) \{ (1-\theta)x_0 \}^n,$$

converge également vers $f(x_0)$.

Il suffit, en effet, d'appliquer le théorème à la série entière définie pour $|x| < 1$ par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-k)^n}{n!} \frac{d^n \hat{A}(k)}{dy^n} x^n$$

qui converge en $x_0 = 1$.

Comme \hat{A} est analytique sur $]0, +\infty[$, on a pour tout x dans $]0, 1[$

$$f(x) = \hat{A}(k(1-x))$$

et donc, en posant $k' = k(1-\theta)$,

$$\frac{d^n f}{dx^n}(\theta) = (-k)^n \frac{d^n \hat{A}}{dy^n}(k').$$

Le résultat en découle, en remplaçant dans (20).

Nous pouvons maintenant aborder la dernière étape de la démonstration du théorème 4.

Soit donc A une fonction de \mathcal{V}_+ satisfaisant à (3). Nous allons montrer que la suite de fonctions $(g_m)_{m \geq 1}$ définie par

$$(\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall t > 0) \quad g_m(t) = \frac{1}{\sqrt{m}} \{ A(m + t\sqrt{m}) - A(m - t\sqrt{m}) \}$$

converge simplement vers la fonction $t \mapsto 2\alpha t$; la croissance de A permettra alors d'en déduire (1).

D'après les lemmes 3 et 5, on a, pour tout réel k de l'intervalle $\left]0, \frac{1}{2}\right[$, lorsque m tend vers l'infini

$$(21) \quad \sqrt{\frac{k}{\pi m}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \{ -kh^2 \} dA(m + h\sqrt{m}) = \alpha + o(1).$$

De plus, comme la mesure $dA(t)$ est positive, la suite des fonctions définies sur le demi-plan $\mathcal{K} = \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0 \}$ par

$$(22) \quad f_m(z) = \sqrt{\frac{z}{\pi m}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \{ -zh^2 \} dA(m + h\sqrt{m})$$

est bornée pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de \mathcal{K} . Comme $f_m(z)$ tend vers α pour $z = k \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, le théorème de Vitali implique

$$(23) \quad (\forall z \in \mathcal{K}) \quad f_m(z) = \alpha + o(1).$$

En intégrant par parties l'intégrale figurant au second membre de (22), la relation (23) devient:

$$(\forall z \in \mathcal{K}) \quad \int_0^{\infty} h g_m(h) \exp \{ -zh^2 \} dh = \frac{\alpha \sqrt{\pi}}{2z^{3/2}} + o(1).$$

Soit y un réel positif; prenons $z = y^2$ et effectuons le changement de variable $t = hy$, on obtient:

$$(24) \quad (\forall y > 0) \quad \int_0^{\infty} t g_m \left(\frac{t}{y} \right) e^{-t^2} dt = \frac{\alpha \sqrt{\pi}}{2y} + o(1).$$

En particulier, il existe une constante positive M telle que l'on ait pour m assez grand

$$\int_0^{\infty} t g_m(t) e^{-t^2} dt \leq M.$$

Comme g_m est positive et croissante en t , cela implique

$$(\forall \tau > 0) \quad g_m(\tau) \leq M \left\{ \int_{\tau}^{\infty} t e^{-t^2} dt \right\}^{-1} = 2Me^{\tau^2}.$$

La famille des fonctions $t \rightarrow t g_m \left(\frac{t}{y} \right) e^{-t^2}$ est donc, pour chaque y fixé supérieur à 1, majorée par une fonction intégrable pour la mesure de Lebesgue.

