Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 26 (1980)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE THÉORÈME D'APPROXIMATION DE RUNGE

Autor: Auderset, Claude

Kapitel: Equivalence des conditions topologiques 2), 3) et 4)

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-51070

partie de A. *Lorsque* X *est compacte, on suppose* P *non vide. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) *Toute section holomorphe de* ξ *au-dessus de* U *peut être approchée, uniformément sur les compacts de* U, *par des sections méromorphes de* ξ *au-dessus de* X *à pôles contenus dans* P *seulement.*
2) *Tout compact non vide de* A *ouvert dans* A *contient un point de* P.
3) *Le complémentaire* $A \setminus \bar{P}$ *de l'adhérence de* P *dans* A *n'a pas de composante connexe compacte.*
4) *L'inclusion de* U *dans* $X \setminus \bar{P}$ *induit un monomorphisme* $H_1(U) \to H_1(X \setminus \bar{P})$, *où* H_1 *désigne l'homologie singulière entière (par exemple).*
5) *Toute section holomorphe de* ξ *au-dessus de* U *peut être approchée, uniformément sur les compacts de* U, *par des sections holomorphes de* ξ *au-dessus de* $X \setminus \bar{P}$.

Remarque. Lorsque les composantes connexes de A sont ouvertes dans A, par exemple lorsqu'elles sont en nombre fini, la condition 2) peut être remplacée par:

toute composante connexe compacte de A *contient un point de* P.

En effet, les compacts de A ouverts dans A sont alors les réunions finies de composantes connexes compactes de A.

Equivalence des conditions topologiques 2), 3) et 4)

Lemme. *Pour qu'un espace localement compact* Y *n'ait pas de composante connexe compacte, il faut et il suffit que* Y *ne contienne pas de compact ouvert non vide.*

C'est un conséquence des deux énoncés suivants:

— Une composante connexe d'un compact ouvert dans Y est une composante connexe compacte de Y.

— Toute composante connexe compacte de Y est contenue dans un compact ouvert [2, TG II, 32, Corollaire de la Proposition 6].

Comme tout compact ouvert dans A qui coupe $\bar{P}$ coupe déjà P, on peut remplacer P par $\bar{P}$ dans la condition 2), qui se reformule donc: il n'y a pas de compact non vide ouvert dans $A \setminus \bar{P}$. D'après le lemme, ceci équivaut à la condition 3).

Pour vérifier l'équivalence de 3) et 4), considérons la suite exacte de cohomologie à supports compacts associée au sous-espace fermé $A \setminus \bar{P}$ de $X \setminus \bar{P}$

$$H_c^0(X \setminus \bar{P}, \mathbf{Z}) \to H_c^0(A \setminus \bar{P}, \mathbf{Z}) \to H_c^1(U, \mathbf{Z}) \to H_c^1(X \setminus \bar{P}, \mathbf{Z})$$

[3, Théorème 4.10.1, p. 190].

Ici, $\mathbf{Z}$ désigne le faisceau constant et, pour un espace topologique Y, $H_c^0(Y, \mathbf{Z})$ est formé des fonctions localement constantes sur Y à support compact. Le support d'un élément de $H_c^0(Y, \mathbf{Z})$ est un compact ouvert dans Y. D'après le lemme, lorsque Y est localement compact, $H_c^0(Y, \mathbf{Z}) = 0$ si et seulement si Y n'a pas de composante connexe compacte. Ceci montre d'abord que $H_c^0(X \setminus \bar{P}, \mathbf{Z}) = 0$. Ensuite, que la condition 3) équivaut à la nullité de $H_c^0(A \setminus \bar{P}, \mathbf{Z})$ ou encore, d'après l'exactitude de la suite précédente, à l'injectivité de $H_c^1(U, \mathbf{Z}) \to H_c^1(X \setminus \bar{P}, \mathbf{Z})$. Par dualité de Poincaré,

$$H_c^1(U, \mathbf{Z}) \cong H_1(U) \text{ et } H_c^1(X \setminus \bar{P}, \mathbf{Z}) \cong H_1(X \setminus \bar{P}),$$

ce qui achève la preuve de l'équivalence entre 3) et 4).

Utilisation de la dualité de Serre

Désignons par $\mathscr{D}$ l'ensemble des diviseurs effectifs sur X à support contenu dans P. Pour $D \in \mathscr{D}$, soient $\xi(D)$ le produit tensoriel de ξ avec le fibré en droites associé à D et $\tilde{\xi}(D) = \operatorname{Hom}(\xi(D), \kappa)$, où κ est le fibré cotangent de X. Les sections holomorphes de $\xi(D)$ sont interprétés comme sections méromorphes f de ξ telles que $\operatorname{div} f \geqslant -D$ et les sections holomorphes de $\tilde{\xi}(D)$ comme sections holomorphes ω de $\tilde{\xi} = \operatorname{Hom}(\xi, \kappa)$ telles que $\operatorname{div} \omega \geqslant D$.

Considérons la suite exacte de cohomologie à supports compacts associée au sous-espace fermé A de X

$$\Gamma_c(X, \tilde{\xi}(D)) \to \Gamma_c(A, \tilde{\xi}(D)) \to H_c^1(U, \tilde{\xi}) \to H_c^1(X, \tilde{\xi}(D))$$

[3, Théorème 4.10.1, p. 190], où Γ_c désigne les sections à support compact du faisceau des sections holomorphes d'un fibré en droites.