**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique

**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

**Band:** 26 (1980)

**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LE THÉORÈME D'APPROXIMATION DE RUNGE

**Autor:** Auderset, Claude

**Kapitel:** Utilisation de la dualité de Serre

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-51070

de compact non vide ouvert dans $A \setminus \bar{P}$. D'après le lemme, ceci équivaut à la condition 3).

Pour vérifier l'équivalence de 3) et 4), considérons la suite exacte de cohomologie à supports compacts associée au sous-espace fermé $A \setminus \bar{P}$ de $X \setminus \bar{P}$

$$H_c^0(X \setminus \bar{P}, \mathbf{Z}) \to H_c^0(A \setminus \bar{P}, \mathbf{Z}) \to H_c^1(U, \mathbf{Z}) \to H_c^1(X \setminus \bar{P}, \mathbf{Z})$$

[3, Théorème 4.10.1, p. 190].

Ici, $\mathbf{Z}$ désigne le faisceau constant et, pour un espace topologique $Y$, $H_c^0(Y, \mathbf{Z})$ est formé des fonctions localement constantes sur $Y$ à support compact. Le support d'un élément de $H_c^0(Y, \mathbf{Z})$ est un compact ouvert dans $Y$. D'après le lemme, lorsque $Y$ est localement compact, $H_c^0(Y, \mathbf{Z}) = 0$ si et seulement si $Y$ n'a pas de composante connexe compacte. Ceci montre d'abord que $H_c^0(X \setminus \bar{P}, \mathbf{Z}) = 0$. Ensuite, que la condition 3) équivaut à la nullité de $H_c^0(A \setminus \bar{P}, \mathbf{Z})$ ou encore, d'après l'exactitude de la suite précédente, à l'injectivité de $H_c^1(U, \mathbf{Z}) \to H_c^1(X \setminus \bar{P}, \mathbf{Z})$. Par dualité de Poincaré,

$$H_c^1(U, \mathbf{Z}) \cong H_1(U) \text{ et } H_c^1(X \setminus \bar{P}, \mathbf{Z}) \cong H_1(X \setminus \bar{P}),$$

ce qui achève la preuve de l'équivalence entre 3) et 4).

## Utilisation de la dualité de Serre

Désignons par $\mathscr{D}$ l'ensemble des diviseurs effectifs sur $X$ à support contenu dans $P$. Pour $D \in \mathscr{D}$, soient $\xi(D)$ le produit tensoriel de $\xi$ avec le fibré en droites associé à $D$ et $\tilde{\xi}(D) = \mathrm{Hom}\,(\xi(D), \kappa)$, où $\kappa$ est le fibré cotangent de $X$. Les sections holomorphes de $\xi(D)$ sont interprétés comme sections méromorphes $f$ de $\xi$ telles que $\operatorname{div} f \geqslant -D$ et les sections holomorphes de $\tilde{\xi}(D)$ comme sections holomorphes $\omega$ de $\tilde{\xi} = \mathrm{Hom}\,(\xi, \kappa)$ telles que $\operatorname{div} \omega \geqslant D$.

Considérons la suite exacte de cohomologie à supports compacts associée au sous-espace fermé $A$ de $X$

$$\Gamma_c(X, \tilde{\xi}(D)) \to \Gamma_c(A, \tilde{\xi}(D)) \to H_c^1(U, \tilde{\xi}) \to H_c^1(X, \tilde{\xi}(D))$$

[3, Théorème 4.10.1, p. 190], où $\Gamma_c$ désigne les sections à support compact du faisceau des sections holomorphes d'un fibré en droites.

Lorsque la surface $X$ est ouverte (resp. compacte), $\Gamma_c\left(X, \tilde{\xi}(D)\right) = 0$ pour tout $D$ (resp. pour $D$ assez grand). D'autre part, par dualité de Serre [5, Théorème 3, p. 21 et Théorème 4, p. 22],

$$H_c^1(U, \tilde{\xi}) \cong \Gamma(U, \xi)' \text{ et } H_c^1\left(X, \tilde{\xi}(D)\right) \cong \Gamma\left(X, \xi(D)\right)',$$

où $\Gamma(\ ,\ )'$ désigne le dual pour la topologie de la convergence compacte de l'espace des sections holomorphes d'un fibré en droites. On arrive donc à la suite exacte

$$0 \to \Gamma_c\left(A, \tilde{\xi}(D)\right) \to \Gamma(U, \xi)' \to \Gamma\left(X, \xi(D)\right)'$$

pour $D$ assez grand.

Si $M(D)$ dénote l'image de $\Gamma\left(X, \xi(D)\right)$ par restriction dans $\Gamma\left(U, \xi(D)\right)$ et $M(D)^\perp$ l'espace des formes linéaires continues sur $\Gamma\left(U, \xi(D)\right)$ s'annulant sur $M(D)$, on peut encore écrire $\Gamma_c\left(A, \tilde{\xi}(D)\right) \cong M(D)^\perp$ pour $D$ assez grand.

Les propriétés fonctorielles de l'homomorphisme de jonction $\Gamma_c\left(A, \tilde{\xi}(D)\right) \to H_c^1(U, \tilde{\xi})$ et de l'isomorphisme de Serre $H_c^1\left(X, \tilde{\xi}(D)\right) \cong \Gamma\left(X, \xi(D)\right)'$ montrent que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_c\left(A, \tilde{\xi}(D_1)\right) \arrow[r, "\sim"] & M(D_1)^\perp \\
\Gamma_c\left(A, \tilde{\xi}(D_2)\right) \arrow[r, "\sim"] \arrow[u, hook] & M(D_2)^\perp \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

commute pour $D_1 \leqslant D_2$. Prenant l'intersection (ou, si l'on veut, la limite projective) des deux membres de l'isomorphie $\Gamma_c\left(A, \tilde{\xi}(D)\right) \cong M(D)^\perp$, on arrive à

$$\bigcap_{D \in \mathcal{D}} \Gamma_c\left(A, \tilde{\xi}(D)\right) \cong \bigcap_{D \in \mathcal{D}} M(D)^\perp = M^\perp,$$

où $M = \bigcup_{D \in \mathcal{D}} M(D)$ est formé des restrictions à $U$ des sections méromorphes de $\xi$ au-dessus de $X$ à pôles dans $P$.

La condition 1) du théorème est que $M$ soit dense dans $\Gamma(U, \xi)$ ou encore, d'après Hahn-Banach, que l'orthogonal $M^\perp$ soit nul:

*La condition* 1) *est équivalente à*

1′) $$\bigcap_{D \in \mathcal{D}} \Gamma_c\left(A, \tilde{\xi}(D)\right) = 0 .$$