Maintenant, de toute suite d'entiers tendant vers l'infini, on peut extraire, par un procédé diagonal, une sous-suite (m_i) telle que la suite $(g_{m_i})_{i \geq 0}$ converge simplement sur l'ensemble des rationnels positifs vers une fonction g , définie sur \mathbf{Q}_+ et croissante. On peut la prolonger en une fonction croissante définie sur l'ensemble des réels positifs et continue à gauche. Notons encore g ce prolongement. L'ensemble D des points de discontinuité de g est dénombrable et, pour tout réel positif t n'appartenant pas à D et tout couple (r, s) de rationnels tel que $r < t < s$, on a:

$$(\forall i \geq 0) \quad g_{m_i}(r) \leq g_{m_i}(t) \leq g_{m_i}(s).$$

En faisant tendre i vers l'infini puis r et s vers t , on voit que (g_{m_i}) converge vers g presque partout. On peut donc appliquer le théorème de Lebesgue

à la suite des fonctions $t \mapsto t g_{m_i} \left(\frac{t}{y} \right) e^{-t^2}$ pour y fixé supérieur à 1; on obtient

$$(25) \quad (\forall y > 1) \quad \int_0^{\infty} t e^{-t^2} g \left(\frac{t}{y} \right) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\alpha}{y}.$$

En faisant le changement de variable $t^2 = u y^2$, il vient

$$(\forall y > 1) \quad \int_0^\infty e^{-uy^2} g(\sqrt{u}) du = \frac{\sqrt{\pi} \alpha}{y^3}.$$

L'injectivité de la transformation de Laplace implique donc l'égalité

$$(26) \quad g(\sqrt{u}) = 2\alpha\sqrt{u}$$

pour presque tout réel positif u . Comme g est croissante, on voit finalement que (26) a lieu pour tout u .

Nous avons donc montré que, de toute suite d'entiers tendant vers $+\infty$, on peut extraire une sous-suite (m_i) telle que (g_{m_i}) tende simplement vers la fonction $t \mapsto 2\alpha t$. Cela implique la conclusion annoncée.

6. LE CONTRE EXEMPLE

Nous nous proposons ici d'établir le théorème 5.

Soit $t \mapsto \psi(t)$ une fonction réelle tendant vers $+\infty$; nous pouvons sans restreindre la généralité supposer que ψ est croissante et que l'on a :

$$(27) \quad \begin{cases} \psi(0) = 1 \\ \psi(t) = o(\sqrt{t}) \\ \limsup_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} \right| < +\infty. \end{cases}$$

Définissons alors une suite de nombres réels par

$$(\forall n \geq 2) a_n = \begin{cases} -\psi\left(\frac{m^3}{2}\right) & \text{si } -m^{3/2}\psi\left(\frac{m^3}{2}\right)^{-1} \leq n - m^3 < 0 \\ +\psi\left(\frac{m^3}{2}\right) & \text{si } 0 \leq n - m^3 \leq m^{3/2}\psi\left(\frac{m^3}{2}\right)^{-1} \\ 0 & \text{si } (\forall m \in \mathbb{N}) |n - m^3| > m^{3/2}\psi\left(\frac{m^3}{2}\right)^{-1}. \end{cases}$$

Il est clair que l'on a pour tout entier $n \geq 2$

$$|a_n| \leq \psi(n).$$

De plus, pour toute constante positive c , on a :

$$\sum_{m^3 \leq n \leq m^3 + cm^{3/2}} a_n = m^{3/2} (1 + o(1)),$$

on voit donc qu'il n'existe aucun réel α tel que l'on ait

$$(\forall c > 0) \quad \sum_{x \leq n < x + c\sqrt{x}} a_n = c\alpha\sqrt{x} + o(\sqrt{x}).$$

Il reste à montrer que a_n tend vers 0 au sens de Borel.

Puisque $a_n = o(\sqrt{n})$ il suffit de montrer (cf. [6]) que pour m tendant vers l'infini on a :

$$(28) \quad \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} a_{m+h} \exp \left\{ -\frac{h^2}{2m} \right\} = o(1)$$

où l'on a posé $a_{m+h} = 0$ pour $m+h < 0$.

