

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 26 (1980)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LIMITES DE SUITES BORNÉES DE POLYNÔMES  
**Autor:** Savoyant, Michel  
**Kapitel:** 2. Ensembles dominants  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-51069>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

1.1. *Définition.* Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbf{C}$ . L'enveloppe de Carathéodory de  $\Omega$  est l'intérieur du complémentaire de la composante connexe non bornée du complémentaire de  $\bar{\Omega}$ . On note  $\Omega^*$  cet ouvert.

1.2. *Définition.* Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbf{C}$  et  $S$  un sous-ensemble ouvert de  $\Omega$ ; un point  $\zeta \in \partial\Omega$  est dit accessible (resp. accessible à partir de  $S$ ) s'il existe un chemin continu  $z = \gamma(t)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) tel que:  $\gamma(t) \in \Omega$  (resp.  $\in S$ ) pour  $t \in [0, 1[$  et  $\gamma(1) = \zeta$ .

Nous démontrons le théorème suivant:

1.3. **THÉORÈME.** Soient  $G$  un ouvert connexe borné de  $\mathbf{C}$ ,  $G^*$  son enveloppe de Carathéodory,  $U$  la composante connexe de  $G^*$  contenant  $G$ , et  $G' = U \setminus \bar{G}$ . Alors  $P(G)$  est fermé dans  $H^\infty(G)$  si et seulement si l'ensemble des points de  $\partial U$  accessibles à partir de  $G'$  est au plus dénombrable.

Nous aurons à utiliser le théorème suivant qui caractérise les éléments de  $P(G)$ : (cf. [5], p. 151 ou [7] pour une démonstration).

1.4. **THÉORÈME.** Une fonction  $f \in H^\infty(G)$  est dans  $P(G)$  si et seulement s'il existe une fonction  $F \in H^\infty(G^*)$  tel que  $F \equiv f$  sur  $G$ .

Nous donnerons aussi des conditions suffisantes, portant seulement sur  $G^*$ , pour que  $P(G)$  soit fermé dans  $H^\infty(G)$ .

## 2. ENSEMBLES DOMINANTS

2.1. *Définition.* Soit  $G$  un ouvert de  $\mathbf{C}$ , et  $S$  un sous-ensemble de  $G$ . On dit que  $S$  est dominant dans  $G$  si  $\|f\|_S = \|f\|_G$  pour toute  $f$  dans  $H^\infty(G)$ .

La proposition suivante justifie l'introduction de cette définition.

2.2. **PROPOSITION.** Soient  $G$  un ouvert connexe borné de  $\mathbf{C}$ , et  $U$  la composante connexe de  $G^*$  qui contient  $G$ . Alors  $P(G)$  est fermé dans  $H^\infty(G)$  si et seulement si  $G$  est dominant dans  $U$ .

*Preuve.* Si  $G$  est dominant dans  $U$ , l'application restriction de  $H^\infty(U)$  dans  $H^\infty(G)$  est une isométrie, et donc l'ensemble  $\{f|_G : f \in H^\infty(U)\}$  est fermé dans  $H^\infty(G)$ ; cet ensemble coïncide avec  $P(G)$  d'après le théorème 1.4.

Réiproquement supposons  $P(G)$  fermé dans  $H^\infty(G)$ ; l'application restriction précédente est un homomorphisme continu bijectif de l'algèbre

$H^\infty(U)$  sur l'algèbre  $P(G)$  (la surjectivité résultant de 1.4); d'après le théorème du graphe fermé, l'application réciproque est continue; il existe donc une constante  $c > 0$  telle que pour chaque  $f \in H^\infty(U)$  avec  $\|f\|_U = 1$  et pour chaque entier  $n \geq 1$  on a

$$c \leq \|f^n\|_G = \|f\|_G^n \leq 1$$

Donc  $\|f\|_G = 1$  et l'application restriction est une isométrie, c'est-à-dire que  $G$  est dominant dans  $U$ .

Soit  $\Delta$  le disque unité ouvert. Un théorème de Brown, Shields et Zeller ([1]) caractérise les sous-ensembles dominants de  $\Delta$ :  $S \subset \Delta$  est dominant si et seulement si presque tout point de  $\partial\Delta$  (pour la mesure de Lebesgue sur  $\partial\Delta$ ) est limite non-tangentielle d'une suite de  $S$ . La proposition suivante montre que si  $S$  est connexe, on a une caractérisation purement topologique des ensembles dominants dans  $\Delta$ .

2.3. PROPOSITION. *Soit  $S$  un sous-ensemble connexe de  $\Delta$ . Alors  $S$  est dominant dans  $\Delta$  si et seulement si  $\partial S \supset \partial\Delta$ .*

*Preuve.* Même si  $S$  n'est pas connexe, il est clair que la condition est nécessaire; en effet si  $e^{i\theta} \notin \partial S$  la fonction  $f: z \mapsto \frac{1 + e^{-i\theta}z}{2}$  est telle que  $\|f\|_S < \|f\|_\Delta = 1$ .