Comme $a_n = O(\psi(n))$ on vérifie facilement la majoration

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{|h| > \sqrt{m} \psi(m)^{1/4}} |a_{m+h}| \exp \left\{ -\frac{h^2}{2m} \right\} \\ &= O \left(\psi(m) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sqrt{\psi(m)} \right\} \right) = o(1). \end{aligned}$$

Or l'intervalle $[m - \sqrt{m} \psi(m)^{1/4}, m + \sqrt{m} \psi(m)^{1/4}]$ contient, pour m assez grand, au plus un cube k^3 ; on voit donc que (28) est une conséquence de

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{|m - k^3| < 2k^{3/2} \psi(k^3)^{1/4}} |F(m, k)| = 0,$$

avec

$$F(m, k) = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{|k^3 - m + h| \leq k^{3/2} \psi(k^3)^{1/4}} a_{k^3 + k} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(k^3 - m + h)^2}{m} \right\}.$$

On a pour $|m - k^3| < k^{3/2} \psi(k^3)^{1/4} - k^{3/2} \psi(k^3/2)^{-1}$

$$F(m, k) = (1 + o(1)) \frac{\psi(k^3/2)}{k^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(k^3 - m)^2}{m} \right\} \times$$

$$\times \sum_{0 \leq h \leq k^{3/2} \psi(k^{3/2})^{-1}} \exp \left\{ -\frac{h^2}{2m} \right\} \left[\exp \left\{ -h \frac{(k^3 - m)}{m} \right\} - \exp \left\{ \frac{h(k^3 - m)}{m} \right\} \right];$$

comme

$$\exp \left\{ \pm h \frac{(k^3 - m)}{m} \right\} = \exp \{ O(\psi(k^3)^{-3/4}) \} = 1 + o(1),$$

la conclusion en découle.

Pour $|m - k^3| > k^{3/2} \psi(k^3)^{\frac{1}{4}} - k^{3/2} \psi(k^{3/2})^{-1}$, on a trivialement $F(m, k) = O\left(\exp\left\{-\left(\frac{1}{2} + o(1)\right)\sqrt{\psi(m)}\right\}\right) = o(1)$, ce qui achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] DELANGE, H. Sur la distribution des entiers ayant certaines propriétés. *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. (3^e série)* 73 (1956), pp. 15-74.
- [2] ——— Communication privée, février 1979.
- [3] DESHOULLERS, J.-M. Sur les nombres admettant un nombre de facteurs premiers déterminé. *C. R. Acad. Sc. Paris* 271 (1970), pp. 1197-1199.
- [4] HALÁSZ, G. On the distribution of additive and the mean values of multiplicative arithmetic functions. *Studia Sci. Math. Hung.* 6 (1971), pp. 211-233.
- [5] HARDY, G. H. *Divergent Series*. Oxford, at the Clarendon Press (1949).
- [6] HARDY, G. H. and J. E. LITTLEWOOD. Theorems concerning the summability of series by Borel's exponential method. *Rendiconti del Circ. mat. di Pal.* 41 (1916), pp. 36-53.
- [7] ——— On the tauberian theorem for Borel summability. *J. of the London Math. Soc.* 18 (1943), pp. 194-200.
- [8] HYSLOP, J. M. The generalization of a theorem on Borel summability. *Proc. of the London Math. Soc.* 41 (1936), pp. 243-256.
- [9] KARAMATA, J. *Sur les théorèmes inverses des procédés de sommabilité*. Actualités Scientifiques et Industrielles n° 450 (1937), Ed. Hermann (Paris).
- [10] WIDDER, D. V. *The Laplace Transform*. Princeton University Press (1946).
- [11] WIENER, N. Tauberian Theorems. *Annals of Mathematics (2)* 33 (1932), pp. 1-100.
- [12] WIENER, N. and W. T. MARTIN. Taylor's series of entire functions of smooth growth. *Duke Math. J.* 3 (1937), pp. 213-223.

(Reçu le 16 octobre 1979)

Gérald Tenenbaum

U.E.R. de Mathématiques et d'Informatique
de l'Université de Bordeaux I
351, cours de la Libération
F-33405 Talence Cedex

Vide-leer-empty