Réiproquement supposons  $\partial S \supset \partial\Delta$ . Nous montrons d'abord que presque tout point de  $\partial\Delta$  est limite non-tangentielle d'une suite de points de  $S$ ; en effet supposons que non; alors il existe  $E \subset \partial\Delta$  de mesure non nulle telle que pour chaque  $e \in E$  il existe dans  $\Delta$  un triangle  $T_e$  de sommet  $e$ , que l'on peut prendre rectangle en  $e$ , isocèle, ayant le rayon passant par  $e$  comme bissectrice, et qui ne contient aucun point de  $S$ ; pour chaque entier  $n \geq 1$  soit  $E_n = \left\{ e \in E; \text{ hauteur de } T_e \geq \frac{1}{n} \right\}$  alors  $E = \bigcup_{n \geq 1} E_n$  et il existe d'après le théorème de la convergence monotone  $n_0$  tel que  $E_{n_0}$  a une mesure non nulle; soit  $e_1$  et  $e_2$  deux points de  $E_{n_0}$  avec  $|e_1 - e_2| \leq \frac{1}{2n_0}$

les triangles  $T_{e_1}$  et  $T_{e_2}$  déterminent un « triangle » ayant un arc d'extrémités  $e_1$  et  $e_2$  comme côté; le complémentaire dans  $\Delta$  de la frontière de ce « triangle » a deux composantes connexes, et  $S$  doit être dans l'une d'elles, ce qui est impossible puisque  $\partial S \supset \partial\Delta$ . Montrons maintenant que  $S$  est dominant; soit  $f \in H^\infty(\Delta)$  et notons  $L^8(\partial\Delta)$  l'ensemble des fonctions mesurables essentiellement bornées pour la mesure de Lebesgue sur  $\partial\Delta$

et  $\| \cdot \|_\infty$  la norme correspondante;  $f$  a une limite radiale  $\lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta}) = f^*(e^{i\theta})$  pour presque tout  $e^{i\theta} \in \partial\Delta$  et  $f^* \in L^\infty(\partial\Delta)$  avec  $\|f^*\|_\infty = \|f\|_A$ ; de plus si la limite radiale de  $f$  existe en  $e^{i\theta}$ , on a aussi  $\lim_n f(z_n) = f^*(e^{i\theta})$  pour toute suite  $(z_n)$  de  $\Delta$  tendant non tangentielle vers  $e^{i\theta}$  ([4] th. 1.3); soit  $\varepsilon > 0$ , il existe  $E \subset \partial\Delta$  de mesure non nulle telle que  $|f^*(e^{i\theta})| \geq \|f\|_A - \varepsilon$  sur  $E$  et puisque presque tout point de  $E$  est limite non tangentielle d'une suite de  $S$  on a  $\|f\|_s \geq \|f\|_A - \varepsilon$ ; la proposition 2.3 est démontrée.

Avant de donner une première application de 2.3 nous donnons sans démonstration une liste de propriétés satisfaites par l'enveloppe de Carathéodory  $\Omega^*$  d'un ouvert  $\Omega$ .

2.4. PROPOSITION. *Soient  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbf{C}$  et  $\Omega^*$  son enveloppe de Carathéodory. Notons  $H$  la composante connexe non bornée du complémentaire de  $\overline{\Omega}$ .*

- (i)  $\partial\Omega^* = \partial\overline{H} = \partial H \subset \partial\Omega$
- (ii)  $H$  est le complémentaire de  $\overline{\Omega^*}$
- (iii) Chaque composante connexe de  $\Omega^*$  est simplement connexe. (i.e.  $\mathbf{C} \setminus \Omega^*$  est connexe).
- (iv) Si de plus  $\Omega$  est connexe,  $\partial\Omega^* = \partial U$  où  $U$  est la composante connexe de  $\Omega^*$  qui contient  $\Omega$ .

Une démonstration de (i), (ii) et (iii) se trouve dans [7], la propriété (iv) est immédiate à démontrer.

2.5. THÉORÈME. *Soit  $G$  un ouvert connexe borné, et supposons que  $\partial G^*$  soit une courbe de Jordan. Alors  $P(G)$  est fermé dans  $H^\infty(G)$ .*

*Preuve.* Remarquons que dans les hypothèses du théorème  $G^*$  est connexe (i.e.  $G^* = U$  avec les notations précédentes). D'après la proposition 2.2 il suffit de montrer que  $G$  est dominant dans  $G^*$ . Soit  $\psi$  une transformation conforme de  $G^*$  sur  $\Delta$  ( $G^*$  est simplement connexe d'après 2.4 (iii)):  $\partial G^*$  étant une courbe de Jordan,  $\psi$  se prolonge en un homéomorphisme de  $\overline{G^*}$  sur  $\overline{\Delta}$ , qui applique  $\partial G^*$  sur  $\partial\Delta$ ;  $\Omega = \psi(G)$  est un ouvert connexe de  $\Delta$  et  $\partial\Omega \supset \partial\Delta$  puisque  $\partial G \supset \partial G^*$ ; donc  $\Omega$  est dominant dans  $\Delta$  d'après 2.3; il est clair alors que  $G$  est dominant dans  $G^*$ .